ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 1. Espacio vectorial euclídeo i (producto escalar)

1. Indica razonadamente cuáles de las siguientes aplicaciones bilineales $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definen un producto escalar en $\mathbb{R}^2$:

i) $\phi(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + 2y_1 x_2 - 3x_1 y_2 + 2x_2 y_2$.

ii) $\phi(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 - x_2 y_2$.

iii) $\phi(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 3x_2 y_2$.

Encuentra la matriz, en la base canónica, de las aplicaciones bilineales que sean producto escalar.

2. Considera la aplicación $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \;\to\; (2x_1 - 2x_2 + 4x_3)y_1 + (-2x_1 - 2x_3)y_2 + (6x_3 + 4x_1 - 2x_2)y_3.$$

i) Demuestra que ϕ es una forma bilineal simétrica.

ii) Decide de manera razonada si ϕ es un producto escalar.

iii) Calcula el conjunto de los vectores (x, y, z) que cumplen $\phi\,((x, y, z), (1, -1, -1)) = 0$.

iv) Determina algún vector (x, y, z) (no nulo) que cumpla que $\phi\,((x, y, z), (x, y, z)) = 0$.

3. Sea $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal dada por:

$$\psi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

i) Decide de manera razonada si ψ es un producto escalar.

ii) Encuentra una base de $\mathbb{R}^3$ respecto a la que la matriz de ψ es diagonal.

4. Considera la aplicación $\phi : \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(A, B) = \text{traza}\ (AB^t)$. Demuestra que ϕ es un producto escalar en $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

5. Halla los cosenos de los ángulos entre los vectores no nulos del subespacio vectorial de ecuaciones $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ de $\mathbb{R}^n$ y los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, con el producto escalar usual.

6. Sea $(E, <, >)$ un espacio euclídeo . Demuestra que:

i) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$, para todo $\vec{u}, \vec{v} \in E$ (ley del paralelogramo).

ii) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4 < \vec{u}, \vec{v} >$, para todo $\vec{u}, \vec{v} \in E$ (identidad de polarización).

iii) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 2 < \vec{u}, \vec{v} >$, para todo $\vec{u}, \vec{v} \in E$.

7. Demuestra la siguiente generalización del teorema de Pitágoras:

$$\|\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n\|^2 = \|\vec{x}_1\|^2 + \|\vec{x}_2\|^2 + \cdots + \|\vec{x}_n\|^2 ,$$

si los vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \in E$ son ortogonales dos a dos.

8. Si $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son dos vectores cualesquiera en un espacio euclídeo E, demuestra que

$$\|\vec{x}-\vec{y}\| \geq \left| \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \right| .$$

9. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una norma en V es una aplicación $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ tal que:

a) $\|\vec{u}\| \geq 0, \forall \vec{u} \in V$ y $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{0}$.

b) $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \, \|\vec{u}\|, \forall \vec{u} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$.

c) $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (desigualdad triangular).

Sea $\|\vec{x}\| = |x_1| + |x_2|$ definida en $\mathbb{R}^2$. Demuestra que $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{R}^2$, pero que no proviene de ningún producto escalar porque no satisface la ley del paralelogramo.

10. Dados $\vec{x}_1 = (1,0,0)$, $\vec{x}_2 = (4,-2,0)$ y $\vec{x}_3 = (1,1,5)$ en $\mathbb{R}^3$ construye los vectores $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ e $\vec{y}_3$ según el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt (con el producto escalar usual).

11. Sea $< \vec{x}, \vec{y} >= x_1y_1 + (x_1+x_2)(y_1+y_2) + (x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3)$ un producto escalar en $\mathbb{R}^3$. Encontrar una base ortogonal del subespacio vectorial $M \subset \mathbb{R}^3$ para:

a) $M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = x_3\}$; b) $M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$.

12. Dada la base $B' = \{u_1 = (-2,-1,1),\ u_2 = (0,-1,0),\ u_3 = (1,-1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$,

i) Demuestra que existe un producto escalar ϕ respecto al cual B' es una base ortogonal. Decide de manera razonada si ϕ es único con esta propiedad.

ii) Demuestra que existe un producto escalar ψ respecto al cual B' es una base ortonormal. Decide de manera razonada si ψ es único con esta propiedad. Describe la matriz de ψ respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

13. Dado un número natural n, definimos $V_n = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \text{grado}(p(x)) \leq n\}$. En $V_n \times V_n$, se define la aplicación ϕ:

$$\phi(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

i) Demuestra que ϕ es un producto escalar.

i) Describe el subespacio de polinomios ortogonales al polinomio x.

iii) Calcula una base ortogonal de V_3.

14. Decide, de forma razonada, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) En el espacio vectorial (real) euclídeo E, los vectores $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ son ortogonales si y sólo si $||\vec{u}|| = ||\vec{v}||$.

ii) En un espacio vectorial (real) euclídeo X se cumple la igualdad

$$\|\,\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\,\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + \|\vec{z}\|^2 + 2\left(\langle\vec{x},\vec{y}\rangle + \langle\vec{y},\vec{z}\rangle + \langle\vec{z},\vec{x}\rangle\right),$$

para todos los vectores $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z} \in X$.

iii) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, podemos encontrar dos vectores $\vec{x}, \vec{y}$ y un producto escalar Φ tales que $\Phi(\vec{x},\vec{x}) = 1$ y $\Phi(\vec{y},\vec{y}) = \Phi(\vec{x},\vec{y}) = 2$.