ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Ejercicio extra. Espacio vectorial euclídeo i

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. En V se ha definido una **norma**, es decir, una aplicación $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ que verifica las tres siguientes condiciones:

a) $\|\vec{u}\| \geq 0, \forall \vec{u} \in V$ y $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

b) $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|, \quad \forall \vec{u} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$.

c) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (desigualdad triangular).

Adicionalmente, la norma cumple la ley del paralelogramo:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2), \quad \text{para todo } \vec{u}, \vec{v} \in E$$

El ejercicio pide probar que entonces *existe* un producto escalar ϕ en V tal que

$$\phi(\vec{u}, \vec{u}) = \|\vec{u}\|^2.$$

Ese producto escalar viene dado explícitamente por

$$\phi(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2}{4}.$$

Comentarios:

1) Se trata de comprobar que ϕ cumple las propiedades que caracterizan un producto escalar. La simetría y positividad deben de ser casi inmediatos.

2) Lo más difícil es probar la bilinealidad. Puedes consultar

   `http://math.stackexchange.com/questions/21792/`

   `norms-induced-by-inner-products-and-the-parallelogram-law`

   para hacerte una idea de un posible plan de demostración.

3) Los que queráis intentarlo, escribid la demostración con todo detalle y me la entregáis escrita para que le eche un vistazo. Yo os la devolvería con comentarios. Podéis hacerlo individualmente o por parejas.