# ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

**Hoja 11**. CÓNICAS Y CUÁDRICAS

**1.** Dada una circunferencia de centro $C$ y radio $r$ y un punto $A$ exterior a ella, se considera cualquier recta $s$ que pasa por $A$ y que corta a la circunferencia en dos puntos $P$ y $P'$. Demuestra que $\|\vec{AP}\|\|\vec{AP'}\| = \|\vec{AC}\|^2 - r^2$ .

(*Nota*: $\|\vec{AP}\|\|\vec{AP'}\|$ se denomina *potencia* del punto $A$ con respecto a la circunferencia dada. Este ejercicio muestra que la potencia del punto $A$ no depende de la recta $s$.)

**2.** Considera la elipse de ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ con $a > b$ y la circunferencia de de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$. Sea $S = (x, 0)$ con $-a < x < a$. Sean $P$ y $P'$ los puntos de corte de la perpendicular al eje $OX$ que pasa por $S$ con la elipse y la circunferencia respectivamente. Demuestra que

$$\frac{\|\vec{P'S}\|}{\|\vec{PS}\|} = \frac{a}{b}\,.$$

**3.** Una circunferencia del plano pasa por los puntos $(1, 3)$ y $(3, 5)$ y tiene el centro sobre la recta $x + 2y = 3$. Halla su ecuación, su centro y su radio.

**4.** Encuentra las ecuaciones de las parábolas de focos $(1, a)$ y vértices $(a, a)$ donde $a \in \mathbb{R}, a > 1$. Demuestra que sólo hay un valor de $a$ para el cual la parábola correspondiente pasa por el origen.

**5.** Encuentra las ecuaciones de las las elipses de focos $(0, \mu)$ y $(-\mu, 2)$ y semieje mayor $\sqrt{2}$, donde $\mu \in \mathbb{R}$. Demuestra que existen dos elipses de la familia que pasan por el origen.

**6.** Halla la ecuación de la hipérbola que tiene un foco en el punto $(2, -1)$ y sus asíntotas son las rectas $x = 0$ y $3x - 4y = 0$.

**7.** (Un problema difícil y sin una respuesta muy clara, para jugar y divertirse.) Diseña un "acumulador de luz", es decir, un recipiente cerrado excepto por una o más aberturas, y reflectante por dentro (es decir, las paredes interiores no absorben la luz sino que la reflejan completamente), de tal manera que todo rayo de luz que entra no vuelve a salir.