

## ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

### Hoja 0. REPASO DE ÁLGEBRA LINEAL

1. Sean  $F := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0, z + t = 0\}$  y  $G$  el subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^4$  generado por  $\{(1, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (2, 0, 0, 1)\}$ .

- Demuestra que  $F$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^4$ .
- Calcula una base de  $F$  y su dimensión.
- ¿Cuál es el mínimo número de ecuaciones lineales homogéneas que necesitamos para describir  $G$ ? Da un ejemplo de sistema lineal homogéneo cuyo conjunto de soluciones sea  $G$ . ¿Es este sistema único con esta propiedad?
- Calcula una base del subespacio  $F + G$ .
- Describe el subespacio  $F \cap G$  de dos maneras distintas.
- Comprueba que se verifica la fórmula de Grassman sobre las dimensiones de los subespacios que aparecen en el problema.

2. Dados los subespacios  $U = \{(a, b, c, d) : b + c + d = 0\}$  y  $V = \{(a, b, c, d) : a + b = 0, c = 2d\}$  de  $\mathbb{R}^4$ , determina una base y la dimensión de  $U$ ,  $V$ ,  $U + V$  y  $U \cap V$ .

3. Consideremos los vectores  $\vec{u}_1 = (1, 1)$  y  $\vec{u}_2 = (-1, 1)$  de  $\mathbb{R}^2$  y una aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 \quad \text{y} \quad f(\vec{u}_2) = -\vec{u}_2. \quad (1)$$

- Demuestra que  $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  es una base de  $\mathbb{R}^2$ .
- Decide, razonadamente, si  $f$  está completamente determinada por las condiciones descritas en (1).
- Escribe la matriz de  $f$  respecto a la base  $\mathcal{B}$ .
- Calcula la imagen de  $(1, 3)$  por  $f$ .
- Sea  $(a, b)$  un vector cualquiera de  $\mathbb{R}^2$ . Calcula su imagen por  $f$  y expresa sus coordenadas respecto a la base canónica  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^2$ .
- Usando el apartado anterior, calcula las imágenes por  $f$  de los vectores de la base canónica.
- Describe geoméricamente el efecto que tiene aplicar  $f$  a un vector cualquiera de  $\mathbb{R}^2$ .

4. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la aplicación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (0, x - 2y + z).$$

- Halla la matriz de  $f$  en la base canónica.
- Calcula el núcleo e imagen de  $f$ , bases y dimensiones respectivas.
- Halla la matriz de la aplicación  $f$  respecto de las bases  $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^3$ , y  $B' = \{(1, 1), (0, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^2$ .

5. Sea  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una aplicación lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

- i) Describe las imágenes por  $g$  de los vectores de la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ .
- ii) ¿Cuál es la dimensión de la imagen de  $g$ ? ¿Es  $g$  inyectiva?
- iii) Describe la imagen de  $g$ : fijado un vector  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , da condiciones necesarias y suficientes para que  $(a, b, c)$  esté en la imagen de  $g$ .
- iv) Describe los subespacios invariantes por  $g$ .

6. Calcula los valores de  $a, b, c$  y  $d$  sabiendo que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & d \\ 2 & b & -2 \\ 3 & c & 3 \end{pmatrix}$$

admite como autovectores a  $\vec{u} = (1, 0, 1)$ ,  $\vec{v} = (-1, 1, 0)$  y  $\vec{w} = (0, 1, -1)$ .

7. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C\vec{x} = \vec{0}. \quad (2)$$

Contesta de manera razonada a las siguientes preguntas **sin hacer ningún cálculo**.

- i) Sea  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la aplicación lineal cuya matriz asociada está dada por  $C$ . Al resolver el sistema de ecuaciones (2), ¿qué información obtenemos sobre  $h$ ?
- ii) ¿Qué información nos da el número de soluciones del sistema (2) sobre los vectores columna de  $C$ ?
- iii) Sea ahora  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  un vector cualquiera. Observa que  $C\vec{x} = (a, b, c)^t$  se puede escribir como

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \quad (3)$$

- ¿Qué significa, en términos de  $h$ , que el sistema (3) tenga o no solución?
- iv) ¿Qué significa, en términos de los vectores columna de  $C$ , que el sistema (3) tenga o no solución?