Análisis matemático II
Ingeniería de tecnologías y servicios de telecomunicación
Curso 2016-2017

Hoja 6. Integración de funciones/campos vectoriales sobre curvas y superficies.

Campos vectoriales

1. Para cada uno de los campos vectoriales $\vec{F}$ siguientes se pide calcular su divergencia $\mathrm{div}\vec{F}$ y su rotacional $\mathrm{rot}\vec{F}$, decidir si el campo es conservativo o no, y en caso afirmativo, calcular la función potencial.

a) $\vec{F}(x,y,z) = (x+z, -(y+z), x-y)\,.$

b) $\vec{F}(x,y,z) = (2\,x\,y^3, x^2\,z^3, 3\,x^2\,y\,z^2)\,.$

c) $\vec{F}(x,y,z) = (3\,y^4\,z^2, 4\,x^3\,z^2, -3\,x^2\,y^2)\,.$

d) $\vec{F}(x,y,z) = (4\,x\,y - 3\,x^2\,z^2 + 1, 2\,(x^2+1), -2\,x^3\,z - 3\,z^2))\,.$

Integrales de campos vectoriales sobre curvas

2. Calcular $\int_\gamma (2\,x^3 - y^3)\,dx + (x^3+y^3)\,dy$, donde γ es el círculo unidad orientado en el sentido negativo (horario).

3. Calcular la integral $\int_\gamma y\,dx + x^2\,dy$, donde γ es la circunferencia $x^2+y^2 = x$ recorrida en el sentido positivo (antihorario).

4. Hallar el trabajo que realiza el campo $\vec{F}(x,y) = (y^2+x^3, x^4)$ al recorrer el contorno del cuadrado $[0,1]\times[0,1]$ en el sentido negativo (horario).

5. Para cada $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, salvo $(0,0)$, sea $\vec{F}(x,y)$ el vector unitario que apunta desde (x,y) hacia el origen de coordenadas. Calcular el trabajo que realiza el campo $\vec{F}$ para desplazar una partícula desde la posición $(2,0)$ hasta $(1,1)$ a lo largo de la semicircunferencia superior de $(x-1)^2+y^2=1$.

6. Calcular la integral $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s}$, donde $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ y donde γ viene dada por

$$\gamma(t) = \left(e^{t^2\cos\pi t},\, t\,\mathrm{sen}(\pi(e^{t-1})),\, t^{1/2}+t^{1/3}\right), \quad \text{con } t\in[0,1]\,.$$

Integrales de campos vectoriales sobre superficies

7. Hallar la integral de superficie $\int_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{dS}$ donde $\vec{F}(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$, y donde Γ es el hemisferio superior $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\,, z\geq 0\}$ de la esfera unidad orientada hacia el exterior.

8. Hallar la integral de superficie $\int_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{dS}$, donde $\vec{F}(x,y,z) = (x^3, y^3, -z)$, y donde Γ es la esfera unidad $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ orientada hacia el exterior.

9. Utilizar el teorema de Stokes para transformar la integral de superficie $\displaystyle\iint_\Gamma \mathrm{Rot}\,\vec{F}\cdot\vec{dS}$ en integral sobre una curva y calcular entonces esa integral en cada uno de los siguientes casos:

a) $\vec{F}(x,y,z) = (y^2, x\,y, x\,z)$, donde Γ es el hemisferio superior de la esfera unidad $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\,, z \geq 0\}$ y la normal tiene componente z no-negativa.

b) $\vec{F}(x,y,z) = (y,z,x)$, donde Γ es la parte del paraboloide $\{(x,y,z) :\ z = 1 - x^2 - y^2\}$ con $z \geq 0$ y la normal tiene componente z no negativa.

10. Utilizar el teorema de Stokes para comprobar que las siguientes integrales de campos sobre curvas tienen los valores que se dan, indicando en cada caso el sentido en el que se recorre γ para llegar al resultado.

a) Siendo γ la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y el plano $x + y + z = 0\,$,

$$\int_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz = \pi\,R^2\sqrt{3}\,.$$

b) Siendo γ la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 2\,y$ y el plano $y = z\,$,

$$\int_\gamma (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz = 0\,, \qquad \int_\gamma y^2\,dx + x\,y\,dy + x\,z\,dz = 0\,.$$

11. Hallar la integral del campo vectorial

$$\vec{F} = (x + \cos y - \log(1+z^2), y + \operatorname{sen}\sqrt{1+x^2+z^2}, z)$$

sobre la esfera unidad $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ con la orientación inducida por la normal exterior.

12. Sea Γ la superficie borde del cubo $0 \leq x,y,z \leq 1$ con la orientación correspondiente a la normal exterior y sea $\vec{F}$ el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$. Calcular la integral

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot \vec{dS}$$

directamente y mediante el teorema de la divergencia.

13. Sea Γ la superficie formada por las porciones de la semiesfera $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ con $x^2 + y^2 \leq 1/2\,$. Calcular $\int_\Gamma \vec{F} \cdot \vec{dS}$ (con la orientación inducida por la normal exterior), donde

$$\vec{F}(x,y,z) = (x\,z + e^{y \operatorname{sen} z},\ 2\,y\,z + \cos xz,\ -z^2 + e^x \cos y).$$

14. Sea $\vec{F}$ el campo $\vec{F}(x,y,z) = (x, x^2, yz)$. Supongamos que $\vec{F}$ representa el campo de velocidades de un fluido en metros por segundo. Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan el plano XY a través del cuadrado $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, donde x,y,z se miden en metros.