Análisis matemático II
Ingeniería de tecnologías y servicios de telecomunicación
Curso 2016-2017

Hoja 5. Integración de funciones escalares sobre curvas y superficies

Curvas

1. Para las siguientes trayectorias, dar la ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente al valor de t dado:

a) $\gamma(t) = \big(e^{-t}\,\operatorname{sen} t, e^{-t}\,\cos t, 0\big)$ en $t = 2\,\pi$.

b) $\sigma(t) = \big(e^{-2t}\operatorname{sen}(2\,t), e^{-2t}\,\cos(2\,t), e^{-2t}\big)$ en $t = \pi/2$.

2. Calcular la longitud de la curva $\sigma(t)$ dada por

$$\sigma(t) = \begin{cases} \big(\cos t, \operatorname{sen} t, 3\,t\big) & \text{para } t \text{ tal que } \quad 0 \le t \le \pi, \\ \big(-1, -t+\pi, 3\,t\big) & \text{para } t \text{ tal que } \quad \pi < t \le 2\,\pi. \end{cases}$$

3. Sea γ la curva dada mediante las ecuaciones paramétricas $x(t) = t\,\cos t$, $y(t) = t\,\operatorname{sen} t$, $z(t) = t$, con $0 \le t \le 2\pi$. Calcular la longitud de γ y la integral $\int_\gamma z\,ds$.

4. Sea σ la curva dada por $\sigma(t) = (\operatorname{sen}\,t, \cos t, t)$, con $0 \le t \le \pi$. Hallar la integral $\int_\sigma f\,ds$, donde $f(x, y, z) = x + y + z$.

5. Calcular el promedio de la distancia al origen $(0, 0, 0)$ de los puntos de la curva $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ con $-2\pi \le t \le 2\pi$.

6. Sea σ la curva plana dada por $\sigma(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t, 0)$ con $t \in [0, \pi/2]$. Sobre la curva σ se construye una pared donde la altura en cada punto viene dada por $f(x, y) = 1 + y$. Hallar el área de la pared.

Superficies

7. Hallar la ecuación del plano tangente a las superficies parametrizadas siguientes en el punto dado

a) $\Phi(u, v) = (4\,u, 3\,u^2 + v, v^2 + 5)$ en $(0, 1, 6)$.

b) $\Phi(u, v) = (u^2 + 1, v^2 + 1, u^2 + v^2)$ en $\Phi(1, 1)$.

8. Hallar la expresión de la normal *unitaria* a las siguientes superficies parametrizadas siguientes:

a) $\Phi(u, v) = (\cos u\,\operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u\,\operatorname{sen} v, \cos v)$ con $0 \le u \le 2\,\pi$, $0 \le v \le \pi$.

b) $\Phi(r, \theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, r)$ con $0 \le r \le 5$, $0 \le \theta \le \pi$.

9. Hallar el área de la superficie (esfera unidad) dada paramétricamente por

$$\Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta\,\operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\phi, \cos\phi)\,, \qquad \text{con } 0 \le \theta \le 2\pi \text{ y } 0 \le \phi \le \pi.$$

10. Calcular el área de la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ comprendida entre $z = 1$ y $z = 2$.

11. Hallar la masa de la esfera de radio 1 si en cada punto (x, y, z) la densidad viene dada por la distancia de (x, y, z) al punto $(0, 0, -1)$.

12. Hallar el centro de gravedad de la porción de la esfera de radio 1 comprendida en el octante $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$.