Análisis matemático II
Ingeniería de tecnologías y servicios de telecomunicación
Curso 2016-2017

Hoja 4. Integración de funciones escalares

En todos estos ejercicios de integración se recomienda dibujar un esquema del recinto de integración antes de abordar los cálculos.

Integrales de funciones en recintos

1. Halla el valor de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_Q x^2\, e^y\, dx\, dy$, siendo $Q = [-1,1] \times [0, \ln 2]$.

b) $\displaystyle\int_Q (2x + 3y + z)\, dx\, dy\, dz$, donde $Q = [1,2] \times [-1,1] \times [0,1]$.

2. Calcula el volumen del sólido bajo la gráfica de $f(x,y)$ y sobre la región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ siguientes:

a) función $f(x,y) = x + y$ sobre la región $\Omega = \{(x,y) : x^2 \leq y \leq 2x^2, 0 \leq x \leq 1\}$;

b) función $f(x,y) = x^2 + y^2$ sobre la región $\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

3. Calcula el valor de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_\Omega x \cos(x - y)\, dx\, dy$, donde Ω es el triángulo de vértices $(0,0), (\pi, 0), (\pi, \pi)$.

b) $\displaystyle\int_\Omega e^{x+y}\, dx\, dy$, donde $\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\big\}$.

c) $\displaystyle\int_\Omega x^2 y^2\, dx\, dy$, donde Ω es el recinto del primer cuadrante situado entre

las hipérbolas $xy = 1$ y $xy = 2$, y las rectas $y = x$ e $y = 4\,x$.

4. Halla el valor de las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int_T x^2 \cos z\, dx\, dy\, dz$, donde T es la región limitada por los planos

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad z = \pi \quad \text{y} \quad x + y = 1.$$

b) $\displaystyle\int_\Omega xy\sqrt{z}\, dx\, dy\, dz$, siendo Ω el sólido limitado por

la superficie $y = x^2$ y los planos $y = z$, $y = 1$ y $z = 0$.

5. Calcula el volumen de la pirámide que está limitada por los tres planos coordenados y el plano $x + 2\,y + 3\,z = 6$.

Cambios de orden de integración

6. Halla el valor de la integral $\displaystyle\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\operatorname{sen} y}{y}\, dy\, dx\,.$

7. Representa las siguientes integrales iteradas como integrales dobles (sobre una región $\Omega \in \mathbb{R}^2$), e invierte el orden de integración.

a) $\displaystyle\int_0^2 \Big(\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\, dx\Big)\, dy.$

b) $\displaystyle\int_0^\pi \Big(\int_{-\operatorname{sen}(x/2)}^{\operatorname{sen} x} f(x,y)\, dy\Big)\, dx.$

8. En cada uno de los siguientes casos, la integral $\int_\Omega f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$ de la función f se reduce a la integral iterada dada. Dibuja la región de integración $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y su proyección sobre el plano $z = 0$. Escribe entonces la integral como una o varias integrales iteradas en las que la integración se hace en el orden $dz\, dx\, dy$ (en lugar del $dz\, dy\, dx$ que aparece debajo).

a) $\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^x \Big(\int_0^y f(x,y,z)\, dz\Big)\, dy\Big)\, dx.$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \Big(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)\, dz\Big)\, dy\Big) dx.$

Cambios de variables

9. Calcula el valor de la integral $\int_\Omega (x+y)\, dx\, dy$, donde Ω es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,3)$ y $(2,2)$, usando el cambio lineal $x = u - v$, $y = u + v$.

10. Sea R el rectángulo $R = \{(u,v) : 1 \le u \le 2, 1 \le v \le 3\}$ y sea F la trasformación $F(u,v) = (x,y)$ dada por

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2, \\ y = 2\, u\, v. \end{cases}$$

a) Calcula su Jacobiano $J(u,v)$.

b) Demuestra que a dos puntos (u_1, v_1) (u_2, v_2) les corresponde el mismo punto (x,y) si y sólo si ó bien $u_1 = u_2$ y $v_1 = v_2$, ó bien $u_1 = -u_2$ y $v_1 = -v_2$. Deduce que esta aplicación es uno a uno en R.

c) Calcula la imagen Ω del rectángulo R mediante esta transformación.

d) Calcula el área de Ω.

Polares, cilíndricas, esféricas

11. Usa coordenadas polares para verificar que la integral de la función

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \exp\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)$$

sobre el recinto $E = \{\, x^2 + (y-1)^2 \le 1 \,\}$ es 0 y sobre el recinto $H = \{\, x^2 + (y-1)^2 \le 1,\ x \ge 0 \,\}$ es 2.

12. En los siguientes casos, expresa la integral $\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$ como una integral iterada en coordenadas polares.

a) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le a^2\}$, donde $a > 0$.

b) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y \le 1, 0 \le x \le 1\}$.

13. Halla los valores de las siguientes integrales, cambiando a coordenadas cilíndricas:

a) $\displaystyle\int_\Omega (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz$, siendo Ω el sólido limitado por la superficie $x^2 + y^2 = 2\,z$ y el plano $z = 2$.

b) $\displaystyle\int_\Omega ((x+y)^2 - z)\,dx\,dy\,dz$, siendo Ω el cono limitado por $(z-1)^2 = x^2 + y^2$, $z = 0$ y $z = 1$.

14. Halla los valores de las siguientes integrales, cambiando a coordenadas esféricas:

a) $\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2 + 9)}\,dx\,dy\,dz,$ siendo Ω la bola de radio 3 centrada en el origen de coordenadas.

b) $\displaystyle\int_\Omega \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz,$ siendo Ω la bola de centro $(0,0,1/2)$ y radio $1/2$.

Más volúmenes

15. Verifica los cálculos de los siguientes volúmenes:

a) El volumen de la intersección del cilindro $x^2 + y^2 \le 4$ con la bola $x^2 + y^2 + z^2 \le 16$ es $32\pi(8 - 3\sqrt{3})/3$.

b) El volumen del sólido limitado por los conos $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = -1 + \sqrt{x^2 + y^2}$ es $2\pi/3$.

c) El volumen limitado superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ e inferiormente por el paraboloide $x^2 + y^2 = 4\,z$ es $(2\pi/3)(5^{3/2} - 4)$.

d) El volumen de la región limitada por $x^2 + y^2 + z^2 \le 2$, $x^2 + y^2 \le z$ y $z \le 6/5$ es $493\pi/750$.

e) El volumen limitado por $\sqrt{x/2} + \sqrt{y/3} + \sqrt{z/15} = 1$ y comprendido en el primer octante $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ es 1.