Análisis matemático II
Ingeniería de tecnologías y servicios de telecomunicación
Curso 2016-2017

Hoja 3. Máximos y mínimos

Derivadas de orden superior

1. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función cuyas segundas derivadas son continuas. El cambio de variables $x = u + v$, $y = u\,v^2$ convierte a esa función $f(x,y)$ en la función $g(u,v)$.

Observa que ese cambio de variables lleva el punto $(x,y) = (2,1)$ en el punto $(u,v) = (1,1)$.

Calcula el valor de la derivada parcial segunda $\partial^2 g/\partial u \partial v$ en el punto $(u,v) = (1,1)$ sabiendo que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

en el punto de coordenadas $x = 2$ e $y = 1$.

2. La función $f(x,t)$ definida en $\mathbb{R}^2$ satisface, en cada punto (x,t), *la ecuación de ondas*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 t} = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\,.$$

El cambio de variables $x = u - v$, $t = u + v$ convierte la función $f(x,t)$ en una función $g(u,v)$. ¿Qué ecuación (en derivadas parciales) satisface la función g?

3. Halla los polinomios de Taylor de orden 2 centrados en $(0,0)$ de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = x\,e^{x+y}$. (b) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x\,y) + \cos(x\,y)$.

Puntos críticos, máximos, mínimos y puntos de silla

4. Halla los posibles puntos de máximo, mínimo y de silla de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = (x+y)^2$. (b) $f(x,y) = x\,y\,e^{x-y}$.

(c) $f(x,y) = e^x \cos y$. (d) $f(x,y) = x \ln(x^2 + y^2)$.

(e) $f(x,y) = \ln\big(2 + \operatorname{sen}(x\,y)\big)$.

5. Halla los puntos críticos de las siguientes funciones y determina cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos silla:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + x\,y - 2\,x - 4\,y + 10$. (b) $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2\,x + 2y$.

(c) $f(x,y) = 3\,x^2 - 4\,y^2 + x\,y$. (d) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy$.

(e) $f(x,y) = x\,y$. (f) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

6. Considera la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$. Halla sus puntos críticos y determina cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos silla.

Extremos con restricciones

7. Calcula el mínimo y el máximo de la función $f(x,y) = 6x^2 + 4xy + 3y^2$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Encuentra los puntos donde se alcanzan estos extremos.

8. Halla los extremos de las siguientes funciones con las correspondientes restricciones:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, cuando $2\,x^2 + y^2 \leq 4$.

b) $f(x,y) = 4\,x^2 + y^2 - 2\,x - y + 3$, cuando $4\,x^2 + y^2 \leq 1$.

c) $f(x,y) = x^2 - 3\,x\,y + y^2$, cuando $x^2 + y^2 \leq 2$.

Problemas de optimización

9. Sea $a > 0$ un número dado. Escribe a como producto de cuatro factores positivos, cuya suma sea mínima.

10. Calcula la distancia mínima entre los puntos de la gráfica de la función $f(x,y) = \dfrac{1}{4xy}$ y el punto $(0,0,0)$.

11. Queremos construir una caja de cartón con volumen fijo V dado. Halla las dimensiones que minimizan la cantidad de cartón utilizada. ¿Qué tipo de caja obtenemos?

12. Halla las dimensiones de una caja de cartón que tenga superficie fija S dada y que tenga volumen máximo.

13. Se quiere construir una lata metálica con forma cilíndrica, sin la tapa superior y con una capacidad de 1 litro. ¿Cuáles son las dimensiones que minimizan la cantidad de metal empleada?

14. Se dispone de 12 decímetros cuadrados de metal para fabricar una lata cilíndrica con las dos tapas. ¿Qué dimensiones maximizan el volumen de dicha lata?