Análisis matemático II
Ingeniería de tecnologías y servicios de telecomunicación
Curso 2016-2017

Hoja 2. Derivabilidad

Derivadas parciales y gradientes de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1. Calcúlense las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ de las siguientes funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 \operatorname{sen} xy$, para cualquier $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ salvo $(x,y) = (0,0)$.

c) $f(x,y) = \arctan \dfrac{x+y}{1-xy}$, para aquellos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ donde $xy \neq 1$.

2. Hállese el vector gradiente ∇f de las siguientes funciones escalares f, en cada punto en el que exista.

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = e^x \cos y$.

b) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = \ln(x^2+2\,y^2-3\,z^2)$, para los (x,y,z) tales que $x^2+2\,y^2-3\,z^2 > 0$.

c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2}\,, & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0\,, & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

3. Sea p un punto de $\mathbb{R}^2$ y sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en ese punto p. Supóngase que $D_{\vec{u}} f(p) = 1$ y $D_{\vec{v}} f(p) = 2$, siendo $\vec{u} = (2,3)$ y $\vec{v} = (1,1)$. Determínese para qué vectores $\vec{w}$ se tiene que $D_{\vec{w}} f(p) = 6$. Calcúlese el gradiente $(\nabla f)(p)$.

Existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

4. Considérese la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y^2}{x^2+y^4}\,, & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0\,, & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

a) Compruébese que las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existen y calcúlese su valor.

b) Compruébese que f no es continua en $(0,0)$.

5. Compruébese que la función $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ es continua en todo el plano $\mathbb{R}^2$. Compruébese que f tiene derivadas parciales en $(0,0)$, pero que f no es diferenciable en el origen.

6. Considérese la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Compruébese que:

a) f tiene derivadas parciales en todo punto de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

b) las derivadas parciales son continuas en todo punto de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, salvo en $(x,y) = (0,0)$,

c) f es diferenciable en $(0,0)$.

Coordenadas polares, cilíndricas y esféricas

7. Descríbase el lugar de puntos

a) en $\mathbb{R}^2$ dado por la ecuación en coordenadas polares $r = \cos\vartheta$,

b) en $\mathbb{R}^2$ cuyas coordenadas polares cumplen $1 \le r \le 2$ y $0 \le \vartheta \le \pi/4$,

c) en $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas cilíndricas cumplen $r = 2$ y $z = 2$,

d) en $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas cilíndricas cumplen $r \le 2$, $0 \le z \le 2$ y $0 \le \vartheta \le \pi/4$,

e) en $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas esféricas cumplen $\varphi = \pi/4$.

8. Determínese la ecuación en coordenadas polares de la parábola $y = x^2$. Determínese la ecuación en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas de la cesta $z = x^2 + y^2$.

Matrices jacobianas de $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

9. Hállese la matriz de $DF(p)$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $F(x,y) = (y, x, xy, y^2 - x^2)^\intercal$, con $p = (1,2)$.

b) $F(x,y) = (\operatorname{sen}(x+y), \cos(x-y))^\intercal$, con $p = (\pi, -\pi/4)$.

c) $F(x,y,z) = z^2\, e^x\, \cos y$, con $p = (0, \pi/2, -1)$.

d) $F(x) = (e^x\, \operatorname{sen} x, e^x\, \cos x, x^2)^\intercal$, con $p = \pi/6$.

e) $F(x,y,z,t) = (\sqrt{y^2+z^2}, \sqrt{x^2+z^2}, x^2+y^2+z^2-9\,t^2)^\intercal$, con $p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3\right)^\intercal$.

Regla de la cadena

10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función y sean $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por

$$u(x,y) = \frac{x-y}{2}\,, \qquad v(x,y) = \frac{x+y}{2}\,.$$

Considérese la función compuesta $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y)) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Aplíquese la regla de la cadena para calcular el gradiente $\nabla F(x,y)$ en términos de las derivadas parciales $\partial f/\partial u$ y $\partial f/\partial v$ de la función f.

11. Las relaciones $u = f(x,y)$, $x = x(t)$ e $y = y(t)$ definen u como función escalar de la variable t, pongamos $u = u(t)$.

Aplíquese la regla de la cadena para calcular la derivada de u respecto de t cuando

$$f(x,y) = e^{x\,y}\, \cos x\, y^2 \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} x(t) = \cos t\,, \\ y(t) = \operatorname{sen} t\,. \end{cases}$$

12. La sustitución $t = g(x,y)$ convierte $f(t)$ en $F(x,y) = f(g(x,y))$. Calcúlese la matriz de $DF(x,y)$ en el caso particular en que $f(t) = e^{\operatorname{sen} t}$ y $g(x,y) = \cos(x^2+y^2)$.

13. Sean $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ funciones vectoriales definidas mediante

$$F(x,y) = (e^{x+2y}, \operatorname{sen}(2x+y))^\intercal, \qquad G(u,v,w) = (u + 2v^2 + 3v^3, 2v - u^2)^\intercal.$$

a) Hállense las matrices de $DF(x,y)$ y $DG(u,v,w)$.

b) Obténgase la expresión de la función compuesta $H(u,v,w) = F(G(u,v,w))$ y calcúlese la matriz de $DH(1,-1,1)$.

14. Calcúlese la derivada parcial $\partial f/\partial x$ de $f(x,y) = \int_0^{x^2+y^2} e^{-t^2}\, dt$, definida para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

15. Considérese la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\,, & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0\,, & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) ¿Es $f(x,y)$ continua en $(0,0)$?

b) Hállense las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$.

c) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la función dada por $g(t) = (t, 2t)$. Hállese la función compuesta $f \circ g$ y cálculese la derivada $(f \circ g)'(0)$. ¿Se puede calcular esta derivada utilizando la regla de la cadena?

Derivación implícita

16. La ecuación $y^2 + xz + z^2 - e^z - k = 0$ (donde k es un parámetro) define z implícitamente como función de x e y; pongamos que $z = f(x,y)$. Hállese el valor del parámetro k para el cual $f(0,e) = 2$ y calcúlese $\nabla f(0,e)$.

17. La función $z(x,y)$ viene dada implícitamente por la ecuación

$$x^3 + y^3 + z^3 - xy = 0\,.$$

Hállense $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ para el sistema de valores $x = z = 1$, $y = 0$.

18. La función $z = z(x,y)$ está definida implícitamente por la ecuación

$$xy + yz + xz = \frac{7}{4}\, xyz^3\,.$$

Hállense $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ para el sistema de valores $x = 4$, $y = 2$, $z = 1$.

Rectas y planos tangentes.

19. Hállese la ecuación de los planos tangentes a las gráficas de las funciones:

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$, en el punto $(1,1,0)$.

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ en un punto genérico (x_0, y_0, z_0). ¿En qué puntos (x_0, y_0, z_0) es el plano tangente a la gráfica de f paralelo al plano $x = z$?

20. Consideremos el lugar geométrico $\mathcal{S}$ de los puntos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ para los cuales $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Hállese la ecuación del plano tangente a $\mathcal{S}$ en el punto $(1,1,\sqrt{2})$. ¿Existe un plano tangente en el origen? ¿Por qué?

21. Hállese la ecuación de la recta tangente a la curva determinada por la intersección de las dos superficies $x^2 + y^2 + 2\,z^2 = 4$ y $z = e^{x-y}$ en el punto $(1,1,1)$.

22. Hallar una constante c tal que, en todo punto de la intersección de las dos esferas $(x-c)^2 + y^2 + z^2 = 3$ y $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$, los planos tangentes correspondientes sean perpendiculares el uno a otro.