**Análisis matemático II**
**Ingeniería de tecnologías y servicios de telecomunicación**
**Curso 2016-2017**

**Hoja 1. Vectores, gráficas, límites y continuidad**

## Vectores en $\mathbb{R}^n$

**1.** Hallar todos los valores de $a$ y $b$ para los que los vectores $\vec{u} = (4, b, 1)$ e $\vec{v} = (a, b, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ sean ortogonales.

**2.** Demostrar que para cualesquiera $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ se cumple

a) $2\,\|\,\vec{u}\|^2 + 2\,\|\,\vec{v}\|^2 = \|\,\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\,\vec{u} - \vec{v}\|^2$ (ley del paralelogramo).

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si y sólo si $\|\,\vec{u} + \vec{v}\| = \|\,\vec{u} - \vec{v}\|$ .

c) $\big|\,\|\,\vec{u}\| - \|\,\vec{v}\|\,\big| \leq \|\,\vec{u} - \vec{v}\|$.

**3.** Hallar, si existe, el límite de las siguientes sucesiones en $\mathbb{R}^2$:

$$(x_k, y_k) = \Big(\frac{\log k}{k}\,,\, k^{1/k}\Big) \qquad (x_k, y_k) = \Big((-1)^k\,,\, \frac{1}{k}\Big), \qquad (x_k, y_k) = \Big(\cos\frac{k\pi}{2}\,,\, \frac{1}{k}\sin\Big(k^2 + \frac{\pi}{2}\Big)\Big).$$

## Gráficas, curvas y superficies de nivel de $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Usar, por ejemplo, Wolfram Alpha, R, Matlab, ...

**4.** Dibujar las curvas de nivel y las gráficas de las siguientes funciones $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$(a)$ $f(x,y) = x - y + 2$. $(b)$ $f(x,y) = x^2 + 4\,y^2$. $(c)$ $f(x,y) = -x\,y$.

$(d)$ $f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2)$. $(e)$ $f(x,y) = 1 + (x^2 + y^2)$. $(f)$ $f(x,y) = x^3 - x$.

$(g)$ $f(x,y) = \frac{x}{1+y^2}$. $(h)$ $f(x,y) = \text{máx}\,\big\{|x|, |y|\big\}$. $(i)$ $f(x,y) = \operatorname{sen}^2(x^2 + y^2)$.

**5.** Dibujar las superficies de nivel de las siguientes funciones $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$(a)$ $f(x,y,z) = x - y - z + 2$. $(b)$ $f(x,y,z) = x^2 + y^2$.

$(c)$ $f(x,y,z) = y\,(x + z)$. $(d)$ $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$.

$(e)$ $f(x,y,z) = \cos((x^2 + y^2) - z)$. $(f)$ $f(x,y,z) = x - y$.

$(g)$ $f(x,y,z) = \exp(x^2 + y^2 + z^2)$. $(h)$ $f(x,y,z) = -\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - z$.

**6.** Dibujar las superficies determinadas por las ecuaciones siguientes:

$(a)$ $z = 1 - x^2 - y^2$. $(b)$ $z = x^2 - y^2$.

$(c)$ $z = x^2 + y^2 + 1$. $(d)$ $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$.

$(e)$ $x^2 + z^2 = 4$. $(f)$ $z^2 = 1 + x^2 + y^2$.

$(g)$ $z^2 = x^2 + y^2$. $(h)$ $z^2 = x^2 + y^2 - 1$.

**7.** Sea

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

definida para los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x+y \neq 0$. Demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\big) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{y\to 0}\big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big) = -1.$$

¿Existe el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \to (0,0)$?

**8.** Para cada $(x,y) \neq (0,0)$ se define

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Hallar el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \to (0,0)$ a lo largo de la recta $y = \lambda x$.

¿Es posible definir $f(0,0)$ de modo que $f$ sea continua en $(0,0)$?

**9.** ¿Se pueden hacer continuas las funciones

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \qquad \text{y} \qquad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

definiéndolas de forma adecuada en $(0,0)$?

**10.** Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad y \leq 0 \quad \text{ó} \quad y \geq x^2, \\ 1, & \text{si} \quad 0 < y < x^2. \end{cases}$$

Demostrar que $f(x,y) \to 0$ a lo largo de cualquier recta que pase por el origen. Hallar una curva que pase por el origen a lo largo de la cual (salvo en el origen) $f(x,y)$ tiene el valor constante 1. ¿Es $f$ continua en el origen?