EL TEOREMA DE LOS CUATRO COLORES: APPEL Y HAKEN (1976)

Pablo Fernández Gallardo

1. El problema

Algunos de los problemas más famosos de las matemáticas surgen a partir de preguntas muy sencillas. En 1852, de Morgan escribía a Hamilton:

> Un estudiante mío me pidió hoy que le diera una explicación a un hecho que no sabía que lo fuera, y que todavía no lo sé. Afirmaba que si dividimos una figura arbitrariamente y la coloreamos de manera que regiones vecinas lleven colores distintos, entonces cuatro colores son necesarios, pero no más.

Había nacido el *problema de los cuatro colores (P4C)*: probar que, dado un mapa cualquiera en el plano, cuatro colores bastan para colorearlo de manera que países vecinos lleven colores distintos.

Es un problema de enunciado sencillo y apariencia inofensiva, pero que esconde numerosas sutilezas.

76

2. Su (agitada) historia

El estudiante al que se refería de Morgan era Frederick Guthrie (que acabaría dedicándose a la física y a la poesía), que le transmitía una observación hecha por su hermano menor, Francis (luego abogado, matemático y botanista), mientras se afanaba en colorear un mapa de Inglaterra. De Morgan, vivamente interesado por el problema, escribió inmediatamente a Hamilton pidiéndole su opinión. Preocupado por si la cuestión resultaba ser trivial, se justificaba (con cierta rotundidad):

> Cuanto más pienso sobre ello, más evidente me parece. Pero si usted me muestra algún caso sencillo que me haga quedar como un animal estúpido...

Son las desventajas de plantear preguntas tan aparentemente sencillas. La cuestión no pareció interesar especialmente a Hamilton, que le contestaría

> ... no es probable que pueda atender a su problema de los cuatro colores en un futuro próximo...

En 1879, Kempe (otro abogado y matemático) publicó una demostración del teorema de los cuatro colores (T4C), que parecía dar fin al joven problema. Hasta que Heawood, en 1890, mostró que la prueba de Kempe no era correcta (aunque sí bastaba para probar que cinco colores son suficientes).

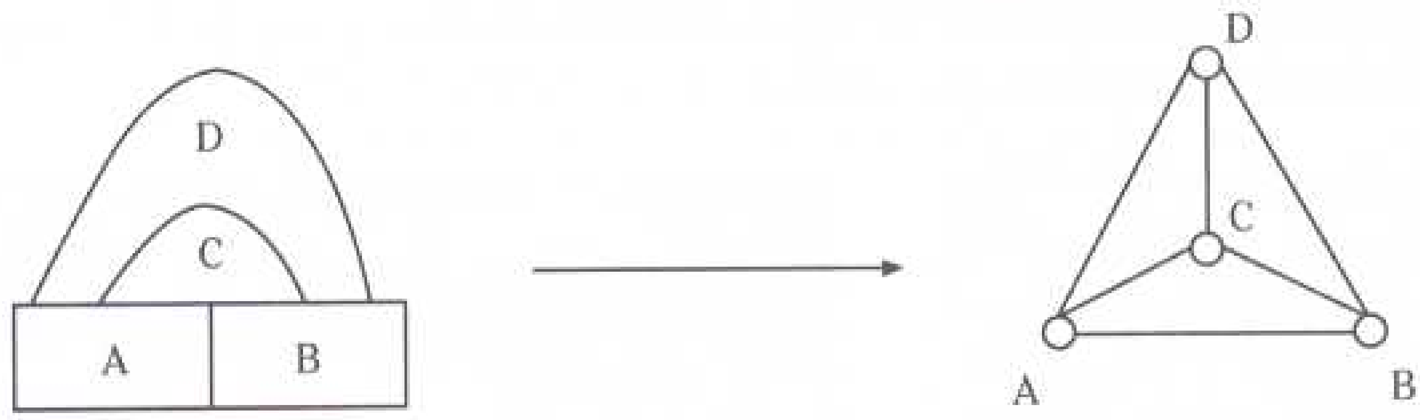
No fue hasta 1976 cuando Appel y Haken (con la ayuda de Koch) publicaron, finalmente, la prueba completa del teorema.

3. La traducción adecuada

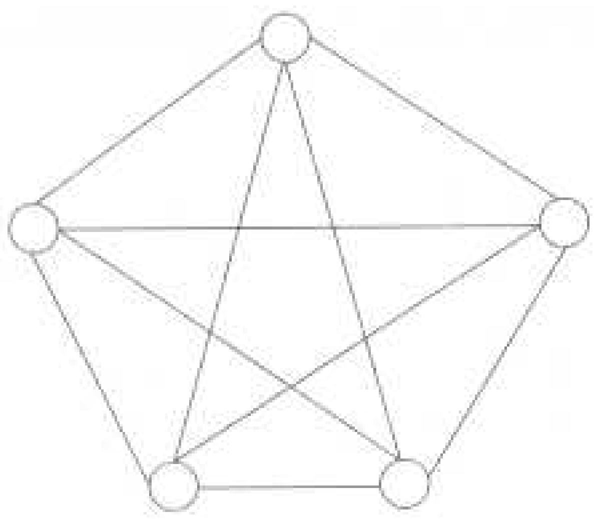
Quizás la manera más ilustrativa de describir el problema sea utilizando el lenguaje de los grafos. Un *grafo* G es un conjunto finito de vértices, *V(G),* y un conjunto de aristas *A(G)* (ciertos pares de elementos distintos de *V(G)*). Y colorear (los vértices de) un grafo *G* con *n* colores consiste en asignar un color a cada vértice de manera que vértices que sean extremos de una arista reciban colores distintos.

Un grafo plano es aquél que se puede dibujar en el plano de manera que los vértices sean puntos del plano y las aristas sean curvas continuas que no se cortan (salvo, quizás, en sus extremos).

Dado un mapa, elegimos en cada región un punto interior y unimos los puntos correspondientes a países con frontera común; obtenemos así un grafo plano. Por ejemplo, la traducción de uno de los mapas que describía de Morgan en su carta es:



Este ejemplo muestra que cuatro colores son necesarios. Alguien podría pensar entonces que el grafo,



es un contraejemplo para el T4C, porque colorearlo requiere 5. Pero este grafo no es plano, así que no hay un mapa en el plano cuyas relaciones de vecindad vengan descritas por sus aristas.

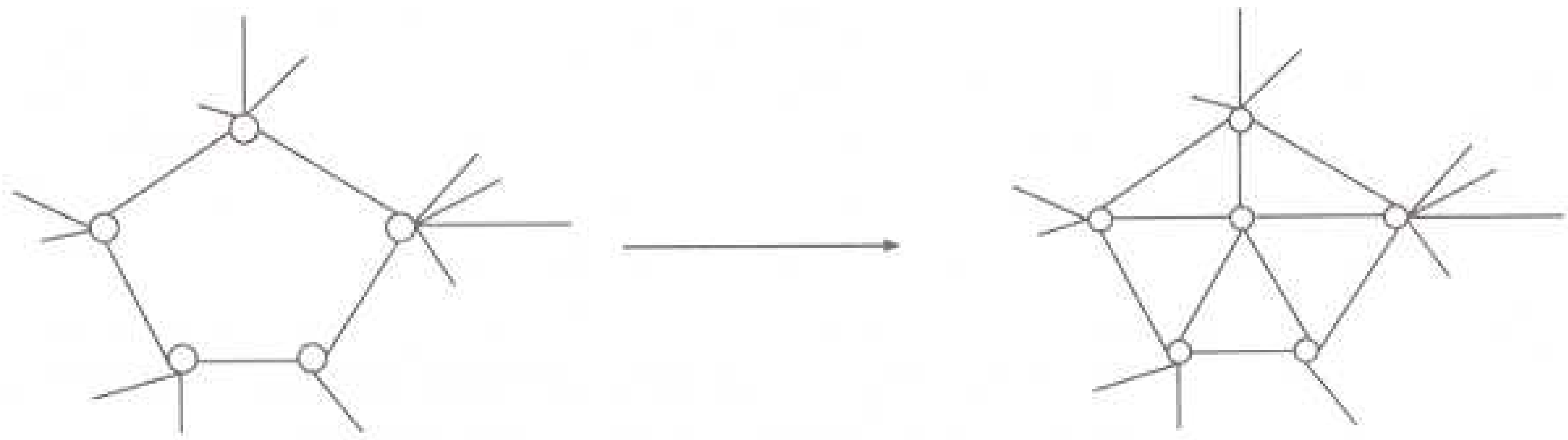
5. ¿Cómo abordarlo?

Evidentemente, el número de posibles mapas (o grafos planos) es infinito. La manera de abordar el problema es la siguiente: si existen contraejemplos al T4C, al menos habrá uno que sea minimal, lo más pequeño (en términos de número de vértices) posible. La estrategia es, entonces (resumiendo un argumento muy complejo):

Se demuestra que en un tal contraejemplo ha de aparecer, al menos, una de las "configuraciones" de un cierto conjunto. Esto es lo que se llama *inevitabilidad.*

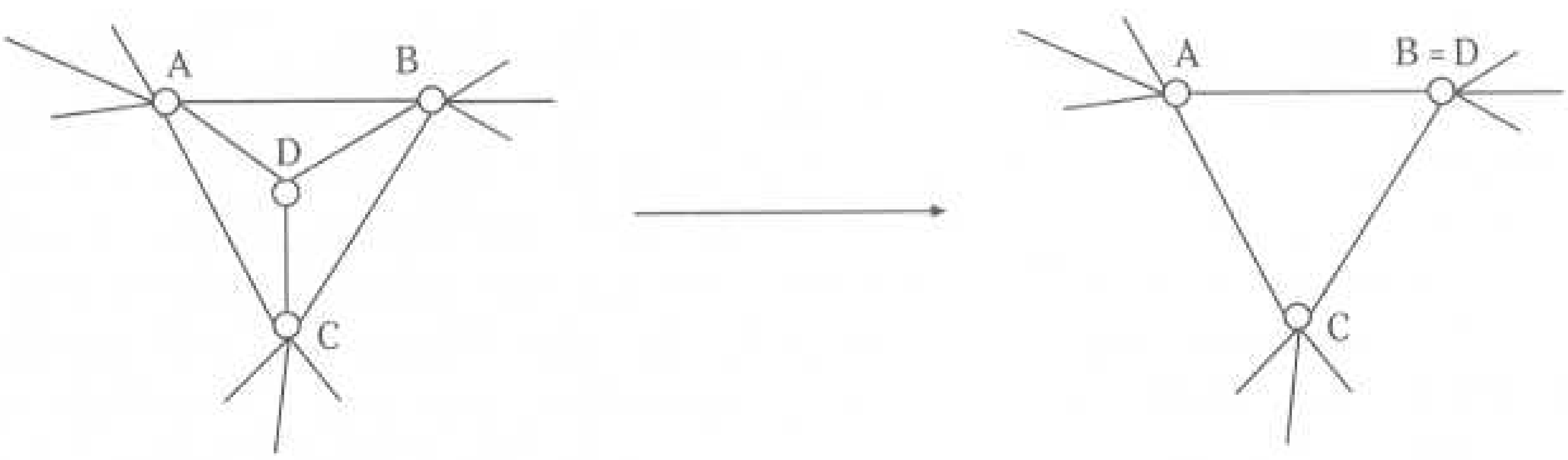
Se comprueba que cada una de esas configuraciones se puede colorear con 4 colores (es la parte de *reducibilidad*).

Sin entrar en los detalles técnicos, podemos entender algunos de los ingredientes de la prueba. En un grafo plano, las regiones que engloban las aristas se denominan *caras*. La primera observación es que basta probar el T4C para el caso en el que todas las caras sean triángulos: si hay caras que no lo sean, las podemos triangular consiguiendo un grafo más "difícil" de colorear.



En todo grafo plano se verifica una relación entre el número de caras, vértices y aristas: la bien conocida fórmula *de Euler*, $V - A + C = 2$. En una triangulación, cada arista pertenece a dos caras, y cada cara tiene tres aristas, así que $2A = 3C$. Combinando estas identidades, se deduce que ha de haber al menos un vértice con no más de 5 vecinos. Este sería un primer ejemplo de conjunto de configuraciones inevitables.

Lo siguiente sería probar que todas estas configuraciones son reducibles. Imaginemos un contraejemplo minimal para el T4C con un vértice con tres vecinos: si unimos este vértice a alguno de ellos, obtenemos un grafo más pequeño,



que, por tanto, se podrá colorear con 4 colores. Pero en los vértices A, $B = D$ y C sólo se usan 3 colores; esta coloración (más asignar el color libre al vértice D) sirve para el grafo original. Para un vértice con 4 vecinos hay que refinar el argumento, para *liberar* un color en los 4 vecinos: aún se puede hacer, como probó Kempe. Pero la misma idea no sirve para el caso de un vértice con 5 vecinos.

6. ¿Y es realmente interesante?

Limitar el número de colores utilizados al confeccionar un mapa no parece especialmente relevante. Pero, aparte de razones psicológicas (una pregunta tan sencilla deviene en un magnífico desafío matemático), existen otras que justifican el interés del P4C: como en otros muchos problemas matemáticos clásicos, los métodos desarrollados para resolverlo han resultado ser, al menos, tan interesantes como el problema original.

El número mínimo de colores necesario para colorear un grafo G es su *número cromático*, $\chi(G)$; y lo que afirma el T4C es que $\chi(G) \leq 4$ para cualquier grafo G plano. Pero calcular $\chi(G)$ es un problema de *optimización:* buscamos la *mejor* manera de colorear.

Hay multitud de problemas interesantes que pueden ser descritos con el lenguaje de los grafos y los colores. Pensemos en la confección de horarios: tenemos una serie de asignaturas a las que queremos asignar horarios para ser impartidas. Lo queremos hacer de manera que asignaturas que compartan alumnos no sean programadas a la misma hora. Podemos describir la información relevante con un grafo: las asignaturas son los vértices y las *incompatibilidades*, las aristas. Las distintas horas de que disponemos son los colores, y confeccionar un horario no es sino dar una coloración del grafo. Optimizar este proceso (colorear el grafo con el mínimo número de colores posible) debería ser nuestro objetivo

7. ¿Está probado o no el T4C?

La demostración de Appel y Haken resultó polémica desde el primer momento. Especialmente, porque requería un uso abundante del ordenador para verificar la inevitabilidad (y la reducibilidad) del conjunto de 1476 configuraciones a las que reducían el problema. En realidad, una objeción todavía mayor que se podía plantear a esta demostración es que la parte de matemáticas *tradicionales* tampoco era fácil de verificar. En 1996 se propuso una prueba alternativa (ver [RSST]) que resulta más *legible*. Pero, a pesar de reducir a 633 el número de configuraciones, sigue requiriendo el uso del ordenador para su comprobación.

76

En 1998, Hales anunció la prueba de otro problema clásico, el *problema de Kepler:* ¿cuál es la manera más eficiente de apilar esferas en el espacio? La conjetura afirmaba que la mejor forma de hacerlo es la que cualquiera seguiría al apilar naranjas en una caja. Este problema tiene bastantes similitudes con el P4C: ambos tienen planteamientos sencillos, han conocido muchos intentos infructuosos por resolverlos, han dado lugar a técnicas matemáticas interesantes... y la demostración final requiere el uso del ordenador para verificar un conjunto finito de configuraciones.

Y la pregunta, por supuesto, es si una demostración de esas características es aceptable. Tanto en el T4C como en el problema de Kepler, cualquiera puede verificar la corrección del programa que realiza los cálculos (o diseñar el suyo propio). Y estos programas se han compilado y ejecutado en distintos ordenadores y plataformas.

Aun así, siempre queda la duda, ¿no? Pero dado el espectacular papel que empieza a desempeñar el ordenador en estos menesteres... quizás es hora de cambiar nuestra concepción tradicional de demostración matemática.

Bibliografía

[AH] Appel y Haken: "Every planar map is four colourable". *Contemporary Mathematics*, vol. 98, Amer. Math. Soc. (1994). Se pueden encontrar las demostraciones originales de 1976.

[RSST] Robertson, Sanders, Seymour y Thomas: "A new proof of the four colour theorem". *Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, vol. 2 (1996), 17-25 (electronic). Aquí aparece una prueba alternativa del teorema.

[T] Thomas: "An Update on the Four-Colour Theorem". *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 45, no. 7 (1998). Es una excelente referencia (que incluye sorprendentes conexiones del T4C).