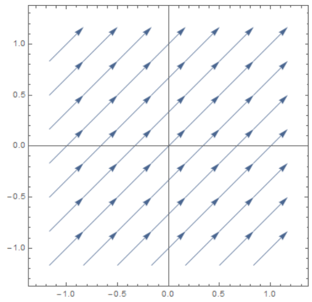
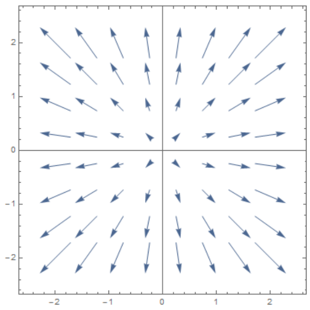
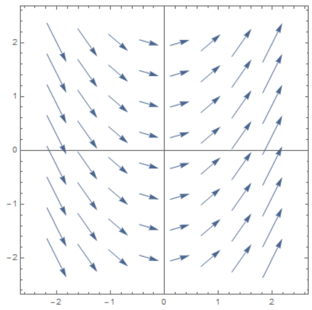
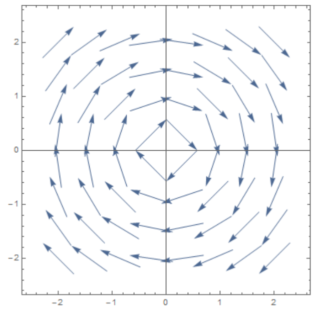
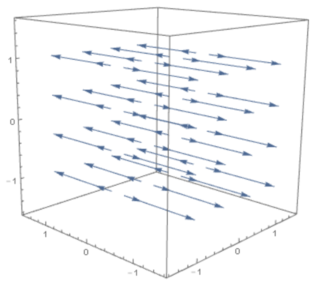
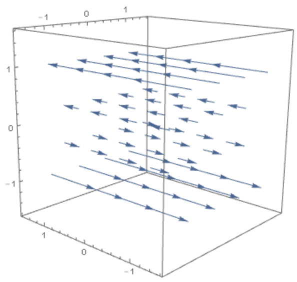
Matemáticas I Grado en Ingeniería Química

Soluciones de los ejercicios de la Hoja 10 Curso 2017/2018

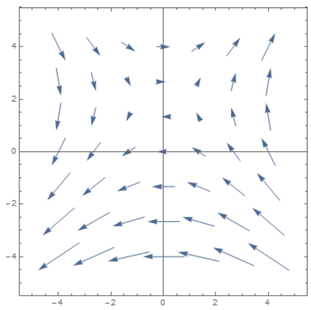
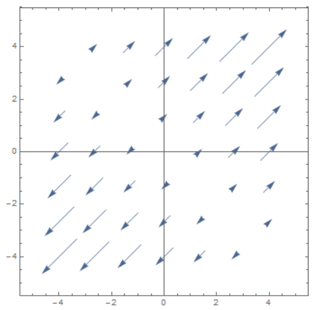
Si encuentras algún posible error o errata, avísame por favor. Gracias.

1)

(a)  (b)  (c) 

(d)  (e)  (f) 

2)
(a) $\nabla f(x,y) = (y-2, x)$ (b) $\nabla f(x,y) = (\frac{1}{2}(x+y), \frac{1}{2}(x+y))$

3) (a) Rectas de pendiente 1. (b) El origen, y semirrectas que parten del origen.
(c) Parábolas con eje en el eje y. (d) El origen y circunferencias centradas en el origen.
(e) Los puntos del plano $y = 0$ y semirrectas que parten de dicho plano y son perpendiculares a él.
(f) Los puntos del plano $z = 0$ y rectas paralelas al eje y no contenidas en el plano $z = 0$.

4) (a) $\operatorname{div} \overrightarrow{F}(x,y,z) = x+y+z$, $\operatorname{rot} \overrightarrow{F}(x,y,z) = (-y,-z,-x)$.
(b) $\operatorname{div} \overrightarrow{F}(x,y,z) = 2$, $\operatorname{rot} \overrightarrow{F}(x,y,z) = (-3,-3,1)$.
(c) $\operatorname{div} \overrightarrow{F}(x,y,z) = yz$, $\operatorname{rot} \overrightarrow{F}(x,y,z) = (-x^2, 3xy, -xz)$.
(d) $\operatorname{div} \overrightarrow{F}(x,y,z) = e^y x + e^z y$, $\operatorname{rot} \overrightarrow{F}(x,y,z) = (e^z, 0, e^y)$.

5) (a) No, sólo definimos rotacional de campos vectoriales.
(b) Sí, el gradiente de un campo escalar tiene sentido y da un campo vectorial.
(c) Sí, la divergencia de un campo vectorial da un campo escalar.
(d) Sí, el gradiente de un campo escalar es un campo vectorial, por lo que tiene sentido su rotacional. El resultado es un campo vectorial.
(e) No, no tiene sentido el gradiente de un campo vectorial.
(f) Sí, la divergencia de un campo vectorial es un campo escalar, por lo que se le puede calcular su gradiente. El resultado es un campo vectorial.

(g) Sí, el gradiente de un campo escalar es un campo vectorial, por lo que se le puede calcular su divergencia. El resultado es un campo escalar. En este caso, es el llamado *laplaciano* de f (véase ejercicio 6-d).
(h) No, no tiene sentido la divergencia de un campo escalar.
(i) Sí, el rotacional de un campo vectorial es un campo vectorial, por lo que de nuevo le podemos calcular su rotacional que, de nuevo, será un campo vectorial.
(j) No, pues no tiene sentido el gradiente de un campo vectorial, aunque $\mathrm{rot}\overrightarrow{F}$ sí tenga sentido.

6) (a) Resuelto, por ejemplo, en el vídeo `https://www.youtube.com/watch?v=TMKTw2k7GZ4`.
Obs.: en inglés, el rotacional se dice *curl*.
(b) Explicado, por ejemplo, en `http://mathinsight.org/curl_gradient_zero`.
(c) $\mathrm{div}(f\overrightarrow{F}) = D_1(fF_1)+D_2(fF_2)+D_3(fF_3) = D_1(f)F_1+fD_1(F_1)+D_2(f)F_2+fD_2(F_2)+D_3(f)F_3+fD_3(F_3) = (fD_1(F_1)+fD_2(F_2)+fD_3(F_3))+(D_1(f)F_1+D_2(f)F_2+D_3(f)F_3) = f\mathrm{div}\overrightarrow{F}+\nabla f\cdot\overrightarrow{F}$.
(d) $\mathrm{div}\nabla f = \mathrm{div}(D_1f, D_2f, D_3f) = D_1(D_1f)+D_2(D_2f)+D_3(D_3f) = D_{11}f+D_{22}f+D_{33}f = \Delta f$.

7) (a) Usando que c es una constante y que las derivadas espaciales conmutan con la derivada temporal, tenemos que $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\overrightarrow{E}) = \mathrm{rot}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial(\mathrm{rot}\overrightarrow{B})}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2}$.
(b) Totalmente análogo al apartado (a).

8) (a) $\frac{1}{12}(17\sqrt{17}-1)$, (b) $\frac{1}{48}(125-13\sqrt{13})$, (c) $\frac{8192}{5}$.

9) (a) $-\frac{59}{105}$, (b) 64, (c) $\frac{6}{5}-\cos 1-\mathrm{sen}\, 1$.

10) $\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{30}}$.
Obs.: primero de nada hay que encontrar la parametrización de la trayectoria, que en este caso es la curva parametrizada $\alpha(t) = (2,0,0)+t((2,1,5)-(2,0,0)) = (2,t,5t)$, con $t\in[0,1]$ (usa la ecuación paramétrica de una recta que pasa por dos puntos).

11) $\frac{1}{2}(15+\cos 1-\cos 4)$.
Obs.: la trayectoria viene dada por la curva parametrizada $\alpha(t) = (t,t^2)$, $t\in[-1,2]$.