1) Calcula el límite, si existe, o razona por qué no existe.

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-2)} \left(x^2y - 3y + xy^3\right)$ (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y \operatorname{sen}\left(\dfrac{x+1}{y^6}\right)$.

2) Dibuja las curvas de nivel de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) $f(x,y) = y+2$ (b) $f(x,y) = x^2 + 4\,y^2$ (c) $\sqrt{9-x^2-y^2}$

(d) $f(x,y) = e^x$ (e) $f(x,y) = y - \operatorname{sen} x$ (f) $f(x,y) = -xy$

(g) $f(x,y) = y - x^2$ (h) $f(x,y) = x + y^2$ (i) $f(x,y) = y - \ln x$.

3) Dibuja la gráfica de las funciones (a), (b), (c) y (d) del ejercicio anterior.

4) Dibuja las superficies de nivel de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) $f(x,y,z) = x+1$ (b) $f(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2$

(c) $f(x,y,z) = x - y$ (d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$.

5) Esboza las siguientes curvas en el plano $\mathbb{R}^2$ o en el espacio $\mathbb{R}^3$ según corresponda, indicando con una flecha la dirección de crecimiento del parámetro t. Para cada una de ellas, calcula su vector tangente $\alpha'(t)$ y su vector aceleración $\alpha''(t)$ en cada instante t.

(a) $\alpha(t) = (t, 2t-1)$ (b) $\alpha(t) = (t, t^2+1)$ (c) $\alpha(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t)$

(d) $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ (e) $\alpha(t) = (t\cos t, t\operatorname{sen} t)$ (f) $\alpha(t) = (\cosh t, \operatorname{senh} t)$

(g) $\alpha(t) = (\operatorname{sen} t, 3, \cos t)$ (h) $\alpha(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t, t)$ (i) $\alpha(t) = (0, t, t^3)$.

6) Si nos encontramos en el punto $(-1,-1)$ de una zona montañosa cuyo perfil viene dado por $f(x,y) = x^2e^y + xy$ y miramos en la dirección del eje x positivo, ¿vemos una cuesta hacia arriba o hacia abajo? ¿Y si miramos en la dirección del eje y negativo? De todas las direcciones (360 grados) en las que podemos mirar a nuestro alrededor, ¿en cuál de ellas se divisa una cuesta abajo más pronunciada cerca de nosotros?

7) Halla la matriz jacobiana de f en a (es decir $Df(a)$) en cada uno de los siguientes casos:

(a) $f(x,y) = (y, x, xy, y^2 - x^2)$, $a = (1,2)$.

(b) $f(x,y) = (\operatorname{sen}(x+y), \cos(x-y))$, $a = (\pi, -\pi/4)$.

(c) $f(x,y,z,t) = (\sqrt{y^2+z^2}, \sqrt{x^2+z^2}, x^2+y^2+z^2-9\,t^2)$, $a = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3\right)$.

8) Sea $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ con $u = \frac{x-y}{2}$, $v = \frac{x+y}{2}$. Aplica la regla de la cadena para calcular $\nabla F(x,y)$ en función de las derivadas parciales de f, $\frac{\partial f}{\partial u}$ y $\frac{\partial f}{\partial v}$.

9) Las relaciones $u = f(x,y)$, $x = x(t)$ e $y = y(t)$ definen u como función escalar de t, digamos $u = u(t)$. Aplica la regla de la cadena para calcular la derivada de u respecto de t cuando

$$f(x,y) = e^{x\,y}\cos x\,y^2, \qquad x(t) = \cos t, \qquad y(t) = \operatorname{sen} t.$$

10) La sustitución $t = g(x,y)$ convierte $F(t)$ en $f(x,y) = F(g(x,y))$. Calcula la matriz de $Df(x,y)$ en el caso particular en que $F(t) = e^{\operatorname{sen} t}$ y $g(x,y) = \cos(x^2+y^2)$.

11) Halla y clasifica los puntos críticos de las siguientes funciones.

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5$,
(b) $f(x,y) = xy^2 + 2x^2y - 6xy$,
(c) $f(x,y) = 3y^2 + 4x^2 - 4xy + 2y + 4x$,
(d) $f(x,y) = \frac{3}{5}x^5 - 3xy^2 + 3y$,
(e) $f(x,y) = 3 - x^2 - y^2 - x^4y^2$,
(f) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$,
(g) $f(x,y) = e^{xy} + x^2$,
(h) $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

12) Una empresa de agricultura ecológica produce 12 toneladas mensuales de producto, de las que reserva una cantidad x para venta de productos frescos, una cantidad y para congelados y el resto para precocinados. Si la ganancia mensual neta de la empresa está dada, en miles de euros, por la expresión $30 + xy + xz + yz + x - z$, se pide:

a) Determina las cantidades x, y, z para que la ganancia mensual neta sea lo mayor posible.
b) ¿Cuál es la ganancia mensual neta más grande posible que tendrá la empresa?

13) Para guardar muestras se necesitan cajas de cartón, como las de zapatos, pero con la tapa de plástico. Cada cm^2 de cartón cuesta un céntimo de euro y cada cm^2 de plástico cuesta tres céntimos. Las cajas deben tener un volumen de 2000 cm^3. ¿Qué dimensiones tiene la caja más barata posible?

14) Se desea construir una balsa para lodos con forma de paralelepípedo rectángulo y con un volumen de 1 m^3. ¿Qué dimensiones debe tener para que la suma de la superficie lateral más la superficie del fondo (que son las que van recubiertas) sea mínima?

15) ¿Cómo se debe dividir un segmento de longitud L en tres partes de modo que el producto de sus longitudes sea máximo?

16) Hallar todos los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$. Averiguar si existen el máximo y el mínimo de esta función.

17) Comprobar que la función $f(x,y) = e^x \cos y$ no tiene puntos críticos en $\mathbb{R}^2$.

18) Comprobar que la función $f(x,y) = x^2y^2$ tiene un mínimo absoluto en todos los puntos de los ejes x e y pero que, sin embargo, el criterio de la matriz Hessiana para los extremos locales es inútil porque no nos proporciona ninguna información en este caso.

19) Calcula los puntos de mínimo y máximo de f en la región D indicada.

(a) $f(x,y) = 1 + 4x - 5y$, siendo D la región triangular cerrada con vértices $(0,0)$, $(2,0)$ y $(0,3)$.
(b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$, con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.
(c) $f(x,y) = 1 + xy - x - y$, con D la región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4$.
(d) $f(x,y) = xy^2$, con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 3\}$.

20) Halla los extremos de f sujetos a las restricciones indicadas:

(a) $f(x,y) = y^2 - 4x$, con la restricción $x^2 + y^2 = 9$,
(b) $f(x,y) = x^2 - y^2$, con la restricción $x^2 + y^2 = 1$,
(c) $f(x,y,z) = xyz$, con la restricción $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$,
(d) $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4$, con la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

21) Calcula el mínimo y el máximo de la función $f(x,y) = 6x^2 + 4xy + 3y^2$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Encuentra los puntos donde se alcanzan.

22) Encuentra el valor máximo de la función $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ en la curva intersección del plano $x - y + z = 1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

23) Halla todos los puntos críticos de la función $f(x,y) = x + 2y$ sobre la curva $x^4 + y^4 = 1$. Demuestra que existen el mínimo y el máximo de esta función sobre esta curva. Calcula el mínimo, el máximo y los puntos donde se alcanzan.