1) Se considera la función $f(x) = x^3 - 3\,x^2 - 9\,x + 1$ en el intervalo cerrado $[-2, 6]$. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo que alcanza f en dicho intervalo? Responde a la misma pregunta para las funciones $g(x) = x^4 + 3x^2$ y $h(x) = e^x$.

2) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $y = \ln \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, (b) $y = \operatorname{sen}(\ln x)$, (c) $y = \ln(x^2 \ln^3 x)$,
(d) $y = 2^x$ (Ayuda: usar $a^b = e^{b \ln a}$), (e) $y = x^x$, (f) $y = \operatorname{sen}^4 x - 3x^4 \tan^2 x$,
(g) $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, (h) $y = \frac{3x+\sqrt[3]{7x^2+1}}{e^{x^2}}$, (i) $y = e^{\sqrt{\ln x}}$.

3) Demuestra que la ecuación $6\,x^5 + 13\,x + 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

4) Discute la existencia de los límites siguientes y calcula su valor cuando sea posible:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^2-3}{2x-2\sqrt{3}}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \big(2\operatorname{sen}^2 x - 1\big)\arctan(2x)$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{e^x+x}{e^x-x}}$, (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan^3 x}{x^4+x^3}$, (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)^2\operatorname{sen}^2 x}{\tan^3 x}$,

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x + x^2}{2\,x^2}$, (h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$, (i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x$,

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (e^x+2x)^{3/x}$, (k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$, (l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x}$,

(m) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan 5x}{\tan 3x}$, (n) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$, (o) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+2^x}{e^x-2^x}$.

5) Una función muy utilizada para representar el tamaño de un cultivo de microbios a lo largo del tiempo es la llamada *función logística*:

$$y = f(t) = \frac{k}{1+ae^{-bt}}, \qquad \text{para } t > 0 \qquad (a,\ k,\ \text{y } b \text{ son constantes positivas}).$$

a) Representa la función $y = \frac{100}{1+2e^{-t}}$, para $0 < t < 5$.
b) Halla el instante en que la velocidad de crecimiento es máxima.
c) ¿A qué tamaño tiende la población?

6) En una reacción bioquímica controlada por una enzima, la velocidad v de conversión de una sustancia (para una cantidad fija de enzima) viene dada por

$$v = f(s) = \frac{as}{k+s}, \qquad \text{para } s > 0, \qquad a \text{ y } k \text{ son constantes positivas},$$

donde s es la concentración del sustrato que está siendo convertido. Esta función se conoce con el nombre de *función de Michaelis-Menten*.
a) Representa gráficamente la función en el intervalo $0 < s < 3k$.
b) Halla el límite cuando $s \to \infty$ de la velocidad de conversión y calcula cuál debe ser la concentración del sustrato para que la velocidad de conversión sea la mitad de este valor.

7) Calcula el polinomio de Taylor de órdenes 1, 2 y 3 de la función $f(x) = \ln(1+x)$ respecto del punto $x_0 = 0$. Evalúa dichos polinomios en $x = 0.01$, y compara con $f(0.01)$.

8) ¿Cuál es el polinomio de Taylor de orden n de la función $f(x) = \sin(x)$ respecto del punto $x_0 = 0$? ¿Y respecto de $x_0 = \pi/2$?

9) Halla el valor de a y b para que los coeficientes de los términos de grado 1 y 3 del polinomio de Taylor de orden 3 de la función $f(x) = x\cos(ax) - be^x$ se anulen.

10) Estudia y representa gráficamente las funciones:

(a) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$, (b) $f(x) = |\ln x|$, (c) $f(x) = \ln|x|$, (d) $f(x) = |\cos x|$,

(e) $f(x) = \begin{cases} 5 - x^2, & \text{si } x \leq 2 \\ x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$, $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$, $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } |x-1| \leq 1 \\ 1 & \text{si } |x-1| > 1. \end{cases}$

11) La concentración de oxígeno en un estanque contaminado con un residuo orgánico viene dada por la función:

$$y = f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}, \text{ para } 0 \leq t < \infty, \quad (t \text{ representa el tiempo en semanas}).$$

a) Haz un esbozo suficientemente detallado de la gráfica de f.
b) Halla los instantes en los que se alcanzan las concentraciones máxima y mínima.
c) ¿En qué instante la velocidad de crecimiento de la concentración de oxígeno es máxima?

12) Sea f una función definida en $\mathbb{R}$ tal que f' existe en todo punto y es continua. Se conoce que

$$f(-1) = 0, \quad f(0) = 2, \quad \text{y } f(1) = 0.$$

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones se verifica(n) siempre?

(i) Existe un $a \in [-1, 1]$ tal que $f'(a) = -2$;
(ii) Existe un $b \in [-1, 1]$ tal que $f'(b) = -1$;
(iii) Existe un $c \in [-1, 1]$ tal que $f'(c) = -3$.

13) Las granjas de patos contaminan el agua con nitrógeno en forma de ácido úrico. Se hace un seguimiento del nivel de ácido úrico y de un río, cerca de una de estas granjas, a lo largo del tiempo (en meses). Este nivel de ácido úrico se puede describir, durante un buen período de tiempo, mediante

$$y = f(t) = 4\ln(t+1) - 5\ln(t+2) + 10 \qquad \text{para } t \geq 0.$$

a) ¿Cuál es el nivel de ácido úrico al comenzar el seguimiento?
b) El nivel de ácido úrico, ¿crece o decrece en los primeros meses? ¿Cuándo alcanza su nivel máximo o mínimo? ¿Cuál es este nivel máximo o mínimo?
c) Realiza una representación aproximada y razonada de la evolución del nivel de ácido úrico durante el período $[0, 24]$ (los dos primeros años).

14) Dos especies de paramecios (*paramecium aurelia* y *paramecium caudata*) compiten en un nicho ecológico por los mismos recursos. El número N de individuos en un mililitro de *paramecium caudata* en este ecosistema viene dado aproximadamente por la función:

$$N(t) = 50(6t+1)e^{-2t} \qquad (t = \text{tiempo en días}).$$

a) ¿Cuál es el número de individuos de *paramecium caudata* al empezar el estudio?
b) Calcula el número máximo de individuos e indica justificadamente cuándo se alcanza.
c) ¿Qué ocurre con la población a largo plazo?

15) Una fábrica de bollería industrial determina, tras un estudio, que si y es el nivel de glucosa en sangre de un adulto normal (medido en miligramos por centímetro cúbico), la función $y = f(t) = 7 + 4te^{-\sqrt{t}}$ describe aproximadamente la evolución de dicho nivel de glucosa para tiempo $t > 0$ (medido en cuartos de hora) después de la ingesta de un bollo en el instante $t = 0$.
a) ¿Cuál era el nivel de glucosa inicial?
b) ¿En qué instante el nivel de glucosa en sangre alcanzará un máximo?
c) ¿Qué valor máximo de concentración de glucosa llegará a alcanzarse?
d) Una empresa farmacéutica está interesada en conocer también en qué instante el ritmo al que el organismo hace bajar el nivel de glucosa de la sangre es lo más veloz posible. ¿Cuál es este instante?
e) ¿Qué ocurre, según este modelo, con la concentración de glucosa en sangre si se deja pasar una cantidad muy grande de tiempo?
f) Dibuja del modo más preciso que te sea posible la gráfica de la función $y = f(t) = 7 + 4te^{-\sqrt{t}}$, definida en todo $\mathbb{R}$.