1) Esboza la representación gráfica de los siguientes campos vectoriales:

(a) $\overrightarrow{F}(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, (b) $\overrightarrow{F}(x,y) = (x,y)$, (c) $\overrightarrow{F}(x,y) = (1,x)$,

(d) $\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, (e) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (0,y,0)$, (f) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (0,z,0)$.

2) Calcula y esboza gráficamente el campo gradiente ∇f para cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = xy - 2x$, (b) $f(x,y) = \frac{1}{4}(x+y)^2$.

3) Las *líneas de flujo* de un campo vectorial son las trayectorias que podría seguir una partícula cuyo vector velocidad coincide en todo instante con el campo vectorial dado. Es decir, una curva parametrizada $\alpha(t)$ es línea de flujo de un campo vectorial $\overrightarrow{F}$ si $\alpha'(t) = \overrightarrow{F}(\alpha(t))$, para todo t. Deduce cómo es la representación gráfica de las líneas de flujo de los campos vectoriales del ejercicio **1**.

4) Calcula la divergencia y el rotacional de cada uno de los siguientes campos vectoriales:

(a) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (xy, yz, xz)$, (b) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x-2z, x+y+z, x-2y)$,
(c) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (xyz, 0, -x^2y)$, (d) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (0, xe^y, ye^z)$.

5) Sea f un campo escalar y $\overrightarrow{F}$ un campo vectorial. Determina si cada una de las siguientes expresiones tiene sentido o no. Si no, explica por qué. Si sí, di si el resultado es un campo escalar o vectorial.

(a) $\operatorname{rot} f$, (b) ∇f, (c) $\operatorname{div} \overrightarrow{F}$, (d) $\operatorname{rot} \nabla f$, (e) $\nabla \overrightarrow{F}$,

(f) $\nabla(\operatorname{div} \overrightarrow{F})$ (g) $\operatorname{div}(\nabla f)$, (h) $\nabla(\operatorname{div} f)$, (i) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \overrightarrow{F})$, (j) $(\operatorname{rot} \overrightarrow{F}) \times \nabla \overrightarrow{F}$.

6) Sea f un campo escalar y $\overrightarrow{F}$ un campo vectorial. Demuestra las siguientes fórmulas:

(a) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \overrightarrow{F}) = 0$,
(b) $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$,
(c) $\operatorname{div}(f\overrightarrow{F}) = f\operatorname{div}(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{F} \cdot \nabla f$,
(d) $\operatorname{div} \nabla f = \Delta f$, donde $\Delta f = D_{11}f + D_{22}f + D_{33}f$ es el llamado *laplaciano* de f.

7) Las ecuaciones de Maxwell son cuatro ecuaciones que describen por completo los fenómenos electromagnéticos, describiendo como varían el campo eléctrico $\overrightarrow{E}$ y el campo magnético $\overrightarrow{B}$ con el tiempo. En el caso de estar considerando una región sin presencia de carga ni corriente, dichas ecuaciones toman la siguiente forma:

$$\operatorname{div} \overrightarrow{E} = 0, \qquad \operatorname{div} \overrightarrow{B} = 0, \qquad \operatorname{rot} \overrightarrow{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \overrightarrow{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t},$$

donde c es la velocidad de la luz. Usa estas ecuaciones para probar:

$$\text{(a) } \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \overrightarrow{E}) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}, \qquad \text{(b) } \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \overrightarrow{B}) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2}.$$

8) Calcula la integral de línea $\int_\alpha f(x,y)\,ds$ del campo escalar f a lo largo de la curva α:

(a) $f(x,y) = y$, siendo $\alpha(t) = (t^2, t)$, $t \in [0,2]$.
(b) $f(x,y) = y/x$, siendo $\alpha(t) = (t^4, t^3)$, $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
(c) $f(x,y) = xy^4$, siendo α es la mitad derecha de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$.

9) Calcula la integral de línea $\int_\alpha \overrightarrow{F} \cdot ds$ del campo vectorial $\overrightarrow{F}$ a lo largo de la curva α:
(a) $\overrightarrow{F}(x,y) = (x^2y^3, -y\sqrt{x})$, $\alpha(t) = (t^2, -t^3)$, $t \in [0,1]$.
(b) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$, $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0,2]$.
(c) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (\operatorname{sen} x, \cos y, xz)$, $\alpha(t) = (t^3, -t^2, t)$, $t \in [0,1]$.

10) La fuerza que ejerce una carga eléctrica situada en el origen de $\mathbb{R}^3$ sobre una partícula cargada situada en el punto (x,y,z) es $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \dfrac{K}{r^3}(x,y,z)$, siendo $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y K una constante. Halla el trabajo realizado cuando la partícula se mueve a lo largo de una línea recta entre los puntos $(2,0,0)$ y $(2,1,5)$.

11) Calcula el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\overrightarrow{F}(x,y) = (x \operatorname{sen} y, y)$ sobre una partícula que se mueve a lo largo de la parábola $y = x^2$ desde $(-1,1)$ hasta $(2,4)$.