

Cálculo I (Grado en Ingeniería Informática)

Problemas resueltos, 2012-13, 2013-14 y 2014-15 (primera parte)

Preparado por los profesores de la asignatura: Pablo Fernández, Dragan Vukotić, Luis Guijarro (coordinadores), Kazaros Kazarian y José Luis Torrea

1. Demuestra que los números $3 + \sqrt{7}$ y $\sqrt{3 + \sqrt{7}}$ son irracionales.

SOLUCIÓN. En primer lugar, el número $\sqrt{7}$ es irracional. La prueba es completamente análoga a la vista en clase para $\sqrt{2}$; de hecho, se prueba de la misma manera que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$ para cualquier número primo p . Si fuese $3 + \sqrt{7} = q \in \mathbb{Q}$, tendríamos también que $\sqrt{7} = q - 3 \in \mathbb{Q}$ (ya que la diferencia de dos números racionales también es racional), lo cual es una contradicción. Por tanto, $3 + \sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$.

Para ver que $\sqrt{3 + \sqrt{7}}$ es irracional, supongamos otra vez lo contrario: $\sqrt{3 + \sqrt{7}} = r \in \mathbb{Q}$. Entonces $3 + \sqrt{7} = r^2 \in \mathbb{Q}$, lo cual contradice lo dicho anteriormente. Luego $\sqrt{3 + \sqrt{7}} \notin \mathbb{Q}$.

2. Hallar todos los valores del parámetro a para los que la ecuación cuadrática (en x)

$$x^2 + (2a + 1)x - a^2 + 3a = 0$$

tiene exactamente una solución real.

SOLUCIÓN. Para que la ecuación dada tenga solución real única en x , es necesario y suficiente que su discriminante sea cero:

$$\Delta = (2a + 1)^2 - 4(-a^2 + 3a) = 8a^2 - 8a + 1 = 0.$$

Esta nueva ecuación cuadrática (esta vez en a) tiene como soluciones los valores

$$\frac{8 \pm \sqrt{32}}{16} = \frac{8 \pm \sqrt{16 \cdot 2}}{16} = \frac{8 \pm 4\sqrt{2}}{16} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Por tanto, existen exactamente dos valores del parámetro a que se mencionan en el enunciado:

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

3. Halle razonadamente todas las soluciones de la ecuación

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0.$$

SOLUCIÓN. Se trata de una *ecuación bicuadrática* ya que, después del cambio de variable $x^2 = t$, ésta se convierte en la siguiente ecuación cuadrática:

$$t^2 - 7t + 12 = 0.$$

Resolviendo, obtenemos que las soluciones para t son $t = 3$ y $t = 4$. Finalmente, despejamos la x de $x^2 = t$, obteniendo cuatro soluciones: $x = \pm\sqrt{3}$ y $x = \pm 2$. Las comprobaciones directas en la ecuación inicial muestran que los cuatro valores son en efecto soluciones de la ecuación.

4. Demuestra razonadamente que la desigualdad $x^2 + 5x + 8 > 0$ se cumple para todo x real.

SOLUCIÓN. Solución 1. Una forma de hacerlo es completando el cuadrado, según la fórmula estándar:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Tomando $y = 5/2$, observamos que

$$x^2 + 5x + 8 = x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 8 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 8 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4} > 0,$$

ya que el cuadrado de cualquier número real es no negativo.

Solución 2. Otra manera de hacerlo sería observando que la función $f(x) = x^2 + 5x + 8$ es continua y no tiene ceros reales, luego o es siempre positiva o es siempre negativa (según el teorema de Bolzano); como $f(0) = 8$, se sigue que es siempre positiva.

5. Encuentra razonadamente todos los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se cumple la desigualdad $x^3 \leq 1$.

SOLUCIÓN. (I) Una forma de resolver el ejercicio consiste en ver que la función $f(x) = x^3$ es no decreciente: si $x \leq y$ entonces $x^3 \leq y^3$. Luego, si $x \leq 1$, se sigue que $x^3 \leq 1^3 = 1$; sin embargo, si $x > 1$, entonces $x^3 > 1^3 = 1$. Luego, $x^3 \leq 1$ es cierto sólo si y sólo si $x \leq 1$.

(II) Otra solución consiste en ver que $x^3 \leq 1$ es equivalente a $x^3 - 1 \leq 0$ y recordar la factorización de la diferencia de dos cubos:

$$x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x - 1)(x^2 + x + 1).$$

El trinomio cuadrático $x^2 + x + 1$ es siempre estrictamente positivo ya que tiene el coeficiente principal positivo y no tiene ceros, pues su discriminante es $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$. Por tanto, el producto de arriba es ≤ 0 si y sólo si el factor $x - 1 \leq 0$, es decir, si y sólo si $x \leq 1$.

6. Encuentra razonadamente todos los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se satisface la siguiente desigualdad: $|x^2 + 2x + 1| \leq 4$.

SOLUCIÓN. Solución 1. Observemos que la expresión dentro del valor absoluto es un cuadrado. Y entonces

$$|x^2 + 2x + 1| \leq 4 \iff |(x + 1)^2| \leq 4 \iff (x + 1)^2 \leq 4 \iff |x + 1| \leq 2,$$

(conviene recordar que $\sqrt{(x + 1)^2} = |x + 1|$), que finalmente nos dice que $-2 \leq x + 1 \leq 2$, es decir, que $-3 \leq x \leq 1$.

Solución 2. Podemos escribir que

$$|x^2 + 2x + 1| \leq 4 \iff -4 \leq x^2 + 2x + 1 \leq 4,$$

y calcular los valores de x que verifican, simultáneamente, que $x^2 + 2x - 3 \leq 0$ y que $x^2 + 2x + 5 \geq 0$. La segunda se cumple para todo x , mientras que la primera nos da el rango $x \in [-3, 1]$.

Solución 3. También podemos decidir cuándo $x^2 + 2x + 1$ es positivo y negativo. Como es siempre positivo,

$$|x^2 + 2x + 1| \leq 4 \iff x^2 + 2x + 1 \leq 4 \iff x^2 + 2x - 5 \leq 0,$$

que nos vuelve a dar el rango $x \in [-3, 1]$.

En realidad, las tres estrategias son (casi) lo mismo.

7.] Encuentre razonadamente todos los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se cumple que

$$|x^2 - 4x + 4| \leq 25.$$

SOLUCIÓN. El problema se puede hacer de varias maneras. Aquí indicaremos la más simple:

$x^2 - 4x + 4$ es un cuadrado perfecto, lo que simplifica bastante los cálculos. De hecho,

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \implies |x^2 - 4x + 4| = |(x - 2)^2| = |x - 2|^2,$$

por lo que

$$\begin{aligned} |x^2 - 4x + 4| \leq 25 &\iff |x - 2|^2 \leq 25 \\ &\iff |x - 2| \leq 5 \\ &\iff -5 \leq x - 2 \leq 5 \\ &\iff -3 \leq x \leq 7. \end{aligned}$$

Alternativamente, podemos razonar que el conjunto dado por la desigualdad $|x - 2| \leq 5$ es un intervalo cerrado (por el \leq) de centro 2 y de radio 5; por tanto el conjunto pedido es el intervalo

$$[2 - 5, 2 + 5] = [-3, 7].$$

8. Demuestra *por inducción* que, para todo $n \geq 1$, se cumple la identidad

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

SOLUCIÓN. El caso $n = 1$ nos dice que $1 + 3 = (1 + 1)^2$, que es claramente cierto.

Supongamos que, para un n fijo, se cumple que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = (n + 1)^2$. Ahora consideramos el caso siguiente, es decir, sumamos un impar más. Nos gustaría obtener, para este caso, que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) + (2n + 3) = (n + 2)^2.$$

Veámoslo:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) + (2n + 3) \stackrel{\text{hip. inducción}}{=} (n + 1)^2 + (2n + 3) = n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2.$$

Según el Principio de Inducción, se sigue que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

para todo n natural.

(Observa que el enunciado nos proporciona una fórmula sencilla y útil para sumar los primeros $n + 1$ números impares.)

9. Demuéstrese *por inducción* que, para todo $n \in \mathbb{N}$, el número $N(n) = n^3 + 5n$ es divisible por 6.

SOLUCIÓN. Obviamente, $N(1) = 6$ es divisible entre 6. Supongamos ahora que, para cierto $n \in \mathbb{N}$, el número $N(n)$ es divisible por 6. Veamos que 6 también es un divisor del número $N(n+1)$. Desarrollando el cubo y agrupando los términos de forma conveniente, obtenemos:

$$\begin{aligned} N(n+1) &= (n+1)^3 + 5(n+1) = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 5n + 5 \\ &= (n^3 + 5n) + (3n^2 + 3n) + 6 = N(n) + 3n(n+1) + 6. \end{aligned}$$

Obsérvese que n y $n+1$ son dos números naturales consecutivos y, por tanto, uno de ellos es par, luego el número $n(n+1)$ es par y, por tanto, $3n(n+1)$ es divisible por $2 \cdot 3 = 6$. Se sigue que nuestro número $N(n+1)$ es la suma de tres números divisibles entre 6, a saber, $N(n)$ (por hipótesis inductiva), $3n(n+1)$ y 6, luego también es divisible por 6. Esto completa la prueba por inducción.

10. Demuestra *por inducción* que, para todo $n \geq 5$, se cumple la desigualdad

$$2^n > n^2 + 1.$$

SOLUCIÓN. La desigualdad se cumple para $n = 5$ ya que $2^5 = 32 > 26 = 5^2 + 1$. Supongamos que es cierta para un $n \geq 5$ y veamos que también lo es para $n+1$. Por la hipótesis inductiva, obtenemos que

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2(n^2 + 1).$$

Si supiésemos que $2(n^2 + 1) \geq (n+1)^2 + 1$, la prueba estaría terminada. Observemos que la última desigualdad es equivalente a $2n^2 + 2 \geq n^2 + 2n + 2$ o, lo que es lo mismo, $n^2 \geq 2n$, lo cual es obviamente cierto ya que $n \geq 5 \geq 2$. Por tanto, $2^{n+1} > (n+1)^2 + 1$, que es lo que queríamos probar.

11. En combinatoria se define el número $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Fijamos un $n_0 \geq 2$ natural; usa inducción empezando en n_0 para demostrar que para todo $n \geq n_0$ se tiene que

$$\binom{n}{n_0} \leq (n_0 + 1)^n.$$

SOLUCIÓN. La desigualdad es verdad para $n = n_0$, ya que $\binom{n_0}{n_0} = 1 \leq (n_0 + 1)^{n_0}$.

Asumiendo que la desigualdad es cierta para un cierto $n \geq n_0$, vamos a examinarla para $n+1$:

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{n_0} &= \frac{(n+1)!}{n_0!(n+1-n_0)!} = \frac{(n+1)n!}{n_0!(n+1-n_0)(n-n_0)!} \\ &= \frac{n+1}{n+1-n_0} \cdot \frac{n!}{n_0!(n-n_0)!} = \frac{n+1}{n+1-n_0} \cdot \binom{n}{n_0}. \end{aligned}$$

El segundo factor de la derecha es menor o igual que $(n_0 + 1)^n$ por inducción; necesitamos estimar el primer factor como menor que $n_0 + 1$ para obtener el $(n_0 + 1)^{n+1}$ deseado. Vamos a ver si es verdad:

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n+1-n_0} \leq n_0 + 1 &\Leftrightarrow n+1 \leq (n_0 + 1)(n+1-n_0) \\ &\Leftrightarrow n+1 \leq n+1 + n_0(n+1) - n_0^2 - n_0 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq n_0n - n_0^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq n - n_0, \end{aligned}$$

lo cual es cierto por la hipótesis $n \geq n_0$. El enunciado queda probado por inducción.

12. La sucesión (a_n) viene dada por la siguiente fórmula recurrente:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + 1, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Demuestre *por inducción* que $\frac{n}{n-1} \leq a_n \leq 2$ para todo $n \geq 2$.

(b) Deduzca que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

SOLUCIÓN. Tomamos como proposición $\mathcal{P}(n)$ la desigualdad a demostrar, es decir, $\frac{n}{n-1} \leq a_n \leq 2$.

- El caso $\mathcal{P}(2)$ es inmediato, ya que $a_2 = 2$, y $\frac{2}{2-1} = 2 \leq a_2 = 2 \leq 2$.
- Asumimos ahora que $\mathcal{P}(n)$ es verdad y procedemos a demostrar $\mathcal{P}(n+1)$ en dos pasos:
 - primero observamos que $a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + 1 \leq \frac{2}{n} + 1 \leq 1 + 1 = 2$, ya que al ser $n \geq 2$ se tiene que $\frac{2}{n} \leq 1$;
 - por otra parte,

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + 1 \geq \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)}{n} + 1 = \frac{1}{n-1} + 1 = \frac{n}{n-1};$$

esto no es exactamente lo que queríamos demostrar (que era $a_{n+1} \geq \frac{n+1}{n}$), pero es fácil observar que

$$\frac{n}{n-1} \geq \frac{n+1}{n}, \quad \text{ya que } n^2 > (n+1)(n-1) = n^2 - 1.$$

Por lo tanto,

$$a_{n+1} \geq \frac{n}{n-1} \geq \frac{n+1}{n}$$

que era lo que queríamos demostrar.

Una vez conocido el apartado anterior del problema, este límite es una aplicación sencilla del teorema del encaje (o del sandwich):

Como $\frac{n}{n-1} \leq a_n \leq 2$ para todo $n \geq 2$, dividiendo por n toda la desigualdad, se obtiene que

$$\frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)}{n} \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{2}{n},$$

o que

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{2}{n}.$$

Como los límites a derecha e izquierda coinciden y son cero, el límite de $\frac{a_n}{n}$ también debe ser cero.

13. La sucesión (a_n) viene dada por la siguiente fórmula recurrente:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = 2a_n - \frac{1}{4} \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

- (a) Demuestra *por inducción* que $a_n > \frac{1}{4}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
 (b) Prueba que la sucesión es creciente.

SOLUCIÓN. (a) Es obvio que $a_1 > 1/4$.
 Supongamos que, para un n fijo, resulta que $a_n > 1/4$. El siguiente término de la sucesión, a_{n+1} , viene dado por

$$a_{n+1} = 2a_n - \frac{1}{4},$$

y como $a_n > 1/4$, resulta que

$$a_{n+1} > 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

que es lo que queríamos probar.
 Según el Principio de Inducción, se sigue que $a_n > 1/4$ para todo n natural.

(b) Queremos probar que $a_{n+1} > a_n$ para todo n . Pero como $a_{n+1} = 2a_n - 1/4$, es lo mismo que exigir que

$$2a_n - \frac{1}{4} > a_n \iff a_n > \frac{1}{4},$$

que ya sabemos que es cierto, por el apartado anterior.

14. Definimos la sucesión a_n mediante la fórmula

$$a_{n+1} = n \cdot a_n,$$

donde $a_1 = 1$. Demuestre que para todo $n \geq 4$ se tiene que $a_n \geq n$.

SOLUCIÓN. El problema pide demostrar que $a_n \geq n$ para $n \geq 4$; para hacerlo usando el principio de inducción, habrá que empezar ésta en $n = 4$. Calculando los primeros términos de la sucesión vemos que

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 6.$$

Observamos que $a_4 \geq 4$, lo que da el inicio de la inducción. Asumimos ahora que $a_n \geq n$ y examinamos a_{n+1} :

$$a_{n+1} = n \cdot a_n \geq n \cdot n = n^2,$$

donde hemos usado la hipótesis de inducción para obtener la desigualdad. Como $n \geq 1$, multiplicando por n positivo en ambos lados obtenemos que $n^2 > n$; como n^2 es un entero se debe tener de hecho que $n^2 \geq n + 1$. Por lo tanto $a_{n+1} \geq n + 1$ que es lo que queríamos demostrar. El enunciado se sigue ahora del principio de inducción.

15. La sucesión $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ viene dada por la fórmula

$$A_n = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad n \geq 0.$$

Demstrar que A_n es un número natural para todo $n \geq 0$. ¿De qué sucesión se trata?

SOLUCIÓN. Aplicaremos la inducción “de n y $n + 1$ a $n + 2$ ”. Primero, es fácil ver que

$$A_0 = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} = \frac{10}{10} = 1, \quad A_1 = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.$$

Suponiendo que ambos A_n y A_{n+1} son números naturales para cierto n , veremos que A_{n+2} también es natural, comprobando que verifica la relación $A_{n+2} = A_n + A_{n+1}$. (Obviamente, aquí estamos tratando una situación muy especial que en otros contextos sería más complicada.) En efecto, sumando y agrupando los términos (el primero con el tercero y el segundo con el cuarto en la primera igualdad abajo) vemos que

$$\begin{aligned} A_n + A_{n+1} &= \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \\ &\quad \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \\ &= \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \left(1 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \left(1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \\ &= \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \frac{3 - \sqrt{5}}{2} + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \frac{3 + \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Ahora nos ayuda la siguiente observación:

$$\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{4} = \frac{(1 \pm \sqrt{5})^2}{4} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^2.$$

Por tanto, volviendo a la cadena anterior de igualdades, vemos que

$$\begin{aligned} A_n + A_{n+1} &= \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} = A_{n+2}. \end{aligned}$$

Vemos, por tanto, que $(A_n)_{n=0}^\infty$ es la célebre sucesión de Fibonacci, ya que $A_0 = A_1 = 1$ y $A_{n+2} = A_n + A_{n+1}$.

16. Usar la propiedad de Arquímedes para demostrar que $\inf \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$.

SOLUCIÓN. Primero vamos a comprobar que si $\varepsilon > 0$ entonces existe un número natural n_ε tal que $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$.

Esta afirmación es una consecuencia inmediata de la propiedad de Arquímedes, puesto que si tomamos $a = \frac{1}{\varepsilon}$ entonces, según la propiedad de Arquímedes, existe $n_a \in \mathbb{N}$ tal que $a < n_a$. De aquí obtenemos que $\frac{1}{a} > \frac{1}{n_a}$. Por la definición de a tenemos que $\frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$. Entonces si tomamos $n_\varepsilon = n_a$ obtenemos que $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$, que es lo que teníamos que comprobar.

Para demostrar que $\inf \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$ tenemos que comprobar que $\forall \varepsilon > 0$ existe un número $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$, lo que es cierto según la afirmación demostrada más arriba.

17. Sea A el conjunto de números reales definido como

$$A = \left\{ 2 + n, 2 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Halle (si existen) su supremo y su ínfimo, y decida si A tiene un máximo o un mínimo.

SOLUCIÓN. Como n puede tomar cualquier valor entero positivo, los valores $2 + n$ crecen tanto como se desee; esto quiere decir que A no admite ninguna cota superior y por tanto no existe el supremo ni el máximo de A .

Por otra parte, como n es siempre positivo n y $1/n$ también lo son, lo que implica que

$$2 + n \geq 2, \quad 2 + \frac{1}{n} \geq 2$$

y por tanto A tiene a 2 como una cota inferior. Como $1/n$ puede tomar valores tan pequeños como se quiera, se tiene que no hay ningún otro $\alpha > 2$ que pueda funcionar como cota inferior; de hecho, si $\alpha > 2$, $\alpha - 2 > 0$ y existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - 2 > \frac{1}{n} > 0$ y $\alpha > 2 + \frac{1}{n}$. Por ello, 2 es de hecho el ínfimo de A . Finalmente, para que 2 fuera el mínimo de A , 2 debería pertenecer a A . Pero si algún elemento de éste fuera 2, entonces tendríamos que para algún $n \in \mathbb{N}$, $n = 0$ ó $1/n = 0$, lo que es imposible porque n es positivo.

18. Calcula el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 - 2n^3 + 41}{\pi n^4 + en^2 + \sqrt{2}n},$$

SOLUCIÓN. Dado que estamos considerando el cociente de dos polinomios del mismo grado, podemos usar el truco habitual de dividir el numerador y el denominador por la potencia más grande de n que aparece en el denominador, que es n^4 , obteniendo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 - 2n^3 + 41}{\pi n^4 + en^2 + \sqrt{2}n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{41}{n^4}}{\pi + \frac{e}{n^2} + \frac{\sqrt{2}}{n^3}} = \frac{3}{\pi}.$$

19. Calcula el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 \sqrt{n^2 + 3n} - n^3),$$

SOLUCIÓN. Se trata de una indeterminación de tipo $\infty - \infty$, con lo cual no podemos calcular el límite directamente. Usamos el procedimiento habitual de racionalizar (o de multiplicar por la expresión conjugada), basado en la fórmula estándar $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, como sigue:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 \sqrt{n^2 + 3n} - n^3) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 \sqrt{n^2 + 3n} - n^3)(n^2 \sqrt{n^2 + 3n} + n^3)}{n^2 \sqrt{n^2 + 3n} + n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 (n^2 + 3n) - n^6}{n^2 \sqrt{n^2 + 3n} + n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5}{n^2 \sqrt{n^2 + 3n} + n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{\sqrt{1 + 3/n} + 1} \end{aligned}$$

(en el último paso hemos dividido arriba y abajo por n^3 , pues el denominador es comparable con n^3). Escrito así, es inmediato comprobar que el límite es $+\infty$.

20. Calcúlese el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 1}).$$

SOLUCIÓN. Una vez más, racionalizando el numerador, obtenemos

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + n + 1) - (n^2 + 1)}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 + 1}}.$$

Dividiendo por n en el numerador y en el denominador, vemos que

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2}.$$

21. Calcula razonadamente el valor del límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$.

SOLUCIÓN. Para este ejercicio, es fundamental recordar el límite básico

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

El término general de la sucesión, $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$, cumple

$$\frac{1}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^2 \rightarrow e^2, \quad n \rightarrow \infty.$$

Por tanto, $a_n \rightarrow \frac{1}{e^2}, n \rightarrow \infty$.

22. Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$.

SOLUCIÓN. Conviene recordar que si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ entonces también $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} = L$. En particular,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e.$$

Ahora ya resulta fácil calcular el límite dado, usando unas sencillas manipulaciones:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n-1)+1}{n-1}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e.$$

23. Calcúlese razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{2(n+1)}.$$

SOLUCIÓN. Si intentamos ver cómo queda el límite calculando simplemente límites de cada parte de la expresión, obtendremos una indeterminación del tipo 1^∞ , ya que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = 1, \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Para resolver la indeterminación, el camino más sencillo es reconocer el límite asociado al número e ; en otras palabras,

$$\frac{n+2}{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1},$$

con lo que el límite pedido queda como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{2(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{2(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{(n+1)} \right)^2 = e^2.$$

24. Decidir si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{n+2}}{\pi^n}$$

converge o diverge. Si procede, calcular la suma de la serie.

SOLUCIÓN. Observemos que nuestra serie es geométrica con razón $q = -e/\pi$, ya que el cociente de cada dos términos sucesivos es

$$\frac{\frac{(-1)^{n+2} e^{n+3}}{\pi^{n+1}}}{\frac{(-1)^{n+1} e^{n+2}}{\pi^n}} = -\frac{e}{\pi}.$$

Además,

$$\left| -\frac{e}{\pi} \right| = \frac{e}{\pi} < \frac{e}{3} < 1,$$

con lo cual la serie converge. Según la fórmula para la suma de una serie geométrica:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}, \quad |q| < 1,$$

la suma en este caso ($a = e^2$, $q = -e/\pi$) es

$$\frac{e^2}{1 + \frac{e}{\pi}} = \frac{\pi e^2}{\pi + e}.$$

25. (a) Decide si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

converge o diverge. Justifica tu respuesta.

(b) Decide razonadamente si converge o no la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2) \log(n+1)}.$$

SOLUCIÓN. (a) Observemos que $\frac{1}{n(n+2)}$ se puede descomponer en **fracciones simples** como sigue:

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+2) - n}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right).$$

Esto nos permite ver que nuestra serie tiene sumas parciales *telescopicas* (la mayoría de los términos aparecen dos veces, la segunda vez tres lugares después de la primera aparición y con el signo opuesto):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \rightarrow \frac{3}{2}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Por consiguiente, la serie converge y su suma es igual a $3/2$.

(b) Puesto que para todo $n \geq 2$ se cumple que $\log(n+1) \geq \log 3 > \log e = 1$, se sigue que

$$0 < \frac{1}{n(n+2) \log(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+2)}, \quad n \geq 2.$$

El apartado (a) y el criterio de comparación nos dicen que la serie converge.

26. Estudiar la convergencia de la serie infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2 + 1},$$

justificando la respuesta.

SOLUCIÓN. Podemos aplicar el *Criterio del término general*: la serie diverge porque su término general no tiende a 0. De hecho,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2 + 1}$$

no existe: la sucesión es oscilante ya que $\frac{n^2}{n^2+1}$ converge a 1, mientras que $(-1)^n$ alterna su valor entre 1 y -1 .

27. Estudia la convergencia de la serie infinita

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n! + \sqrt{3}}.$$

SOLUCIÓN. Conviene observar que

$$n! + \sqrt{3} > n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \geq (n-1)n$$

y, por tanto,

$$0 < \frac{1}{n! + 1} < \frac{1}{(n-1)n}, \quad n \geq 2.$$

La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$ se ha visto en clase en algunos grupos: es *telescópica* y converge, con suma uno.

Alternativamente, puede verse que es convergente aplicando el *Criterio asintótico* ya que

$$\frac{1}{(n-1)n} \sim \frac{1}{n^2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

(Esta última afirmación se comprueba dividiendo los términos y viendo que el cociente, $n/(n-1) \rightarrow 1$, cuando $n \rightarrow \infty$.)

Finalmente, aplicando el *Criterio de comparación*, concluimos que la serie inicial converge.

28. Decide si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 1}{n + 2}$$

converge o diverge, justificando adecuadamente la respuesta.

SOLUCIÓN. Observa que es una serie de términos positivos. El término general de la serie,

$$a_n = \frac{\sqrt{n} + 1}{n + 2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

como es necesario para la (hipotética) convergencia (pero no es suficiente). Además, es asintóticamente equivalente a $1/\sqrt{n}$, como se comprueba fácilmente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n} + 1}{n + 2}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n} + 1)}{n + 2} = 1.$$

Aplicando el *Criterio asintótico* y recordando que $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (siendo ésta una serie p -armónica con $p = 1/2 < 1$), deducimos que la serie del enunciado también diverge.

29. Decide razonadamente si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + n + 3}$$

converge o diverge.

SOLUCIÓN. Argumentamos como en el caso de la serie anterior, pero ahora la comparación (asintótica) correcta es con $1/n^{3/2}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^2 + n + 3}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3/2} n^{1/2}}{n^2 + n + 3} = 1.$$

Aplicando el *Criterio asintótico* y recordando que $\sum_n \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, deducimos que la serie del enunciado también converge.

30. Estudie razonadamente la convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}.$$

Si usa algún criterio específico, nómbrelo y explique cómo se ha aplicado.

SOLUCIÓN. La potencia n -ésima en el término general de la serie sugiere usar el criterio de la raíz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{4^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{4} = \frac{1}{4},$$

donde hemos usado que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, y que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{n^2} \right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \right)^2 = 1^2 = 1.$$

Como $\frac{1}{4} < 1$, el criterio de la raíz asegura que la serie converge.

31. Estudia razonadamente la convergencia de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{n+2}}{2^n (\log n)^n}$.

SOLUCIÓN. El término general contiene varias potencias. Podemos aplicar el *Criterio de la raíz*:

$$\sqrt[n]{\frac{e^{n+2}}{2^n (\log n)^n}} = \frac{e^{\frac{n+2}{n}}}{2 \log n} = \frac{e^{1+\frac{2}{n}}}{2 \log n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

puesto que el numerador tiende a e y el denominador tiende al infinito. Puesto que el límite es menor que uno, la serie converge.

32. Decide razonadamente si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n \cdot (n!)^2}{(2n)!}$$

converge o diverge. Nombra o enuncia el criterio utilizado.

SOLUCIÓN. La serie es positiva, siendo su término general $a_n = \frac{7^n \cdot (n!)^2}{(2n)!}$. Puesto que aparecen factoriales, es conveniente aplicar el test del cociente.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{7^{n+1} \cdot ((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{7^n \cdot (n!)^2}{(2n)!}} = \frac{7^{n+1} \cdot ((n+1) \cdot n!)^2}{(2n+2)!} = \frac{7(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \rightarrow \frac{7}{4}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Al ser el límite mayor que uno, la serie diverge según el *Criterio del cociente*.

33. Decide la convergencia condicional o absoluta (o, en su caso, la divergencia) de la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n! + 2n)}{n^3}.$$

SOLUCIÓN. La serie asociada con valores absolutos converge por el *Criterio de comparación* ya que

$$0 \leq \left| \frac{\operatorname{sen}(n! + 2n)}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$$

y la serie 3-armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge (visto en clase). Por tanto, la serie original converge absolutamente.

34. Determinése si la serie infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2013}}$$

diverge, converge absolutamente o converge condicionalmente, justificando la respuesta.

SOLUCIÓN. Se trata de una serie alternada. No converge absolutamente porque

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2013}} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2013}}$$

diverge, por comparación asintótica con la serie $\sum_n 1/\sqrt{n}$ (que ya sabemos que diverge).

Por otra parte, es fácil comprobar que $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2013}}$ es una sucesión decreciente de números positivos y tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, justo las hipótesis con las que el *criterio de Leibniz* nos permite concluir que la serie converge.

Conclusión: la serie en el enunciado converge condicionalmente.

35. Decida si la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n\sqrt{n} - 1}{n^3 + 1}$$

converge absoluta o condicionalmente o diverge. Justifique adecuadamente su respuesta, nombrando o enunciando los criterios aplicados.

SOLUCIÓN. Esta serie tiene términos positivos y negativos (de hecho, es alternada, a partir del tercer término), lo que permite varios tipos de convergencia. Mirando lo que se obtiene cuando quitamos el signo al término general de la serie, observamos que es

$$\frac{n\sqrt{n}-1}{n^3+1} \geq 0,$$

lo cual, cuando n es muy grande, se asemeja mucho a $\frac{n\sqrt{n}}{n^3}$. Tras simplificar, vemos que esto coincide con $\frac{1}{n^{3/2}}$, que es el término general de una p -serie con $p = 3/2$ y por tanto convergente. Para justificar este razonamiento heurístico, usaremos el criterio de comparación asintótica (i.e, comparación con límite):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n\sqrt{n}-1}{n^3+1}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3/2}(n^{3/2}-1)}{n^3+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3-n^{3/2}}{n^3+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^3-n^{3/2}}{n^3}}{\frac{n^3+1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{1}{n^{3/2}}}{1+\frac{1}{n^3}} = 1$$

Como ese límite existe y es mayor que cero, el comportamiento de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}-1}{n^3+1}$ es el mismo que el de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, y por tanto converge.

La serie pedida convergerá por tanto **absolutamente**.

36. Decide la convergencia condicional o absoluta (o, en su caso, la divergencia) de la serie infinita

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n-1}}.$$

SOLUCIÓN. La serie es alternada. Es evidente que la sucesión $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n-1}}\right)_{n=2}^{\infty}$ es positiva y tiende a cero. Además, cuando n crece, también crece $n-1$ y es positiva ($n \geq 2$), luego $\frac{1}{n-1}$ es decreciente y también la sucesión $\frac{1}{\sqrt[4]{n-1}}$. Por el *criterio de Leibniz*, la serie es convergente.

La serie asociada con los valores absolutos, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n-1}}$, puede compararse con la serie $\frac{1}{4}$ -armónica:

$$\frac{1}{n-1} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{n-1}} \geq \frac{1}{\sqrt[4]{n}} = \frac{1}{n^{1/4}}.$$

Recordemos que $\sum_n \frac{1}{n^{1/4}}$ diverge por ser $1/4 \leq 1$.

Aplicando el *Criterio de comparación*, se sigue que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n-1}}$ diverge.

En conclusión, la serie inicial converge condicionalmente.

37. Demostrar que si $a_n > 0$, entonces la serie $\sum_n \left(\frac{2a_n}{3a_n+2}\right)^n$ converge.

SOLUCIÓN. Es fácil ver que

$$\frac{2a_n}{3a_n + 2} \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 6a_n \leq 6a_n + 4,$$

lo cual es cierto. Por tanto, la serie se puede comparar con la geométrica $\sum_n \left(\frac{2}{3}\right)^n$ y ésta converge por ser su razón $q = 2/3 \in (-1, 1)$.