Sucesiones definidas por recurrencia y fracciones continuas.

Problema. Estudiar el comportamiento de las siguiente sucesión definida por recurrencia:

$$a_1 = 1\,, \qquad a_{n+1} = c + \frac{d}{a_n}\,, \qquad \text{con } c \geq 1 \qquad \text{y} \qquad 0 \leq d \leq c^2\,.$$

Solución.
(i) *Cotas básicas.* Antes que todo notamos que la sucesión es no-negativa. De hecho podemos probar por inducción que $a_n \geq c$ para todo $n \geq 2$:

- $n = 2$ Dado que $a_1 = 1 \geq 0$ y $a_2 = c + d \geq c \geq 0$, recordando que $c, d \geq 0$.
- $n = k \;\Rightarrow\; n = k+1$. Probamos que si $a_k \geq c \geq 0$ entonces $a_{k+1} \geq c$. Es evidente, dado que $a_{k+1} = c + \frac{d}{a_k} \geq c$, ya que $a_k, d \geq 0$.

Hemos probado que la sucesión a_n está acotada inferiormente:

$$0 \leq c \leq a_{n+1} \quad \forall n \geq 2\,, \qquad \text{es decir} \qquad \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{c} \quad \forall n \geq 2\,.$$

Estas cotas inferiores ayudan a encontrar una cota superior:

$$a_{n+1} = c + \frac{d}{a_n} \leq c + \frac{d}{c} \qquad \forall n \geq 2\,. \tag{1}$$

Entonces la sucesión está acotada. Podemos también mejorar un poquito las cotas inferiores, usando la cota superior (1), en la forma

$$\frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{c + \frac{d}{c}} \qquad \forall n \geq 2\;, \qquad \Longrightarrow \qquad a_{n+1} = c + \frac{d}{a_n} \geq c + \frac{d}{c + \frac{d}{c}}$$

y notamos que

$$\frac{1}{a_{n-1}\, a_{m-1}} \leq \frac{1}{\left(c + \frac{d}{c+\frac{d}{c}}\right)^2} = \frac{\left(c + \frac{d}{c}\right)^2}{\left(c^2 + 2d\right)^2} = \frac{\left(c^2 + d\right)^2}{c^2\left(c^2 + 2d\right)^2} \leq \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{d}{c^2 + 2d}\right) \tag{2}$$

Hasta ahora esta última acotación no es indispensable, pero servirá en el apartado (iv).
(ii)*Posible límite.* **Si** la sucesión tuviese limite, $\ell := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$, entonces ℓ sería

$$\ell = c + \frac{d}{\ell} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ell^2 - c\ell - d = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ell_\pm = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 4d}}{2}$$

descarto la raíz ℓ_- dado que es negativa y la sucesión es de términos positivos, y

$$\ell = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4d}}{2} \qquad \text{recordando también que} \qquad \ell = c + \frac{d}{\ell}\,. \tag{3}$$

(iii) *Monotonía.* Tratamos de ver si la sucesión es monótona: $a_{n+1} = c + \frac{d}{a_n} \le a_n$ si y solo si

$$a_n^2 - ca_n - d \ge 0 \qquad \text{es decir cuando} \qquad a_n \ge \frac{c + \sqrt{c^2 + 4d}}{2} = \ell\,.$$

Entonces la sucesión empieza a decrecer cuando supera ℓ. De hecho se puede ver de la misma manera que empieza a crecer cuando $a_n \le \ell$. Eso nos indica que la sucesión no es monótona: de hecho podemos probar que si $a_n < \ell$ entonces $a_{n+1} > \ell$ y además $a_{n+2} < \ell$. En efecto:

$$a_n < \ell \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{a_n} > \frac{1}{\ell} \qquad \Rightarrow \qquad a_{n+1} = c + \frac{d}{a_n} > c + \frac{d}{\ell} = \ell\,.$$

además

$$a_{n+1} > \ell \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{\ell} \qquad \Rightarrow \qquad a_{n+2} = c + \frac{d}{a_{n+1}} < c + \frac{d}{\ell} = \ell\,.$$

lo cual prueba que la sucesión no es monótona.

(iv) *La sucesión es de Cauchy:* fijamos $\varepsilon > 0$, tenemos que encontrar $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$ para todo $m, n > N_0$, y notamos que no es restrictivo suponer $m > n > N_0$. Calculamos

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= \left| \frac{d}{a_{n-1}} - \frac{d}{a_{m-1}} \right| = d\frac{|a_{n-1} - a_{m-1}|}{a_{n-1}\, a_{m-1}} \le \frac{d}{c^2}\left(1 - \frac{d}{c^2 + 2d}\right)|a_{n-1} - a_{m-1}| \\ &\le \underbrace{\left(1 - \frac{d}{c^2 + 2d}\right)}_{K<1} |a_{n-1} - a_{m-1}| = K|a_{n-1} - a_{m-1}| \end{aligned}$$

hemos usado la acotación (2) y el hecho que $d \le c^2$. El hecho esencial es que

$$0 \le K = \left(1 - \frac{d}{c^2 + 2d}\right) < 1 \qquad \text{así que} \qquad K^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Puedo iterar la desigualdad de arriba $(n-1)$-veces para obtener

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &\le K|a_{n-1} - a_{m-1}| \le K^2|a_{n-2} - a_{m-2}| \le K^3|a_{n-3} - a_{m-3}|^3 \\ &\le \ldots \le K^{n-1}|a_1 - a_{m-n}| = K^{n-1}\left| c + \frac{d}{a_{m-n-1}} - 1 \right| \\ &= K^{n-1}\Big| \underbrace{\frac{d}{a_{m-n-1}}}_{\le \frac{d}{c}} + c - 1 \Big| \le K^{n-1}\Big| \underbrace{\frac{d}{c} + c - 1}_{\ge 0} \Big| \\ &= K^{n-1}\Big(c + \underbrace{\frac{d}{c}}_{\le c} - 1 \Big) \le\, K^{n-1}\Big(2c - 1 \Big) = 2c\, K^{n-1} < \varepsilon \end{aligned}$$

ahora basta con elegir $N_0 = N_0(\varepsilon)$ suficientemente grande, tal que

$$2c\, K^{N_0 - 1} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad (N_0 - 1)\underbrace{\log K}_{\le 0} = \log K^{N_0-1} \le \log \frac{\varepsilon}{2c} \qquad \Longleftrightarrow \qquad N_0 \ge 1 + \frac{\log \frac{\varepsilon}{2c}}{\log K}$$

(puedo elegir por ejemplo N_0 como la parte entera del cociente de logaritmos mas 10000) para tener que, para todo $m > n > N_0$:

$$|a_n - a_m| < dc\, K^{n-1} < 2c\, K^{N_0-1} < \varepsilon$$

con lo cual probamos que efectivamente la sucesión es de Cauchy y entonces convergente a un limite. Dicho límite es único, y gracias al apartado (ii), ya sabemos que tiene que ser ℓ. $\square$

Observación 1. El apartado (iv) se podría hacer también usando directamente la definición de limite. Fijamos $\varepsilon > 0$, tenemos que encontrar $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tal que $|a_n - \ell| < \varepsilon$ para todo $n > N_0$. Calculamos (uso que $\ell = c + \frac{d}{\ell}$)

$$\begin{aligned}|a_n - \ell| &= \left|\frac{d}{a_{n-1}} - \frac{d}{\ell}\right| = d\frac{|a_{n-1} - \ell|}{a_{n-1}\, \ell} \le \frac{d}{c^2}\left(1 - \frac{d}{c^2 + 2d}\right)|a_{n-1} - \ell| \\ &\le \underbrace{\left(1 - \frac{d}{c^2 + 2d}\right)}_{K<1}|a_{n-1} - \ell| = K|a_{n-1} - \ell|\end{aligned}$$

hemos usado la acotación (2) y el hecho que $d \le c^2$. El hecho esencial es que

$$0 \le K = \left(1 - \frac{d}{c^2 + 2d}\right) < 1 \qquad \text{así que} \qquad K^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Puedo iterar la desigualdad como en el apartado (iv) y obtener

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &\le K|a_{n-1} - \ell| \le K^2|a_{n-2} - \ell| \le K^3|a_{n-3} - \ell|^3 \\ &\le \ldots \le K^{n-1}|a_1 - \ell| = K^{n-1}|\ell - 1| < \varepsilon\end{aligned}$$

ahora basta con elegir $N_0 = N_0(\varepsilon)$ suficientemente grande, es decir tal que

$$|\ell - 1|\, K^{N_0-1} < \varepsilon \iff (N_0 - 1)\underbrace{\log K}_{\le 0} = \log K^{N_0-1} \le \log\frac{\varepsilon}{|\ell - 1|} \iff N_0 \ge 1 + \frac{\log\frac{\varepsilon}{|\ell-1|}}{\log K}$$

(puedo elegir por ejemplo N_0 como la parte entera del cociente de logaritmos mas 43227) para tener que, para todo $n > N_0$:

$$|a_n - \ell| < |\ell - 1|\, K^{n-1} < |\ell - 1|\, K^{N_0-1} < \varepsilon$$

con lo cual probamos que efectivamente la sucesión es convergente a ℓ. $\square$

Observación 2. En el caso que $0 \le d < c^2$ (el menor estricto es esencial), las cosas son más fáciles. Usamos solo las cotas básicas

$$c \le a_n \qquad \text{que implica (medio sandwich)} \qquad c \le \ell = c + \frac{d}{\ell} \qquad \text{así que} \qquad \frac{1}{a_n\ell} \le \frac{1}{c^2}$$

Calculamos

$$\begin{aligned}|a_n - \ell| &= \left|\frac{d}{a_{n-1}} - \frac{d}{\ell}\right| = d\frac{|a_{n-1} - \ell|}{a_{n-1}\, \ell} \le \frac{d}{c^2}|a_{n-1} - \ell| = B|a_{n-1} - \ell| \\ &\le \ldots \le K^{n-1}|a_1 - \ell| = B^{n-1}\left|1 - \frac{c + \sqrt{c^2 + 4d}}{2}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

El hecho esencial ahora es que $d < c^2$, así que

$$0 \leq B = \frac{d}{c^2} < 1 \qquad \text{así que} \qquad B^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

ahora podemos concluir gracias al lema del sandwich:

$$0 \leq |a_n - \ell| \leq B^{n-1}\left|1 - \frac{c+\sqrt{c^2+4d}}{2}\right| \qquad \text{pasando al limite} \qquad 0 \leq \lim_{n\to\infty} |a_n - \ell| \leq 0$$

lo cual claramente implica que

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - \ell| = 0 \qquad \text{que es equivalente a} \qquad \lim_{n\to\infty} = \ell. \ \square$$

Observación 3. Aplicación a fracciones continuas. Observamos que las fracciones continuas

$$c + \cfrac{d}{c + \cfrac{d}{c + \cfrac{d}{c + \dots}}}$$

son generadas por la sucesión definida por recurrencia

$$a_{n+1} = c + \frac{d}{a_n} = c + \cfrac{d}{c + \cfrac{d}{a_{n-1}}} = c + \cfrac{d}{c + \cfrac{d}{c + \cfrac{d}{a_{n-2}}}} = c + \cfrac{d}{c + \cfrac{d}{c + \cfrac{d}{c + \cfrac{d}{a_{n-3}}}}}$$

y cuando $c \geq 1$ y $0 \leq d \leq c^2$, hemos probado que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell = \frac{c+\sqrt{c^2+4d}}{2}\,.$$

Por ejemplo,

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}} \qquad \text{corresponde a} \qquad c = d = 1\,,\ \ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

mientras

$$2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}} \qquad \text{corresponde a} \qquad c = 2\,,\ d = 1\,,\ \ell = 1 + \sqrt{2}\,.$$

o bien

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}} \qquad \text{corresponde a} \qquad c = 1\,,\ d = \frac{1}{2}\,,\ \ell = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\,.$$