NOMBRE: D.N.I.:

[1] (5 PUNTOS) Dada la función

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{5}{4}\sqrt{x+2}\,, & \text{para } x < -1 \\ x\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}\,, & \text{para } -1 \le x \le 1 \\ \frac{1}{1+(x-1)^2}\,, & \text{para } x > 1 \end{cases} \tag{1}$$

responder a las siguientes preguntas, *justificando razonadamente las respuestas.*
(a) Esbozar la grafica de la función (dominio, limites, derivada(s), máx, mín, ...)
(b) ¿Es verdad que $-1 \le f(x) \le 1$ para cada $x \in \mathrm{dom}(f)$?
(c) ¿Es la función f continua en su dominio? ¿ Cuantas soluciones tiene la ecuación $f(x) = 0$? ¿Cuantas soluciones tiene la ecuación $f(x) = \frac{1}{2}$? Encontrar intervalos de forma que cada uno contenga una y solo una de las soluciones de $f(x) = 0$ y de $f(x) = \frac{1}{2}$. Probar que la ecuación $f(x) = b$ no tiene solución para $b > 1$ y para $b < -1$.
(d) ¿Es la función f derivable en su dominio? Escribir la expresión de f' en todos los puntos en los cuales existe. Esbozar la grafica de f'. Encontrar y clasificar los puntos críticos $f'(x) = 0$. ¿Son los puntos crtícos puntos de máximo o mínimo para f? Encontrar todos los puntos de máximo y mínimo de f, locales y globales.

Solución.
(a) Primero observamos que el dominio natural (o algebraico) de la función es dado por $\mathrm{dom}(f) = [-2, +\infty) \setminus \{0\}$, dado que cuando $x < -1$ la función $\sqrt{x+2}$ es bien definida solo para $x \ge -2$, y también hay un problema en $x \exp\left(-\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\right)$ cuando $x = 0$. Luego hallamos los limites en los extremos del dominio:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{4}\sqrt{x+2}\right) = \frac{1}{4}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+(x-1)^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x^2}-1\right)} = 0\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x^2}-1\right)} = 0\,,$$

y el unico límite que se tiene realmente que justificar es

$$0 = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{|x|^\alpha} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{|t|^\alpha}{\mathrm{e}^{t^2}} \tag{2}$$

he usado la substitución $t = 1/x$, $t \to \pm\infty$ as $x \to 0^\pm$. Hallando los limites para $x \to \pm 1^\pm$,

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{4}\sqrt{x+2}\right) = -1\,, \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} x\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x^2}-1\right)} = -1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x^2}-1\right)} = 1\,, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1+(x-1)^2} = 1\,,$$

se prueba claramente que la función es continua en todo el intervalo $[-2, +\infty)$. Más precisamente podemos decir que existe una función $\tilde{f}$ definida y continua en todo $\mathrm{dom}(\tilde{f}) = [-2, +\infty)$, que extiende la función f, definida en $\mathrm{dom}(f) = [-2, +\infty) \setminus \{0\}$. $\tilde{f}$ se llama extension continua de f o extension de f por continuidad.

Estudio de la derivada primera. Ahora derivamos la función f:

$$f'(x) := \begin{cases} -\frac{5}{8\sqrt{x+2}} < 0\,, & \text{para } x < -1\,, \quad \text{entonces } f \text{ es decreciente aqui} \\ \left(1+\frac{2}{x^2}\right) e^{-\left(\frac{1}{x^2}-1\right)} \geq 0\,, & \text{para } -1 < x < 1\,, \quad \text{entonces } f \text{ es non-decreciente aqui} \\ -\frac{2(x-1)}{\left(1+(x-1)^2\right)^2} < 0\,, & \text{para } x > 1\,, \quad \text{entonces } f \text{ es decreciente aqui} \end{cases} \tag{3}$$

Luego calculamos los limites $x \to \pm 1^{\pm}$, $x \to 0^{\pm}$, $x \to -2^{+}$ y $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to -2^+} f'(x) = \lim_{x\to -2^+} -\frac{5}{8\sqrt{x+2}} = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to +\infty} f'(x) = \lim_{x\to +\infty} -\frac{2(x-1)}{\left(1+(x-1)^2\right)^2} = 0^-$$

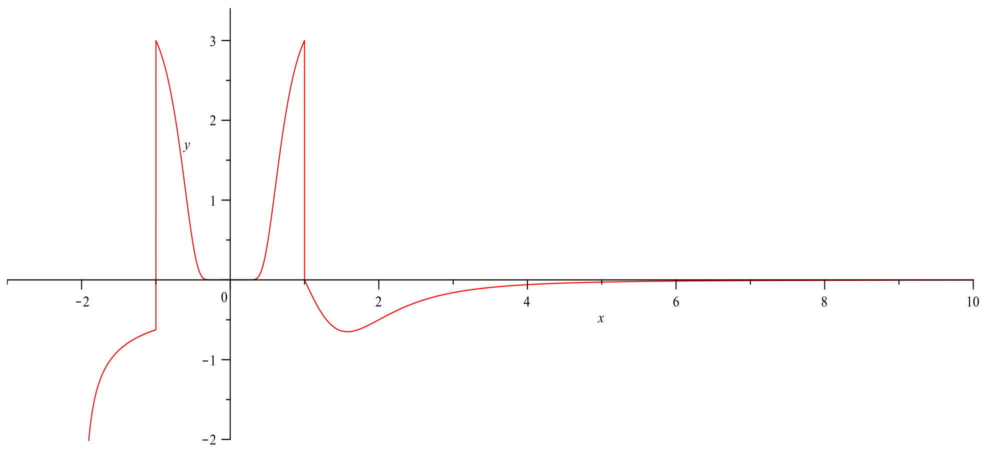
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(1+\frac{2}{x^2}\right) e^{-\left(\frac{1}{x^2}-1\right)} = 0\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(1+\frac{2}{x^2}\right) e^{-\left(\frac{1}{x^2}-1\right)} = 0\,,$$

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^-} -\frac{5}{8\sqrt{x+2}} = -\frac{5}{8}\,, \qquad \lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to -1^+} \left(1+\frac{2}{x^2}\right) e^{-\left(\frac{1}{x^2}-1\right)} = 3$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(1+\frac{2}{x^2}\right) e^{-\left(\frac{1}{x^2}-1\right)} = 3\,, \qquad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} -\frac{2(x-1)}{\left(1+(x-1)^2\right)^2} = 0\,,$$

y concluimos que la función f no es derivable en los puntos $x_1 = \pm 1$, $x_2 = -2$, es decir que la función f' no es continua en los puntos $x_1 = \pm 1$ (discontinuidad de tipo salto finito) y $x_2 = -2$ (discontinuidad de tipo salto infinito), ambas discontinuidades no eliminables.

(d) Concluimos de los apartados anteriores que la función f es derivable en todo el conjunto $I' = (-2, +\infty) \setminus \{\pm 1\}$, y f' es continua en I' y su expresión es (3) y su grafica: Finalmente



vemos que los puntos críticos, es decir los $x \in I'$ tales que $f'(x) = 0$, son solo $x = 0$, que no es ni máximo ni minimo. El punto $x = 1$ es tal que $f'_+ = 0$ y $f'_- = 3$, y no resulta ser máximo local, aunque la derivada no se anule. El punto $x = -1$ es tal que $f'_+ = 3$ y $f'_- = -5/8$, y no resulta ser mínimo local, aunque la derivada no se anule en $x = -1$. Estudiamos los máximos y mínimos locales y globales en el proximo apartado.

Máximos y mínimos locales. Estos puntos se pueden encontrar donde la derivada cambia de signo, o bien donde la derivada no existe, o bien en los extremos del dominio de continuidad, que en este caso es $[-2, +\infty)$.

$x = 0$) Este punto no es ni de máximo ni de mínimo, aunque $f'(0) = 0$, dado que la derivada no cambia de signo alrededor de $x = 0$, y la función f es monotona creciente (non-decreciente) en todo el intervalo $[-1, 1]$.

$x = -1$) este punto es un mínimo local. La función f no es derivable en este punto, pero $f' < 0$ cuando $x < -1$ y $f' > 0$ cuando $x > -1$, por lo tanto f decrece cuando $x < -1$ y cresce cuando $x > -1$, y eso basta para concluir que $x = -1$ es un punto de mínimo local.

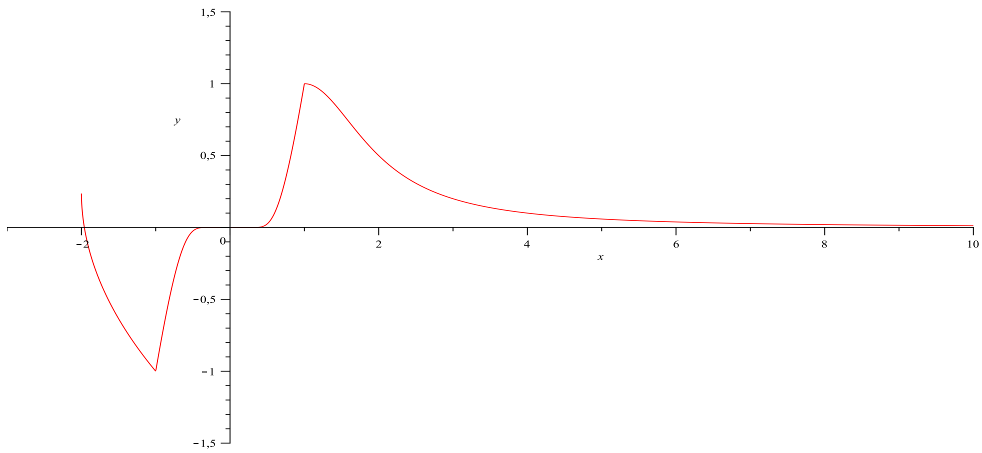
$x = 1$) este punto es un máximo local. La función f no es derivable en este punto, pero $f' > 0$ cuando $x < 1$ y $f' < 0$ cuando $x > 1$, por lo tanto f crece cuando $x < 1$ y decresce cuando $x > 1$, y eso basta para concluir que $x = 1$ es un punto de máximo local.

Máximos y mínimos globales.

$x = -1$) Mínimo global. Sabemos que en el intervalo $[-2,-1]$ la función f es monotona decreciente, por lo tanto $f(x) \geq f(-1) = -1$. En el intervalo $[-1,1]$ la función es monotona creciente, por lo tanto $f(x) \geq f(-1) = -1$. En el intervalo $[1,+\infty)$ la función es decreciente, pero siempre positiva y su limite a $+\infty$ es cero, lo cual implica que $f(x) \geq -1$ también para $x \in [1,+\infty)$. Hemos probado que $f(x) \leq 1 = f(1)$ para cada $x \in [2,+\infty)$, es decir que $x = -1$ es mínimo global.

$x = 1$) Máximo global. Sabemos que en el intervalo $[-2,-1]$ la función f es monotona decreciente, por lo tanto $f(x) \leq f(-2) = \frac{1}{4} \leq 1 = f(1)$. En el intervalo $[-1,1]$ la función es monotona creciente, por lo tanto $f(x) \leq f(1) = 1$. En el intervalo $[1,+\infty)$ la función es decreciente, por lo tanto será menor que su valor en $x = 1$. Hemos probado que $f(x) \leq 1 = f(1)$ para cada $x \in [2,+\infty)$, es decir que $x = -1$ es máximo global.

La grafica de f resulta ser:



(b) Dado que la función tiene máximo $f(1) = 1$ y mínimo $f(-1) = -1$ que son globales, resulta que $f(-1) = -1 \leq f(x) \leq 1 = f(1)$ para todo $x \in [-2,+\infty)$ y en particular para cada $x \in \mathrm{dom}(f)$.

(c) La función f, que identificaremos desde ahora en adelante con su extension continua $\tilde{f}$, es continua en todo $[-2,+\infty)$. Por el teorema de los valores intermedios, sabemos que las ecuaciones $f(x) = b$ tienen por los menos una solución si $-1 \leq b \leq 1$, mientras no pueden tener solución si $b < -1$ o si $b > 1$, dado que esto seria en contraste con el apartado **(b)**. Ahora tenemos que estudiar el numero de las soluciones de la ecuaciones $f(x) = 0$, $f(x) = 1/2$, indicando aproximadamente donde están dichas soluciones.

$f(x) = 0$] Observando la grafica de la función, notamos que debería haber 2 soluciones de esta ecuación. La mas fácil de encontrar es $x = 0$, donde $f(0) = 0$, dado que ya hemos calculado el limite. Hay otra solución que se encuentra en el intervalo $[-2,-1]$ por el teorema de los ceros, dado que f es continua en dicho intervalo y $f(-2) = 1/4 > 0$, y $f(-1) = -1 < 0$. Si queremos ser un poco mas precisos, podemos resolver explícitamente la ecuación $f(x) = 0$ en $[-2,-1]$

$$f(x) = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}\sqrt{x+2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{5} = \sqrt{x+2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{1}{25} - 2\,.$$

$f(x) = \frac{1}{2}$] Observando la grafica de la función, notamos que debería haber 2 soluciones de esta ecuación. La primera se encuentra en el intervalo $[0,1]$, dado que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$, y f es creciente en $[0,1]$, o bien por el teorema de los valores intermedios. La segunda se encuentra en el intervalo $[1,3]$, dado que $f(1) = 1$, $f(3) = \frac{1}{5}$ y f es decreciente en $[1,3]$, o bien por el teorema de los valores intermedios. No puede haber otras soluciones de $f(x) = \frac{1}{2}$ en el intervalo $[3,+\infty)$, dado que f es estrictamente decreciente allí y $f(3) < 1/2$. En el intervalo $[-2,0]$ no hay soluciones de $f(x) = \frac{1}{2}$, dado que $-1 \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$.

Si queremos ser mas precisos, podemos resolver explícitamente la ecuación $f(x) = \frac{1}{2}$ en $[1, +\infty)$:

$$f(x) = \frac{1}{1+(x-1)^2} = \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x-1)^2 = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 2\,.$$

No es posible resolver explícitamente la ecuación $f(x) = \frac{1}{2}$ en $[0, 1]$:

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x^2}-1\right)} = \frac{1}{2}\,,$$

por lo tanto calculamos la función en unos puntos, para poder localizar mas precisamente la solución:

$$f(0{,}5) = 0{,}02489353418 < 0{,}5\,, \quad f(0{,}8) = 0{,}4558262598 < 0{,}5\,, \quad f(0{,}85) = 0{,}5789136352 > 0{,}5$$

entonces $f(x_0) = 1/2$ con $0{,}8 < x_0 < 0{,}85$. $\square$

(*) [Preguntas a responder solo si ya está hecho todo el resto del examen] ¿Cuantas derivadas continuas existen en $x_0 = 0$? ¿Que sabes decir del orden de contacto en $x_0 = 0$? Escribir el polinomio de Taylor de f en $x_0 = 0$, hasta el orden 4: este polinomio es o no es una "buena aproximación" de la función en el intervalo $(-0{,}01\,,\,0{,}01)$?

La función

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}$$

es derivable infinitas veces en $x = 0$, y sus derivadas tienen todas la forma

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}$$

donde $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ es un polinomio de orden menor igual que $3n$, en la variable $\frac{1}{x}$, por ejemplo

$$P_1\left(\frac{1}{x}\right) = \left(1+\frac{2}{x^2}\right)\,,\quad P_2\left(\frac{1}{x}\right) = \left(-\frac{2}{x^3}+\frac{4}{x^5}\right)\,,\quad P_3\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{6}{x^4}-\frac{24}{x^6}+\frac{8}{x^8}\right)\,,$$
$$P_4\left(\frac{1}{x}\right) = \left(-\frac{24}{x^5}+\frac{156}{x^7}-\frac{112}{x^9}+\frac{16}{x^{11}}\right)\,,\quad P_5\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{120}{x^6}-\frac{1140}{x^8}+\frac{1320}{x^{10}}-\frac{400}{x^{12}}+\frac{32}{x^{14}}\right)\,.$$

Gracias a la formula (2), sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to 0^\pm} P_n\left(\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

por lo tanto sabemos que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \geq 0$. El polinomio de Taylor en $x_0 = 0$ resulta ser el polinomio nulo y

$$f(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R(x,x_0) = R(x,x_0)$$

por lo tanto el resto $R(x, x_0)$ coincide con la función, es decir que el error que cometemos en la aproximación es del mismo tamaño de la función que intentamos aproximar, lo que implica que la aproximación con el polinomio de Taylor es muy mala cerca de cero. De hecho uno esperaría tener la función nula en el intervalo $(-0{,}01\,,\,0{,}01)$ si la aproximación fuese buena, pero se observa que

$$f(\pm 0{,}01) = \pm 3{,}086565158\cdot 10^{-4345} \neq 0\,, \qquad \text{y} \qquad f(\pm 0{,}1) = \pm 1{,}011221493\cdot 10^{-44} \neq 0\,.\ \square$$

[2] (2.5 PUNTOS) Calcular el siguiente límite (es útil usar el desarrollo de Taylor)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\mathrm{e}^{\operatorname{sen}(x)} - 1\right)\,\left(x - \operatorname{sen}(x)\right)}{\left(x - \log(1+x)\right)}\,.$$

Solución. En primer lugar calculamos unos desarrollos de Taylor en $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \qquad \text{entonces} \qquad x - \operatorname{sen}(x) = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \qquad \text{entonces} \qquad x - \log(1+x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)
\end{aligned}$$

además,

$$\mathrm{e}^{\operatorname{sen}(x)} - 1 = \operatorname{sen}(x) + \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{2} + \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{3!} + o(\operatorname{sen}^3(x)) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

dado que $\operatorname{sen}(x) = x + o(x)$ cuando x esta cerca de $x_0 = 0$, y esta ultima expresión es el polinomio de Taylor de $\mathrm{e}^{\operatorname{sen}(x)} - 1$ en $x_0 = 0$, dado que el resto es $o(x^3)$, y sabemos que bajo estas condiciones el polinomio que aproxima es unico. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\left(\mathrm{e}^{\operatorname{sen}(x)} - 1\right)\,\left(x - \operatorname{sen}(x)\right)}{\left(x - \log(1+x)\right)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right]\,\left[\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right]}{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{3!} + o(x^4)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{3!}\,\frac{2}{x^2} = 0\,,
\end{aligned}$$

dado que podemos ignorar los infinitesimos de orden inferior y sabemos que $o(x^4)/x^2 \to 0$ cuando $x \to 0$. $\square$

[3] (2.5 PUNTOS) Discutir la convergencia (absoluta y condicional) de la siguiente serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \cos(\pi\, k) \frac{1+2+3+\cdots+k}{k\,(k+1)^2\, \log(1+k)}\,.$$

Solución. En primer lugar observamos que

$$1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2} \qquad \text{y que} \qquad \cos(\pi\, k) = (-1)^{k+1}$$

así que tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} \cos(\pi\, k) \frac{1+2+3+\cdots+k}{k\,(k+1)^2\, \log(1+k)} &= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k(k+1)}{2\,k\,(k+1)^2\, \log(1+k)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(1+k)\, \log(1+k)} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\, \log(n)}\end{aligned}$$

dado que he puesto $n = k+1$ en el ultima igualdad. La serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\, \log(n)}$ no es de términos positivos, por lo tanto hay dos posibilidades de convergencia: absoluta o condicional.
Convergencia absoluta. La serie no converge absolutamente: tomando la serie de los valores absolutos, se ve claramente que no converge absolutamente, dado que

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\log n)^\alpha} = \begin{cases} < +\infty & \text{cuando } \alpha > 1\,, \\ = +\infty & \text{cuando } \alpha \leq 1\,, \end{cases} \tag{4}$$

y eso se prueba usando el criterio de codensación:

$$\sum_{n\geq 2} \frac{2^n}{2^n (\log 2^n)^\alpha} = \frac{1}{(\log 2)^\alpha} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} < +\infty & \text{cuando } \alpha > 1\,, \\ = +\infty & \text{cuando } \alpha \leq 1\,, \end{cases}$$

sabiendo la convergencia de la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (que también se obtiene por el criterio de condensación.)
Convergencia condicional. La serie converge condicionalmente por el criterio de Leibnitz: es una serie alternada del tipo $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$ con termino general a_n monotono decreciente y que tiende a cero:

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\log(n+1)} \leq a_n = \frac{1}{n\log(n)} \to 0\,.$$

Resumiendo, la serie converge condicionalmente pero no absolutamente. □