NOMBRE: D.N.I.:

1. A través de este ejercicio queremos demostrar la existencia de la siguiente integral impropia:

$$I = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx. \quad \text{Para ello definimos} \quad a_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx, \quad \text{si } k = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Probar que la serie $\sum a_k$ cumple las condiciones del criterio de convergencia de series alternadas de Leibniz.

b) Demostrar que si $0 < A < B$ entonces se tiene

$$\left| \int_A^B \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \right| \leq \frac{3}{A}. \qquad (\textit{Integrar por partes y acotar.})$$

c) Concluir que la integral impropia existe y que, de hecho, se tiene

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k. \qquad \left(Nota: \quad \sum_{k=0}^{n} a_k = \int_0^{(n+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \right)$$