

Universidad Autónoma de Madrid

Facultad de Ciencias

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Segundo Curso de Matemáticas.

Febrero 2010

Apellidos Nombre.....

D.N.I. Grupo

Ejercicio 1. (2.5 puntos) Hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales

$$y' = \frac{2x + 4y + 9}{x + 2y}, \quad y'' - 2y' + 5y = e^t \cos(t).$$

Ejercicio 2. (2.5 puntos) Resolver el sistema lineal

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3. (2.5 puntos) Dado el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \begin{cases} x\sqrt{|y|} (1 - \sqrt{|y|})^4 & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \text{ o si } y \geq 1 \end{cases} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

- (a) ¿Para qué datos iniciales $y_0 \in \mathbb{R}$ la solución existe y/o es única localmente?
- (b) Resolver explícitamente la ecuación y contrastar los resultados con los obtenidos en el apartado (a).
- (c) Esbozar razonadamente el campo de las pendientes y las soluciones en el plano (x, y) .

Ejercicio 4. (2.5 puntos) Estudiar la estabilidad del origen como punto crítico del sistema

$$\begin{cases} x' = -2xy - x^3 \\ y' = x^2 - y^5 \end{cases}$$

(Indicación: buscar una oportuna función de Lyapunov.)

Atención: El ejercicio (*), escrito al dorso de esta página sólo se calificará a aquellos alumnos que hayan obtenido una nota superior a 8 puntos en los cuatro problemas anteriores, y, en su caso, servirá para asignar las posibles Matrículas de Honor.

Ejercicio (*). Dado el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -\frac{y(x)}{x} + y(x)^\alpha, & \text{para } x > x_0 \\ y(x_0) = y_0, & \text{para } x_0 > 0 \end{cases}$$

- (a) Sea $\alpha = 3$. ¿Para qué datos iniciales $y_0 \in \mathbb{R}$ la solución existe y/o es única localmente?
¿Que sabes decir de existencia y unicidad globales? Poniendo $x_0 = 1$ y $y_0 = \frac{1}{2}$, justificar que la solución existe hasta $x = 3$.
- (b) Sea $\alpha = \frac{1}{3}$. ¿Para qué datos iniciales $y_0 \in \mathbb{R}$ la solución existe y/o es única localmente?
¿Que sabes decir de existencia y unicidad globales?
- (c) Resolver explícitamente la ecuación con $\alpha = 3$ y $\alpha = \frac{1}{3}$, y contrastar los resultados con los obtenidos en los apartados (a) y (b).
- (d) Pongamos $x_0 = 0$. Sea $\alpha = 3$ y $\alpha = \frac{1}{3}$. ¿Para qué datos iniciales $y_0 = y(0) \in \mathbb{R}$ la solución existe y/o es única localmente?
-