Problemas de Geometría Diferencial, Máster

Primer semestre, 2010/2011. Hojas 6 y 7.

Entrega: martes 1 de Febrero en mi casillero.

---

1. Sea G un grupo que actúa sobre una variedad M. Si la acción es libre y propiamente discontinua, entonces hay una estructura diferencial en el cociente M/G de tal forma que la aplicación cociente $\pi : M \to M/G$ es un difeomorfismo local (los detalles pueden consultarse en el libro de Boothby, pgs. 96-98).

1. Se dice que un grupo G actúa por isometrías en una variedad Riemanniana si para cada $g \in G$, la aplicación $\theta_g : M \to M$, $\theta_g(p) = g \cdot p$ es una isometría. Demuestre que si la acción es además libre y propiamente discontinua, entonces M/G admite una métrica riemanniana tal que $\pi : M \to M/G$ es una isometría local.
2. Use lo anterior para construir una métrica en el toro T^n localmente isométrica al plano.
3. Halle una inmersión de T^n en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^{2n}$ de tal forma que la métrica inducida en T^n sea isométrica a la hallada en el apartado anterior.

---

2. Consideramos el conjunto G de las funciones $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma $g(t) = yt + x$, $t, x, y \in \mathbb{R}$, $y > 0$. G se puede parametrizar por el semiplano superior de $\mathbb{R}^2$, y por tanto admite una estructura diferencial.

1. Demuestre que, con la composición de funciones, G es un grupo de Lie.
2. Halle los coeficientes de la métrica invariante por la izquierda que coincide con la métrica euclídea en la identidad de G.
3. Viendo G como un subconjunto de $\mathbb{C}$, demuestre que las aplicaciones

$$f : G \to G, \qquad f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1$$

son isometrías de la métrica anterior.

---

3. Sean X e Y dos campos de vectores en una variedad Riemanniana M. Si $p \in M$ y $c : I \to M$ es una curva integral de X con $c(0) = p$, demuestre que

$$(\nabla_X Y)_p = \frac{d}{dt}\left(P_{c,0,t}^{-1}(Y(c(t)))\right)|_{t=0}$$

donde $P_{c,0,t} : T_pM \to T_{c(t)}M$ es el transporte paralelo a lo largo de c desde 0 hasta t.

---

4. Si $p \in M$, consideramos la curva (constante) $\alpha : I \to M$, $\alpha(t) = p$ para todo $t \in I$. Sea V un campo de vectores a lo largo de al (esto es, para cada $t \in I$, tenemos un $V(t) \in T_pM$. Demuestre que en este caso $\frac{DV}{dt} = \frac{dV}{dt}$.

---

5. Si G es un grupo de Lie con una métrica biinvariante, demuestre que las geodésicas que pasan por la identidad son los grupos uniparamétricos de G.

---

6. Un campo de vectores X en una variedad Riemanniana se llama *de Killing* si su flujo está dadao por isometrías, i.e, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\theta_t : M \to M$ es una isometría (asumimos para el problema que el campo es completo).

1. Identificamos los campos de vectores de $\mathbb{R}^n$ con las aplicaciones $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; si tenemos un campo X definido como $X_p = A \cdot p$ para alguna matriz A, demuestre que X es de Killing sii A es una matriz antisimétrica.

2. Sea X un campo de Killing en una variedad M, y $p \in M$ un punto con un entorno normal U. Si en U, X sólo se anula en p, entonces demuestre que X es tangente a las esferas geodésicas centradas en p.

3. Demuestre que si $F : M \to N$ es una isometría, X es un campo de vectores en M, e $Y = F_*X$, entonces X es de Killing sii Y es de Killing.

4. Demuestre que X es un campo de Killing sii para todos $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle = 0.$$

---

7. Demuestre que si X es un campo de Killing en una variedad conexa con $X_p = 0$, y con $\nabla_Y X(p) = 0$ para todo $Y_p \in T_pM$, entonces $X \equiv 0$.

---

8. Sea M una variedad riemanniana de dimensión n, $p \in M$. Demuestre que hay un entorno U de p y campos de vectores $E_1, \ldots, E_n$ en U tal que

1. $E_1, \ldots, E_n$ son ortonormales en cada punto de U;

2. $\nabla_{E_j(p)} E_i = 0$ para todos $1 \leq i, j \leq n$.

---

9. En una variedad Riemanniana definimos

- la *divergencia* de un campo de vectores como la función $\operatorname{div} X : M \to \mathbb{R}$, $\operatorname{div} X = \operatorname{traza} Y_p \to \nabla_{Y_p} X$ en T_pM;

- el *gradiente* de una función $f : M \to \mathbb{R}$ como el único campo de vectores $\operatorname{grad} f$ que cumple $\langle \operatorname{grad} f_p, v\rangle = v(f)$ en cada $p \in M$;
- el *laplaciano* de una función f como $\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f$.

Demuestre que:

$$\Delta(f \cdot g = f \, \Delta g + g \, \Delta f + 2 \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g\rangle$$

---

10. Sea X un campo de Killing en M. Definimos la función $f : M \to \mathbb{R}$, $f(p) = \langle X, X\rangle (p)$. Sea $p \in M$ un punto para el que $df_p = 0$. Demuestre que para cualquier campo de vectores Z,

1. $\langle \nabla_Z X, X\rangle (p) = 0$;
2. $\langle \nabla_Z X, \nabla_Z X\rangle (p) = \frac{1}{2} Z_p(Z(\langle X, X\rangle) + \langle R(X, Z)X, Z\rangle (p)$
3. Use lo anterior para demostrar que en una variedad compacta de dimensión par con curvatura seccional positiva, todo campo de Killing tiene un cero.

---

11. Sea M una variedad con curvatura seccional no positiva. Demuestre que para todo $p \in M$, el lugar conjugado $C(p)$ es vacío.
