Problemas de Geometría Diferencial, Máster

Primer semestre, 2010/2011. Hojas 4 y 5.

Entrega: martes 11 de Enero.

---

1. Sea G un grupo de Lie, y $H \subset G$ un subgrupo algebraico.

1. Demuestre que la clausura $\bar{H}$ de H es un subgrupo algebraico.
2. Si H es abierto, demuestre que gH es abierto para cada $g \in G$.
3. Si H es abierto, demuestre que H es cerrado.

2.

Sea G un grupo de Lie conexo, y U un entorno abierto de la identidad e. Denotamos

$$U^n := \{\, a_1 \dots a_n \;:\; a_i \in U \,\}$$

1. Demuestre que U^{n+1} es un abierto con $U^n \subseteq U^{n+1}$;
2. demuestre que $G = \cup_n U^n$;
3. demuestre que la componente conexa de G que contiene la identidad es un subgrupo de Lie normal en G.

---

3. Sea G un grupo de Lie. Definimos el grupo de Lie G^{op} como la variedad diferencial G pero con el producto $\odot$ definido como $g \odot h := hg$. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, definimos por $\mathfrak{g}^{op}$ al espacio vectorial $\mathfrak{g}$ donde el nuevo corchete es $[X,Y]^{op} = -[X,Y]$.

1. Demuestre que G^{op} es un grupo de Lie, y que $F : G \to G^{op}$ dada por $F(g) = g^{-1}$ es un ismorfismo de grupos de Lie.
2. Demuestre que $\mathfrak{g}^{op}$ es un álgebra de Lie, y que $F_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^{op}$, $X \to -X$ es un isomorfismo.
3. Demuestre que el álgebra de Lie de G^{op} es isomorfa a $\mathfrak{g}^{op}$.
4. Si tomamos en G los campos de vectores invariantes por la derecha con el corchete de Lie, obtenemos un álgebra de Lie. Demuestre que este álgebra es isomorfa a $\mathfrak{g}^{op}$.
5. Use los puntos anteriores para demostrar que si G es abeliano, $\mathfrak{g}$ es abeliana (i.e, su corchete es nulo).

4. Sea $(U, \phi = (x_1, \ldots, x_n))$ una carta de la identidad e en un grupo de Lie G con $\phi(e) = 0$, y $V \subset U$ un entorno abierto de e tal que $V^2 \subset U$.

1. Supongamos que la expresión local de la multiplicación del grupo $m : G \times G \to G$ está dada en las cartas $(V \times V, \phi \times \phi)$ y (U, ϕ) como

$$\bar{m}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)).$$

   Halle la matriz diferencial de $\bar{m}$ en $(0, 0)$.

2. Use lo anterior para demostrar que si $\alpha, \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ son curvas suaves con $\alpha(0) = \beta(0) = e$, entonces la curva $\gamma : I \to G$ con $\gamma(t) = \alpha(t)\beta(t)$ cumple $\gamma'(0) = \alpha'(0) + \beta'(0)$.

---

5. Si G es un grupo de Lie, demuestre que el fibrado tangente TG admite una multiplicación que le convierte en grupo de Lie.

---

6. Denotamos por $\mathbb{R}^*$ al grupo de Lie $(\mathbb{R} \setminus 0, \cdot)$ con la multiplicación. Recuerde que $\det : Gl(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ es un homomorfismo de grupos de Lie. Halle $\det_* : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, y úselo para demostrar que para todas $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ se tiene que $\operatorname{trace} AB = \operatorname{trace} BA$.

---

7. Demuestre que $\exp : \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \to GL(2, \mathbb{R})$ no es sobreyectiva demostrando, por ejemplo, que $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ no se halla en su imagen.

---

8. Sea G un grupo de Lie conexo, y sea $\phi : G \to H$ un homomorfismo de Lie con kernel discreto. Demuestre que $\ker \phi \subseteq Z(G)$.

---

9. Halle el álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ de $SU(2)$, y calcule

$$\exp \begin{pmatrix} ix & 0 \\ 0 & -ix \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}; \qquad \exp \begin{pmatrix} 0 & \bar{z} \\ -\bar{z} & 0 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{C}$$

---

10. En el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 0 \\ -\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Demuestre que E_{12}, E_{13}, E_{23} forman una base de $\mathfrak{so}(3)$;

2. escriba ad_A en la base anterior.

---

11. Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Definimos una forma bilineal B en $\mathfrak{g}$ como

$$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}, \quad B(X,Y) = \mathrm{trace}(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y).$$

1. Demuestre que B es una forma simétrica;
2. demuestre que $B(X,Y) = B(\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y)$ para todo $g \in G$;
3. demuestre que si G es abeliano, $B \equiv 0$;
4. sea $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ el centro de $\mathfrak{g}$; demuestre que para todo $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}), Y \in \mathfrak{g}$, $B(X,Y) = 0$;
5. si $G = U(2)$ y $X \in \mathfrak{u}(2)$ es una matriz diagonal con $B(X,Y) = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{u}(2)$, demuestre que $X = i\theta I$ para algún $\theta \in \mathbb{R}$ (I es la matriz identidad);
6. demuestre que las únicas matrices diagonales en el centro de $U(2)$ son de la forma $e^{i\theta} I$.
