Problemas de Geometría Diferencial, Máster

Primer semestre, 2010/2011. Hoja 2.

Entrega: martes 26 de octubre.

---

1. Sea M una variedad diferencial, $p \in M$ y $(U, \phi = (x_1, \ldots, x_n)$ una carta en p.

1. Si $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ es una curva suave con $\alpha(0) = p$, escriba $\alpha'(0)$ en la base de vectores coordenados.
2. Si $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ es otra curva suave con $\beta(0) = p$, dé (con ayuda de la carta) una curva suave $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ con $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = a\alpha'(0) + b\beta'(0)$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

---

2. Si $F : M \to N$ es una aplicación suave, hay una aplicación natural $dF : TM \to TN$ definida como $dF(p, v) = (F(p), dF_p(v))$. Demuestre que dF es una aplicación suave. Si F es una inmersión, ¿es dF una inmersión?

---

3. Demuestre que la restricción del campo

$$Y = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + x_{2n} \frac{\partial}{\partial x_{2n-1}} - x_{2n-1} \frac{\partial}{\partial x_{2n}}$$

a la esfera unidad S^{2n-1} es un campo de vectores suave (y que nunca se anula).

---

4. Supongamos que $F : N \to M$ es suave, que X es un campo de vectores en N, y que Y es un campo de vectores en N F-relacionado con X. Entonces Y está unívocamente determinado si y sólo si $F(N)$ es denso en M (para este problema use que dada una carta (U, ϕ) en un punto p de una variedad, existe una función suave $f : M \to \mathbb{R}$ con soporte contenido en U, y que vale 1 en un entorno de p).

---

5. Para este problema vemos $M = Gl(2, \mathbb{R})$ como una variedad abierta de $M(2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$. Definimos una acción de $\mathbb{R}$ en M como

$$\theta(t, A) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A, \qquad A \in M,$$

Hallar el generador infinitesimal en la carta más sencilla posible, por favor.
