GEOMETRÍA DIFERENCIAL, MÁSTER DE MATEMÁTICAS (UAM)
Primer semestre, 2010/2011. Hoja de problemas nº 1.

---

1. Demuestre que la aplicación de Segre $F : \mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{RP}^3$ definida como

$$F([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = [x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2]$$

es diferenciable.

---

2. Para $p = ([1, 0], [0, 1])$, halle la matriz de dF_p en la base de vectores coordenados para las cartas $(U_1 \times U_1, \phi_1 \times \phi_1)$ en p y (V_2, ψ_2) en $F(p)$, donde $\phi_1[x_1, x_2] = x_2/x_1$ y $\psi_2[y_1, \ldots, y_4] = (y_1/y_2, \ldots, y_4/y_2)$.

---

3. En este ejercicio hallaremos una subvariedad inmersa del toro con imagen densa.

1. Sea $T^2 = S^1 \times S^1$ el toro con su estructura producto. Demostrar que la aplicación $F : \mathbb{R}^2 \to T^2$ dada por $F(t_1, t_2) = (\exp 2\pi i t_1, \exp 2\pi i t_2)$ es un difeomorfismo local en cada punto.

2. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ un numero irracional y definamos $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ como $G(t) = (t, \alpha t)$; demostrar que $H = F \circ G$ es una inmersion inyectiva de $\mathbb{R}$ en T^2, y por consiguiente que $H(\mathbb{R})$ es una subvariedad de T^2.

3. Demostrar que si $F^{-1}(H(\mathbb{R}))$ es denso en $\mathbb{R}^2$, entonces $H(\mathbb{R})$ lo es en T^2.

4. Denotamos por $D := F^{-1}(H(\mathbb{R}))$. Demostrar que coincide con el conjunto de líneas en $\mathbb{R}^2$ con ecuación $y = \alpha x + (n - \alpha m)$, donde n y m son enteros.

5. Demostrar que D es denso en $\mathbb{R}^2$ si los puntos de D en el eje OY forman un subconjunto denso de ese eje.

6. Terminar la demostración usando que para nuestro α, existen enteros arbitrariamente grandes n, m con
$$\left|\frac{n}{m} - \alpha\right| < \frac{1}{m^2}$$
(esta desigualdad puede demostrarse mediante el uso de fracciones continuas, como por ejemplo aparece en ”Introduccion a la teoria de los numeros”, I. Niven y H. Zuckerman, secciones 7.5 y 7.6).

7. Ya de paso, demostrar que si α es racional, entonces $H(\mathbb{R})$ es una subvariedad regular de T^2 difeomorfa a S^1.

4. Si d es un entero positivo, la *variedad de Brieskorn* $W^{2n-1}(d)$ se define como el conjunto de puntos $(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ solución de las ecuaciones

$$\begin{aligned} z_0^d + z_1^2 + \cdots + z_n^2 &= 0 \\ |z_0|^2 + |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 &= 2 \end{aligned}$$

Demuestre que $W^{2n-1}(d)$ es una variedad de dimensión $(2n-1)$.

---

5. Sea $F : N \to M$ una inmersión inyectiva y *propia* (i.e, si $K \subset M$ es un conjunto compacto, $F^{-1}(K)$ es compacto en N); demuestre que F es un embebimiento, y que su imagen es una subvariedad regular *cerrada*.

---

6. Dé un ejemplo de una subvariedad N de una variedad M, y de una función suave $f : N \to \mathbb{R}$, tal que f no pueda obtenerse como restricción de una función suave $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$.
