Problemas de Geometría Diferencial, Máster

Primer semestre, 2009/2010. Semana 3.

---

1. En este ejercicio hallaremos una subvariedad inmersa del toro con imagen densa.

1. Sea $T^2 = S^1 \times S^1$ el toro con su estructura producto. Demostrar que la aplicación $F : \mathbb{R}^2 \to T^2$ dada por $F(t_1, t_2) = (\exp 2\pi i t_1, \exp 2\pi i t_2)$ es un difeomorfismo local en cada punto.

2. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ un numero irracional y definamos $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ como $G(t) = (t, \alpha t)$; demostrar que $H = F \circ G$ es una inmersion inyectiva de $\mathbb{R}$ en T^2, y por consiguiente que $H(\mathbb{R})$ es una subvariedad de T^2.

3. Demostrar que si $F^{-1}(H(\mathbb{R}))$ es denso en $\mathbb{R}^2$, entonces $H(\mathbb{R})$ lo es en T^2.

4. Denotamos por $D := F^{-1}(H(\mathbb{R}))$. Demostrar que coincide con el conjunto de líneas en $\mathbb{R}^2$ con ecuación $y = \alpha x + (n - \alpha m)$, donde n y m son enteros.

5. Demostrar que D es denso en $\mathbb{R}^2$ si los puntos de D en el eje OY forman un subconjunto denso de ese eje.

6. Terminar la demostración usando que para nuestro α, existen enteros arbitrariamente grandes n, m con
$$\left| \frac{n}{m} - \alpha \right| < \frac{1}{m^2}$$
(esta desigualdad puede demostrarse mediante el uso de fracciones continuas, como por ejemplo aparece en "Introduccion a la teoria de los numeros", I. Niven y H. Zuckerman, secciones 7.5 y 7.6).

7. Ya de paso, demostrar que si α es racional, entonces $H(\mathbb{R})$ es una subvariedad regular de T^2 difeomorfa a S^1.