Variedades: introducción

Luis Guijarro

UAM

22 de noviembre de 2010

Definición

Una variedad topológica de dimensión n es un espacio topológico Hausdorff M tal que cada punto $p \in M$ tiene un entorno homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Si M es una variedad topológica, $p \in M$, existen

- un abierto U en M conteniendo p;
- un abierto A en $\mathbb{R}^n$;
- un homeomorfismo $\phi : U \to A \subseteq \mathbb{R}^n$

Definición

(U, ϕ) se llama una carta de M en p. U se llama un entorno coordenado. ϕ es la aplicación coordenada.

Parametrizaciones.

(U, ϕ) una carta de M; $A = \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Entonces $\phi^{-1} : A \to M$ es un homeomorfismo sobre su imagen U.

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\xi : A \to M$ una aplicación con imagen $U = \xi(A)$. Si U es abierto en M, y si $\xi : A \to U$ es un homeomorfismo, entonces ξ se llama una parametrización en M.

Lema

$\xi : A \to M$ es una parametrización de M con imagen U si y sólo si (U, ξ^{-1}) es una carta de M.

Ejemplo: coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$.

Tomamos $M = \mathbb{R}^2$ con su topología usual. Vamos a construir una parametrización en $\mathbb{R}^2$ usando coordenadas polares.

Sea $A = (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ en $\mathbb{R}^2$, y $\xi(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$. Tenemos:

1. $\xi(A) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$
2. ξ continua, biyectiva sobre su imagen.

Para concluir que ξ es una parametrización, tenemos que calcular ξ^{-1} y comprobar su continuidad. Un cálculo elemental da $\xi^{-1}(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \theta(x, y))$, donde

$$\theta(x, y) = \begin{cases} \arctan y/x, & x > 0 \\ \operatorname{arccot}(x/y), & y > 0 \\ \operatorname{arccot}(x/y) - \pi, & y < 0 \end{cases}$$

Ejemplo: coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$ (cont).

Recordad que arctan $: \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ y que arccot $: \mathbb{R} \to (0, \pi)$. Los π,$-\pi$ que añadimos están ahí para poder asegurarnos que los valores de θ están en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

(Ejercicio: ¿Cómo cambiarían los valores de θ si $A = (0, 2\pi) \times (0, \infty)$?)

$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta(x, y)$ son continuas, así que ξ^{-1} es continua. Esto nos da:

1. $\xi : A \to \mathbb{R}^2$ es una parametrización (de un abierto de $\mathbb{R}^2$);
2. $\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}, \xi^{-1}\right)$ es una carta de la (por ahora) variedad topológica $\mathbb{R}^2$.

Algunas cosas útiles sobre cartas en un punto.

Sea $p_0 \in M$. Entonces siempre podemos asumir que tenemos cartas especiales en p_0:

$\boxed{\textbf{1. Una carta } (U, \phi) \textbf{ con } \phi(p_0) = 0\textbf{:}}$

Tomamos (V, ψ) una carta cualquiera en p_0 y hacemos $U = V$, $\phi(q) = \psi(q) - \psi(p_0)$.

$\boxed{\textbf{2. Una carta } (U, \phi) \textbf{ con } \phi(U) = B_\varepsilon(0) \textbf{ y } \phi(p_0) = 0\textbf{:}}$

Tomamos una carta (V, ψ) con $\psi(p_0) = 0$; como $\psi(V)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene a 0, entonces hay un $\varepsilon > 0$ con $B_\varepsilon(0) \subset \psi(V)$.Tomamos $U = \psi^{-1}(B_\varepsilon(0))$ y $\phi = \psi|_U$.

$\boxed{\textbf{3. Una carta } (U, \phi) \textbf{ con } \phi(U) = (-\varepsilon, \varepsilon)^n \textbf{ y } \phi(p_0) = 0\textbf{:}}$

Idéntico al caso anterior, pero reemplazando $B_\varepsilon(0)$ por $(-\varepsilon, \varepsilon)^n$.

Esto lo usaremos en demostraciones, teoría, etc, pero a menudo no tiene mucho uso en problemas de cálculo.

Cambios de coordenadas

Sea M una variedad, y (U, ϕ), (V, ψ) dos cartas de M con $U \cap V \neq \emptyset$.

1. $U \cap V$ es abierto en M (U, V lo son);
2. $\phi(U \cap V)$, $\psi(U \cap V)$ son abiertos en $\mathbb{R}^n$;
3. $\psi \circ \phi^{-1}$ tiene dominio $\phi(U \cap V)$ e imagen $\psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$;
4. $\phi \circ \psi^{-1}$ tiene dominio $\psi(U \cap V)$ e imagen $\phi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$.

Definición

$\psi \circ \phi^{-1}$, $\phi \circ \psi^{-1}$ *se llaman cambios de coordenadas.*

Son siempre homeomorfismos, y uno es el inverso del otro.

Notación: $\psi \circ \phi^{-1}$ es una aplicación de un abierto de $\mathbb{R}^n$ a un abierto de $\mathbb{R}^n$. Por ello tendrá el siguiente aspecto:

$$\psi \circ \phi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_n))$$

e.g, algo del estilo $(x_1, x_2) \to (e^{x_1} \cos x_2, e^{x_1} \sin x_2)$.

Ejemplo de un cambio de coordenadas.

En $M = S^2$ vamos a calcular el cambio de coordenadas entre las cartas dadas por las proyecciones estereográficas desde el polo norte y el polo sur.

- $U = S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$, $\phi(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$ es la carta estereográfica desde el polo norte.
- $V = S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$, $\psi(x,y,z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right)$ es la carta estereográfica desde el polo sur.

$U \cap V = S^2 \setminus \{(0,0,1),(0,0,-1)\}$,

- El dominio del cambio es $\phi(U \cap V) = \phi(U) \setminus \phi(0,0,-1) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;
- La imagen del cambio es $\psi(U \cap V) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Ejemplo de un cambio de coordenadas (cont).

$\phi^{-1}(u, v) = (x, y, z)$ si y sólo si $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $(x, y, z) \neq (0, 0, 1)$ (i.e, $(x, y, z) \in U$), y $\phi(x, y, z) = (u, v)$.

Esta última identidad nos da

$$u = \frac{x}{1-z}, \qquad v = \frac{y}{1-z}$$

De aquí sacamos

$$u(1-z) = x, \quad v(1-z) = y$$

Ahora usamos que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$:

$$u^2(1-z)^2 + v^2(1-z)^2 = x^2 + y^2 = 1 - z^2$$

Simplificamos (observad que estamos usando que $z \neq 1$ en U, ya que si no dividiríamos por cero):

$$(u^2 + v^2)(1-z)^2 = 1 - z^2, \qquad (u^2 + v^2)(1-z) = (1+z)$$

Ejemplo de un cambio de coordenadas (cont).

Y de aquí queda:

$$u^2 + v^2 - 1 = (1 + u^2 + v^2)z, \qquad z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}$$

$$1-z = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}, \quad x = u(1-z) = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \quad y = v(1-z) = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}$$

La inversa es:

$$\phi^{-1}(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right)$$

Ejemplo de un cambio de coordenadas (cont).

Ahora ya podemos calcular el cambio de coordenadas:

$$\psi \circ \phi^{-1}(u, v) = \\ = \psi\left(\left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right) = \left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}\right) \quad (1)$$

Observad que como el dominio de $\psi \circ \phi^{-1}$ excluye el $(0,0)$, esta aplicación está bien definida.

Cartas compatibles

Definición

Sean (U, ϕ), (V, ψ) cartas de M. Diremos que las cartas son compatibles si

- *o bien $U \cap V = \emptyset$,*
- *o bien $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ y $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$ son ambas diferenciables.*

Notación: $\psi \circ \phi^{-1}$ es una aplicación diferenciable, así que tendrá el siguiente aspecto:

$$\psi \circ \phi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_n))$$

donde cada función $y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n)$ será una función diferenciable en $x_1, \ldots, x_n$.

No todas las cartas son compatibles

Una pareja de cartas de las misma variedad topológica pueden ser compatibles, o pueden no serlo. Por ejemplo, ya en $M = \mathbb{R}$ hay cartas no compatibles:

- $(\mathbb{R}, \phi(t) = t)$ es una carta, ya que $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un homeomorfismo.
- $(\mathbb{R}, \psi(t) = t^3)$ es una carta, ya que $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un homeomorfismo.

Pero la carta $(\mathbb{R}, \psi(t) = t^3)$ no es compatible con $(\mathbb{R}, \phi(t) = t)$:

Demostración.

$U = V = \mathbb{R}$, $\psi \circ \phi(s) = s^3$, pero $\phi \circ \psi^{-1}(s) = s^{1/3}$, que no es diferenciable en $s = 0$. $\square$

Atlas diferencial de una variedad

Definición

Una colección de cartas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)_\alpha\}$ *se llama un atlas diferencial si:*

1. $M = \cup_\alpha U_\alpha$,
2. *las cartas son compatibles dos a dos.*

Estructura diferencial

Definición

Una estructura diferencial es un atlas diferencial "maximal", i.e, es un atlas diferencial que contiene a todas aquellas cartas que sean compatibles con él.

Lema

Si $\mathcal{A}$ es un atlas diferencial en M, entonces existe una y solo una estructura diferencial $\mathcal{D}$ que lo contiene.

Demostración: Definimos

$$\mathcal{D} = \{(U, \phi) \ : \ (U, \phi) \text{ es compatible con } (U_\alpha, \phi_\alpha) \text{ para todo } \alpha\}$$

Estructura diferencial (cont.)

Primero comprobamos que $\mathcal{D}$ es un atlas:

- $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$, ya que al ser $\mathcal{A}$ un atlas, sus cartas son compatibles entre sí. Por lo tanto los entornos coordenados de cartas en $\mathcal{D}$ cubren M.
- Las cartas de $\mathcal{D}$ son compatibles entre sí: si (U, ϕ) y (V, ψ) son cartas de $\mathcal{D}$ con $U \cap V \neq \emptyset$, tomo $p \in U \cap V$. Como $\cup_\alpha U_\alpha = M$, hay algún α con $p \in U_\alpha$, y en $\phi(U \cap V \cap U_\alpha)$,

  $$\psi \circ \phi^{-1} = (\psi \circ \phi_\alpha^{-1}) \circ (\phi_\alpha \circ \phi^{-1})$$

  que es diferenciable por ser composición de funciones diferenciables. Por lo tanto $\psi \circ \phi^{-1}$ es diferenciable en $\phi(p)$, y por ser p arbitrario en $U \cap V$, $\psi \circ \phi^{-1}$ es diferenciable en $\phi(U \cap V)$.
  De forma similar se demuestra que $\phi \circ \psi^{-1}$ es diferenciable.

Estructura diferencial (cont.)

Ahora comprobamos que $\mathcal{D}$ es "maximal", i.e, contiene toda carta que sea compatible con las cartas de $\mathcal{D}$:

$\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$, así que si una carta (U, ϕ) es compatible con las cartas de $\mathcal{D}$, debe serlo también con las cartas de $\mathcal{A}$. Pero la defintión de $\mathcal{D}$ obliga entonces a (U, ϕ) a estar en $\mathcal{D}$. $\square$

¿Cómo sabemos si una carta está en una estructura diferencial?

Viendo si es compatible con las cartas del atlas usado para definir esa estructura.

Variedad diferencial

Una *variedad diferencial* es una variedad topológica (Hausdorff, segundo axioma de numerabilidad) donde hemos escogido una estructura diferencial.

Diferencia entre estructuras y atlas diferenciales.

- Las estructuras diferenciales son atlas diferenciales, sólo que en general, con muchas cartas más.
- Un atlas diferencial induce de forma única una estructura diferencial (por el lema anterior), así que,

para definir una variedad diferencial sin ambiguedad, basta dar un atlas diferencial en una variedad topológica.

- Atlas diferenciales *diferentes* pueden definir la *misma* estructura diferencial: basta que las cartas de un atlas sean compatibles con todas las del otro y viceversa.
- Atlas diferenciales *diferentes* pueden definir estructuras diferenciales *diferentes*: basta que alguna carta de uno de los dos atlas no sea compatible con alguna del otro.

Ejemplo: misma variedad topológica, diferentes variedades diferenciales

En este ejemplo tomamos como variedad topológica $\mathbb{R}$. Construimos dos atlas en $\mathbb{R}$:

1. $\mathcal{A}_1 = \{(\mathbb{R}; \phi(t) = t\}$;
2. $\mathcal{A}_2 = \{(\mathbb{R}; \phi(t) = t^3\}$

Cada uno de ellos induce una estructura diferencial: $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$. ¿Coinciden?
No: una carta de $\mathcal{A}_1$ no es compatible con una carta de $\mathcal{A}_2$.

Esto nos da al menos dos formas diferentes de ver a $\mathbb{R}$ como variedad diferencial:

1. $\mathbb{R}$ con $\mathcal{D}_1$;
2. $\mathbb{R}$ con $\mathcal{D}_2$.

Ejemplos de variedades diferenciales.

1. $\mathbb{R}^n$ **con su estructura usual o estándar.** $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, \phi)\}$, con

$$\phi((x_1, \ldots, x_n)) = (x_1, \ldots, x_n)$$

2. Abiertos de $\mathbb{R}^n$**:** Si A es abierto de $\mathbb{R}^n$, podemos restringir la carta del caso anterior: $\mathcal{A} = \{(A, \phi)\}$, con $\phi((x_1, \ldots, x_n)) = (x_1, \ldots, x_n)$.

3. Abiertos de variedades diferenciales: Si $\mathcal{O} \subset M$ es un abierto, entonces $\mathcal{O}$ (con su topología subespacio) es una variedad diferencial con el atlas

$$\mathcal{A}_{\mathcal{O}} = \{ (\mathcal{O} \cap U_\alpha, \phi_\alpha|_{\mathcal{O}\cap U_\alpha}) \, : \, (U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathcal{A} \}$$

donde $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_\alpha$ es un atlas de M.

4. Esferas $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ **con su estructura diferencial usual:** Es la inducida por los atlas $\mathcal{A}_1 = \{(S^2 \setminus (0,0,1), \phi_N), (S^2 \setminus (0,0,-1), \phi_S)\}$, donde ϕ_N, ϕ_S son las proyecciones estereográficas.

Hay muchos atlas que dan la misma estructura diferencial que ésta.

Variedades producto

Sean M, N variedades diferenciales con atlas $\mathcal{A}_1 = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, $\mathcal{A}_2 = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ respectivamente.

Construimos una atlas en $M \times N$ como $\mathcal{A} = \{(U_\alpha \times V_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta)\}$ donde se toman todos los pares α, β posibles.

1. Si $p \in U_\alpha$, $q \in V_\beta$, entonces $(p, q) \in U_\alpha \times V_\beta$ (las cartas de $\mathcal{A}$ cubren $M \times N$).
2. Los cambios de coordenadas son de la forma $(\phi_\alpha \times \psi_\beta) \circ (\phi_{\alpha'} \times \psi_{\beta'})^{-1}$. Un pequeño cálculo muestra que estos son

$$(\phi_\alpha \circ \phi_{\alpha'}^{-1}) \times (\psi_\beta \circ \psi_{\beta'}^{-1})$$

y por tanto diferenciables.

Definición

La estructura inducida por $\mathcal{A}$ se llama la estructura producto, y $M \times N$ una variedad producto.

Ejemplo: $S^1 \times \mathbb{R}$.

Calculamos un atlas, y sus cambios de coordenadas para la estructura producto en $S^1 \times \mathbb{R}$.

1. Un atlas de $\mathbb{R}$ es $(\mathbb{R}, \phi(t) = t)$.
2. Un atlas de S^1 está dado por las estereográficas:

$$S^1 \setminus (0,1), \phi_N((x,y)) = \frac{x}{1-y}$$
$$S^1 \setminus (0,-1), \phi_S((x,y)) = \frac{x}{1+y}$$

Un atlas de $\mathbb{R} \times S^1$ está dado por las dos cartas producto de éstas:

"Conjuntos con un atlas"

A menudo uno tiene un conjunto (sin topología), pero en el que hay algo parecido a cartas, y con cambios de coordenadas diferenciables. En esos casos, es posible a menudo poner estructura de variedad diferencial en X usando el siguiente "teorema":

Teorema

Sea X un conjunto, $U, V \subset X$ son subconjuntos, $\phi : U \to \mathbb{R}^2$, $\psi : V \to \mathbb{R}^2$ son aplicaciones. Supongamos que

1. $X = U \cup V$;
2. $\phi(U)$, $\psi(V)$ *son subconuntos abiertos de* $\mathbb{R}^2$;
3. $\phi : U \to \phi(U)$, $\psi : V \to \psi(V)$ *son biyectivas;*
4. $\phi(U \cap V)$, $\psi(U \cap V)$ *son abiertos de* $\mathbb{R}^2$;
5. $\psi \circ \phi^{-1}$ *y* $\phi \circ \psi^{-1}$ *son ambas diferenciables.*

Entonces X admite una única topología con una base numerable de abiertos para la que (U, ϕ), (V, ψ) forman un atlas diferencial. Si esa topología es Hausdorff, entonces X será variedad diferencial.

"Conjuntos con un atlas" (cont.)

El teorema admite una versión con un número arbitrario de cartas, pero para nuestras aplicaciones nos bastará con esta versión.

No lo demostraremos, pero es fácil ver que la topología de X es aquella que hace $\phi : U \to \phi(U)$ y $\psi : V \to \psi(V)$ homeomorfismos.

Ejemplo. X es el conjunto de rectas en $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen, salvo por la recta de ecuaciones $x = y = 0$ (el eje de las z's).

- U son aquellas rectas ℓ con ecuación de la forma $Ax + y = 0; Bx + z = 0$, $A, B \in \mathbb{R}$.
- V son las rectas ℓ con ecuación de la forma $x + \alpha y = 0, \beta y + z = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $\phi(\ell) = (A, B); \quad \psi(\ell) = (\alpha, \beta)$

Funciones diferenciables en variedades

Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función que asigna valores reales a puntos de M.

Tomamos una carta (U, ϕ) en $p \in M$.

Definición

La **expresión local de** f **en la carta** (U, ϕ) *es la función* $\bar{f} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definida como*

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = f(\phi^{-1}(x_1, \dots, x_n))$$

$$\begin{tikzcd}
U \subset M \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\
\phi(U) \arrow[u, "\phi^{-1}"] \arrow[ur, "\bar{f}"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\phi(x_1, \dots, x_n) = q \arrow[r, "f"] & f(q) = \bar{f}(x_1, \dots, x_n) \\
(x_1, \dots, x_n) \arrow[u, "\phi^{-1}"] \arrow[ur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ejemplo

Ejemplo: $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, $f : S^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x, y, z) = x - y + z$.

1. Si tomamos la carta (U, ϕ) con $U = \{(x, y, z) : z > 0\}$, y $\phi(x, y, z) = (x, y)$, entonces $\bar{f} : D^2 \to \mathbb{R}$ está dada por

$$\bar{f}(u, v) = u - v + \sqrt{1 - u^2 - v^2}$$

porque $\phi(U) = D^2$, $\phi^{-1}(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$.

2. Si tomamos la carta (V, ψ) con $V = \{(x, y, z)\, z < 0\}$, y $\psi(x, y, z) = (x, y)$, entonces $\bar{f} : D^2 \to \mathbb{R}$ está dada por

$$\bar{f}(u, v) = u - v - \sqrt{1 - u^2 - v^2}$$

porque $\psi(V) = D^2$, $\psi^{-1}(u, v) = (u, v, -\sqrt{1 - u^2 - v^2})$.

Ejemplo (Cont.)

3. Si tomamos $(S^2 \setminus (0,0,1), \phi_N)$ la estereográfica desde el polo norte, entonces $\bar{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está dada por

$$\bar{f}(u,v) = \frac{2u}{u^2+v^2+1} - \frac{2v}{u^2+v^2+1} + \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}$$

Hemos hecho sólo un par de ejemplos con dimensión dos; en dimensiones superiores es igual, salvo que con más coordenadas.

Es bueno recordar que $\bar{f}$ nos permite conocer todos los valores de f en U, por la fórmula

$$f(p) = \bar{f}(\phi(p))$$

Funciones diferenciables en variedades (cont.)

Definición

$f : M \to \mathbb{R}$ es diferenciable en p si para alguna carta (U, ϕ) de M en p se tiene que $\overline{f} = f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\phi(p)$.

No importa que carta se use en la definición anterior: $f \circ \phi^{-1}$ es diferenciable en $\phi(p)$ si y sólo si $f \circ \psi^{-1}$ es diferenciable en $\psi(p)$.

Demostración.

Suponemos que $f \circ \phi^{-1}$ es diferenciable en $\phi(p)$. En el abierto $\psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$,

$$f \circ \psi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \psi^{-1})$$

$\phi \circ \psi^{-1}$ es diferenciable en $\psi(p)$ (con imagen $\phi(p)$), y $f \circ \phi^{-1}$ es diferenciable en $\phi(p)$, así que $f \circ \psi^{-1}$ es diferenciable en $\psi(p)$. La otra implicación es igual intercambiando ϕ y ψ. $\square$

Funciones diferenciables en variedades (cont.)

Definición

Diremos que $f : M \to \mathbb{R}$ es diferenciable (o suave) si lo es en todo $p \in M$.

A menudo el dominio de f no es todo M, sino sólo un abierto $\mathcal{O}$. En este caso, se dice que f es diferenciable en $p \in \mathcal{O}$ si para una carta de M en p, $f \circ \phi^{-1} : \phi(\mathcal{O} \cap U) \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\phi(p)$.

Ejemplo: $f : \mathcal{O} = S^2 \setminus \{(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \frac{x}{y^2+z^2}$. Comprobar que f es diferenciable.

Podemos tomar varios tipos de cartas; por ejemplo, $(U_1, \phi_1(x, y, z) = (x, y))$ donde $U_1 = S^2 \cap \{z > 0\}$, nos daría

$$\bar{f}_1(u, v) = \frac{u}{1 - u^2} \qquad (u, v) \in D^2 = \phi_1(U_1 \setminus \{(\pm 1, 0, 0), (\pm(0, 1, 0)\})$$

que es diferenciable. Para el resto de puntos hay que usar otras cartas. El caso con $\{z < 0\}$ es similar.

Si $U_3 = S^2 \cap \{y > 0\}$, $\phi_3(x, y, z) = (x, z)$, entonces $\phi_3(U_3 \cap \mathcal{O}) = D^2 \setminus (0, 0)$, y $\bar{f}_3(u, v) = \frac{u}{1-u^2}$. El caso restante se deja como ejercicio.

Funciones diferenciables (cont.)

Lema

Sean U_i conjuntos abiertos. Si $\mathcal{O} = \cup_i U_i$, entonces $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ es diferenciable si y sólo si $f|_{U_i} : U_i \to \mathbb{R}$ es diferenciable para todo i.

Se demuestra usando simplemente la definición de diferenciabilidad.

Lema

Si $f, g : M \to \mathbb{R}$ son diferenciables, entonces $f + g, fg : M \to \mathbb{R}$ son diferenciables. Además $f/g : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el abierto $\mathcal{O} = M \setminus g^{-1}(0)$.

Esta se demuestran tomando expresiones locales de f y g y usándolas para construir expresiones locales de las funciones dadas: Es trivial ver que si $\bar{f}$, $\bar{g}$ son las expresiones locales de f y g en una carta, entonces $\bar{f} + \bar{g}$, $\bar{f} \cdot \bar{g}$, $\bar{f}/\bar{g}$ son las de $f + g$, $f \cdot g$, f/g respectivamente.

Aplicaciones entre variedades

Sean M, N, variedades diferenciales de dimensiones m y n respectivamente. $F : M \to N$, $p \in M$, $F(p) = q \in N$. Tomamos cartas:

1. (U, ϕ) de M en p;
2. (V, ψ) de N en q

Si F$(U) \subset V$, la **expresión local de** F en estas cartas es la composición

$$\bar{F}(x_1, \ldots, x_m) = \psi \circ F \circ \phi^{-1}(x_1, \ldots, x_m)$$

En diagramas, éste es el que muestra qué aplicaciones se están componiendo y en qué orden: "subir-cruzar-bajar".

$$\begin{tikzcd} U \subset M \arrow[r, "F"] & V \subset N \arrow[d, "\psi"] \\ \phi(U) \subset \mathbb{R}^m \arrow[u, "\phi^{-1}"] \arrow[r, "\bar{F}"] & \psi(V) \subset \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Expresión local de $F : M \to N$ en un par de cartas (cont.)

En el siguiente diagrama vemos el anterior, pero viendo cómo se construye para saber qué tipo de aplicación queda al final:

$$
\begin{tikzcd}
p = \phi^{-1}(x_1, \ldots, x_m) \arrow[r, "F"] & F(p) = F \circ \phi^{-1}(x_1, \ldots, x_m) \arrow[d, "\psi"] \\
(x_1, \ldots, x_m) \arrow[u, "\phi^{-1}"] \arrow[r, "\bar{F}"] & \bar{F}(x_1, \ldots, x_m) = \psi \circ F \circ \phi^{-1}(x_1, \ldots, x_m)
\end{tikzcd}
$$

Aplicaciones: Ejemplo de una expresión local

Sea X es la variedad que aparecía como ejemplo en la sección de "conjuntos con un atlas", i.e, X es el conjunto formado por las rectas que pasan por el origen en $\mathbb{R}^3$, salvo por el eje Z.

Sea N el plano en $\mathbb{R}^3$ con ecuación $x = 1$. N es un grafo sobre el plano YZ, así que tiene una carta con una sóla carta: $\sigma(x, y, z) = (y, z)$. Tomamos la estructura diferencial inducida por ese atlas de una sola carta.

Sea $F : X \to N$, donde F lleva una recta ℓ en X a su punto de intersección con N. Vamos a dar la expresión local de F en la carta (U, ϕ) de X y la carta (N, σ)

Lo primero es asegurarse de que $F(U) \subset V$, ya que si no, habría problemas a la hora de escribir $\bar{F}$. En este caso, como $V = N$ eso no es un problema.

Lo segundo es contar dimensiones para asegurarse de no perder variables por el camino: $\bar{F} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Aplicaciones: ejemplo de una expresión local

Ahora calculamos los ingredientes que nos hacen falta para construir $\bar{F}$:

1. $\phi^{-1}(u, v) = \ell$, $\ell = \{ ux + y = 0, vx + z = 0\}$
2. $F(\ell) =$ intersección de ℓ y N:

$$\begin{cases} u \cdot 1 + y = 0, \\ v \cdot 1 + z = 0. \end{cases}$$

   y el punto de intersección es $(1, -u, -v)$. Así que $F(\ell) = (1, -u, -v)$, y $\psi \circ F(\ell) = (-u, -v)$.

La expresión local de F en estas cartas es por tanto

$$\bar{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \bar{F}(u, v) = (-u, -v)$$

Aplicaciones Diferenciables

Definición

Una aplicación $F : M \to N$ es diferenciable en $p \in M$ si existen cartas (U, ϕ) de M en p, (V, ψ) de N en $F(p)$, tal que la expresión local de F en estas cartas es diferenciable en $\phi(p)$. F se dice suave si es diferenciable en cada punto de M.

Nota: en la definición de diferenciabilidad de una aplicación diferenciable en p, se piden cartas (U, ϕ), (V, ψ) con $p \in U$ y con $F(U) \subset V$. Tal (U, ϕ) siempre se puede obtener para cualquier V prefijada:

si (U', ϕ') es una carta arbitraria en p, $F^{-1}(V)$ es un abierto en M que contiene p, con lo que $U' \cap F^{-1}(V)$ es un abierto que contiene p y está contenido en U'. Ahora hacemos $U = U' \cap F^{-1}(V)$ y $\phi = \phi'|_U$.

Observación: La diferenciabilidad de una aplicación F no depende de las cartas elegidas para la comprobación: si (U_i, ϕ_i), (V_i, ψ_i) $(i = 1, 2)$ son cartas en p y en q respectivamente, entonces $\psi_2 \circ F \circ \phi_2^{-1} = (\psi_2 \circ \psi_1^{-1}) \circ (\psi_1 \circ F \circ \phi_1^{-1}) \circ (\phi_1 \circ \phi_2^{-1})$ en un entorno de $\phi_2(p)$, que es diferenciable en $\phi_2(p)$ si $\psi_1 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ lo es en $\phi_1(p)$. El caso opuesto es similar.

Aplicaciones Diferenciables (cont.)

Composición de aplicaciones: Si $F : M \to N$ es diferenciable, y $G : N \to P$ es diferenciable, entonces $G \circ F : M \to P$ es diferenciable.

Demostración.

Sea $p \in M$ arbitrario. Denotamos $q = F(p)$, $r = G(q) = G(F(p))$.

- Como G es diferenciable en q, existen cartas (W, τ) de N en q, (V, ψ) de P en r, con $G(W) \subset V$ y con $\bar{G} = \psi \circ G \circ \tau^{-1}$ diferenciable en $\tau(q)$.
- Como F es diferenciable en p, existe una carta (U, ϕ) de M en p tal que $F(U) \subset W$ y $\bar{F} = \tau \circ F \circ \phi^{-1}$ diferenciable en $\phi(p)$.

En las cartas (U, ϕ) en p, (V, ψ) en r, tenemos $(G \circ F)(U) \subset G(W) \subset V$, y $\psi \circ (G \circ F) \circ \phi^{-1} = (\psi \circ G \circ \tau^{-1}) \circ (\tau \circ F \circ \phi{-}1)$. Como $\tau \circ F \circ \phi{-}1$ es diferenciable en $\phi(p)$, manda éste a $\tau(F(p)) = \tau(q)$, y $\psi \circ G \circ \tau^{-1}$ es diferenciable en $\tau(q)$, $\psi \circ (G \circ F) \circ \phi^{-1}$ es diferenciable en $\phi(p)$. $\square$

Un ejemplo útil para las demostraciones es el siguiente:

Lema

Sea (U, ϕ) una carta en una variedad diferencial M. Entonces como aplicación de U a $\mathbb{R}^n$ (donde a $\mathbb{R}^n$ se le da su ED usual y a U se le da la ED que tiene como abierto de M), ϕ es diferenciable.

Demostración.

$$
\begin{tikzcd}
\phi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) \arrow[r, "\phi"] & (x_1, \ldots, x_n) \arrow[d] \\
(x_1, \ldots, x_n) \arrow[u, "\phi^{-1}"] \arrow[r, "\widetilde{\phi}"] & (x_1, \ldots, x_n)
\end{tikzcd}
$$

$\square$

Difemorfismos

Definición

Una aplicación $F : M \to N$ *se llama un difeomorfismo si*

1. F *es diferenciable;*
2. F *es biyectiva;*
3. $F^{-1} : N \to M$ *(que existe porque* F *es biyectiva) es a su vez diferenciable.*

Definición

Decimos que una variedad M *es difeomorfa a* N *si existe un difeomorfismo* $F : M \to N$.

Difemorfismos (cont.)

"Ser difeomorfo/a a" es una relación de equivalencia en el conjunto de variedades:

- Es reflexiva, porque $F : M \to M$, $F(p) = p$ es un difeomorfismo (cuidado: la estructura diferencial en M debe ser la misma en la salida y la llegada);
- Si $F : M \to N$ es un difeomorfismo, entonces $F^{-1} : N \to M$ es un difeomorfismo;
- Si $F : M \to N$, $G : N \to P$ son difeomorfismos, entonces $G \circ F : M \to P$ es un difeomorfismo.

Difeomorfismos: ejemplos

1. Vimos que $\mathbb{R}$ tenía dos estructuras diferenciales. Una estaba dada por el atlas $(\mathbb{R}, \phi(t) = t)$; la otra por el atlas $(\mathbb{R}, \psi(t) = t^3)$. A $\mathbb{R}$ con la primera estructura lo denotamos $\mathbb{R}_1$, a $\mathbb{R}$ con la segunda $\mathbb{R}_2$ para diferenciarlos.

Sea $F : \mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}_2$ dada por $F(t) = t^{\frac{1}{3}}$.

1. F es diferenciable: su expresión local es $\bar{F}(u) = u$;
2. F es biyectiva: es claramente inyectiva, y dado cualquier $t \in \mathbb{R}$, $t = F(t^3)$;
3. Su inversa es $F^{-1}(t) = t^3$, que tiene como expresión local $\overline{F^{-1}}(u) = u$.

Difeomorfismo local

Definición

Una aplicación $F : M \to N$ *es un difeomorfismo local si para todo* $p \in M$, *existen entornos* U *de* p *en* M, V *de* $F(p)$ *en* N, *tal que*

1. $F(U) = V$,
2. $F|_U : U \to V$ *es un difeomorfismo.*

Ejemplo: $F : \mathbb{R} \to S^1$,

$$F(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

no puede ser un difeomorfismo porque no es inyectiva, pero es un difeomorfismo local porque para cualquier $t \in \mathbb{R}$,

$$F|_{(t-\pi,t+\pi)} : (t - \pi, t + \pi) \to S^1 \setminus \{-F(t)\}$$

es un difeomorfismo.

Cartas k-adaptadas

Sea M una variedad de dimensión n, $P \subset M$ un subconjunto, $p \in P$

Definición

Una carta (U, ϕ) *de* M *en* p *se dice que está* k*-adaptada a* P *en* p *si* $\phi(U \cap P) = \phi(U) \cap \left(\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}\right)$

Notación: Por $\{0\}^{n-k}$ indicamos una $n - k$-tupla de ceros. Cuando escribimos $\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$ indicamos el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ de la forma $(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ con $x_i \in \mathbb{R}$, y un total de $n - k$ ceros al final.

Ejemplo de 1-carta adaptada

Sea

$$S^1 \subset \mathbb{R}^2; \qquad p = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

La carta de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$U = \{(x,y) \,:\, -1 < x < 1, y > 0\}, \qquad \phi(x,y) = (x, y - \sqrt{1-x^2})$$

tiene

$$\phi(U) = \{\,(u,v) \,:\, -1 < u < 1,\ v > -\sqrt{1-u^2}\,\}$$

ya que al ser $u = x$, $y > 0$ y $v = y - \sqrt{1-x^2}$, entonces $v > 0 - \sqrt{1-u^2}$.

Está adaptada a S^1 en p:

- si $(x,y) \in S^1 \cap U$ entonces $y = \sqrt{1-x^2}$ y $\phi((x,y)) = (x,0)$; esto implica que

$$\phi(U \cap S^1) \subset \phi(U) \cap \left(\mathbb{R} \times \{0\}^1\right)$$

Ejemplo de 1-carta adaptada (cont.)

- Queda ver que $\phi(U) \cap \left(\mathbb{R} \times \{0\}^1\right) \subset \phi(U \cap S^1)$:
  - Como
  $$\phi(U) = \{\, (u, v) \;:\; -1 < u < 1,\; v > -\sqrt{1-u^2}\,\}$$
  entonces
  $$\phi(U) \cap \left(\mathbb{R} \times \{0\}^1\right) = \{\, (u, v) \;:\; -1 < u < 1, v = 0\,\}$$
  - Por otra parte, si $-1 < u < 1$, entonces $(u, \sqrt{1-u^2}) \in S^1 \cap U$ y
  $$\phi(u, \sqrt{1-u^2}) = (u, 0),$$
  así que
  $$\phi(U) \cap \left(\mathbb{R} \times \{0\}^1\right) \subset \phi(U \cap S^1)$$

Subvariedad regular de M de dimensión k

Definición

Una **subvariedad regular de** M **de dimensión** k *es un subconjunto* S *de* M *que tiene cartas* k*-adaptadas en cada uno de sus puntos.*

Teorema

Sea S *una subvariedad regular de* M*. Entonces* S *con su topología subespacio tiene una estructura de variedad diferencial de dimansión* k*.*

Demostración: Para cada punto p de S vamos a construir primero una carta de S en p:

- Primero tomamos una carta k-adaptada de S en p, (U, ϕ);
- denotamos por $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ la proyección $\pi(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$;
- $U \cap S$ es abierto en S;

Subvariedad regular de M de dimensión k

- $\pi \circ \phi : U \cap S \to \mathbb{R}^k$ es continua;
- $\pi \circ \phi(U \cap S)$ es abierto en $\mathbb{R}^k$: para esto observad que la aplicación

$$i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}, \quad i(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$$

  es un homeomorfismo cuando a $R^k \times \{0\}^{n-k}$ se le da la topología subespacio desde $\mathbb{R}^n$; su inversa es precisamente $\pi|_{R^k \times \{0\}^{n-k}}$.
  Pero

$$\phi(U \cap S) = \phi(U) \cap \left(\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}\right)$$

  es abierto en $R^k \times \{0\}^{n-k}$, así que $\pi \circ \phi(U \cap S)$ es abierto en $\mathbb{R}^k$.
- Como $\pi|_{R^k \times \{0\}^{n-k}}$ es inyectiva y $\phi(U \cap S) \subset R^k \times \{0\}^{n-k}$, entonces $\pi \circ \phi$ es inyectiva en $U \cap S$.

Subvariedad regular de M de dimensión k

- $\pi \circ \phi$ es sobreyectiva sobre su imagen, con lo que es biyectiva por el punto anterior.

- $(\pi \circ \phi)^{-1}$ está dada por

  $$\xi(x_1, \ldots, x_k) = \phi^{-1}(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$$

  ya que

  $$\pi \circ \phi \circ \xi(x_1, \ldots, x_k) = \pi \circ (\phi \circ \phi^{-1})(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) = (x_1, \ldots, x_k),$$

  así que es continua.

Ahora que tenemos cartas de S en cada uno de sus puntos, vamos a ver que podemos extraer un atlas diferenciable de ellas. Para acortar, denotaremos

$$\widetilde{\phi} = \pi \circ \phi \text{ en cada } U \cap S$$

Subvariedad regular de M de dimensión k

Para cada $p \in S$, tomamos una carta k-adaptada a S en p, y las juntamos a todas en $\mathcal{A} = \{(U_\alpha \cap S, \widetilde{\phi}_\alpha\}$.

Lema

$\mathcal{A}$ es un atlas diferencial en S.

Demostración.

Como hemos escogido una carta adaptada para cada punto de S, es claro que

$$\cup_\alpha (U_\alpha \cap S) = S.$$

Sólo queda por ver que las cartas son compatibles entre sí. Suponemos que $(U_\alpha \cap S) \cap (U_\beta \cap S) = U_\alpha \cap U_\beta \cap S \neq \emptyset$.

$$\widetilde{\phi}_\beta \circ \widetilde{\phi}_\alpha^{-1}(x_1, \ldots, x_k) = \pi \circ \phi_\beta \circ \phi_{\alpha^{-1}}(x_1 \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$$

que es diferenciable porque $\phi_\beta \circ \phi_{\alpha^{-1}}$ es un cambio de coordenadas en M. □

Subvariedades (cont.)

Ejemplo En el caso de $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, la carta con $\phi(x,y) = (x, y - \sqrt{1-x^2})$ da como carta inducida

$$U \cap S^1 = \{(x,y) \in S^1 \,:\, y > 0\}, \qquad \widetilde{\phi}(x,y) = x$$

ya que $\pi \circ \phi(x,y) = x$.

Subvariedades (cont.)

Teorema

Si S es una subvariedad de M, entonces la inclusión $i : S \to M$ es una aplicación diferenciable (cuando se le da a S la ED que recibe como subvariedad)

Demostración.

Tomamos $p \in S$. Como $i(p) = p$, hasy que tomar cartas de S en p, de M en p y hallar la expresión local de i en estas cartas.

- En S tomamos una carta k-adaptada $(U \cap S, \widetilde{\phi})$;
- en M tomamos la carta (U, ϕ) que dió lugar a la carta anterior.

La expresión local queda:

$$\begin{tikzcd}
\phi^{-1}(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \arrow[r, "i"] & \phi^{-1}(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \arrow[d, "\phi"] \\
(x_1, \ldots, x_k) \arrow[u, "\widetilde{\phi}^{-1}"] \arrow[r, "\bar{i}"] & (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)
\end{tikzcd}$$

$\square$

Subvariedades (cont.)

Teorema

Supongamos que $S_i \subset M_i$ son subvariedades. Si $F : M_1 \to M_2$ es una aplicación diferenciable con $F(S_1) \subset S_2$, entonces la aplicación inducida $\widetilde{F} : S_1 \to S_2$ (definida como $\widetilde{F}(p) = F(p)$) es diferenciable.

Demostración.

Tomamos cartas adaptadas a S_1 en p, a S_2 en $q = F(p)$: (U, ϕ), $(V\psi)$ con $F(U) \subset V$. Escribimos ahora la expresión local de $\widetilde{F}$ en las cartas correspondientes de S_1 y S_2:

$$\begin{tikzcd}
\phi^{-1}(x_1 \dots, x_k, 0, \dots, 0) \arrow[r, "\widetilde{F}"] & F \circ \phi^{-1}(x_1 \dots, x_k, 0, \dots, 0) \arrow[d, "\widetilde{\psi}"] \\
(x_1, \dots, x_k) \arrow[u, "\widetilde{\phi}-1"] \arrow[r] & \pi \circ \psi \circ F \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)
\end{tikzcd}$$

que es diferenciable por serlo π, y $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$.

□

Grafos. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : A \to \mathbb{R}^k$ una aplicación diferenciable. El **grafo de** f era

$$\Gamma_f = \{\, (x, f(x)) \,:\, x \in A \,\} \subset \mathbb{R}^{n+k}$$

Una carta n-adaptada a Γ_f se obtiene como (comprobadlo)

- $U = A \times \mathbb{R}^k$;
- $\phi(x, y) = (x, y - f(x))$, donde $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^k$.

Por lo tanto Γ_f es subvariedad de $\mathbb{R}^{n+k}$. El mismo argumento funcionaría (módulo renombrar coordenadas) si se construye el grafo de una función con dominio situado en otro plano coordenado.

Lema

Sea $S \subset \mathbb{R}^{n+k}$ un subconjunto donde para cada $p \in S$ existe un abierto $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^{n+k}$ tal que $S \cap \mathcal{O}$ es el grafo de una función diferenciable sobre alguno de los planos coordenados. Entonces S es una subvariedad regular de $\mathbb{R}^{n+k}$.

Valores regulares

Definición

Sea $F : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ una aplicación diferenciable.

1. *Un* **punto crítico de** F *es un punto* $p \in \mathcal{O}$ *tal que* $\operatorname{rango} DF(p) \leq k-1$
2. *Un* **valor crítico de** F *es un* $c \in \mathbb{R}^k$ *que es imagen de algún punto crítico de* F.
3. *Un* **valor regular de** F *es un* $c \in \mathbb{R}^k$ *que no es valor crítico.*

Ejemplo: $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

$$DF(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \end{bmatrix}$$

con lo que $\operatorname{rango} DF(x,y,z) \leq 0$ sii $(x,y,z) = (0,0,0)$. Éste es el único punto crítico. El único valor crítico es $F(0,0,0) = 0$, y valores regulares son todos los $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

Subvariedades regulares definidas implícitamente

Teorema

Sea $F : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ una aplicación diferenciable. Si $c \in \mathbb{R}^k$ es un valor regular de F con $F^{-1}(c) \neq \emptyset$, entonces $F^{-1}(c)$ es una subvariedad regular de $\mathbb{R}^{n+k}$ de dimensión n.

Demostración: Denotamos

$$F = (f_1, \dots, f_k).$$

Si $p \in S$, $DF(p)$ tiene rango k; suponemos que el menor $k \times k$ que no se anula en p es el formado por

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{n+k}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_{n+k}} \end{vmatrix} \neq 0$$

(si no, lo que sigue se adapta tras una reordenación de los $x_i's$).

Subvariedades regulares definidas implícitamente (cont.)

Por el teorema de la función implícita, existe un abierto $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+k}$ de p con $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^k$ tal que

$$F^{-1}(c) \cap (A \times B) = \{\, (x, g(x)) \,:\, x \in A \,\}$$

donde $g : A \to B$ es diferenciable. En otras palabras,

$$F^{-1}(c) \cap (A \times B) = \Gamma_g \qquad \text{el grafo de } g$$

y por lo tanto hay una carta n-adaptada a $F^{-1}(c)$ en p, i.e, $F^{-1}(c)$ es subvariedad de dimensión n. $\square$

Cartas en la estructura de subvariedades Euclídeas

A menudo tenemos cartas (o parametrizaciones) de una n-subvariedad $S \subset \mathbb{R}^{n+k}$, y queremos determinar si se hallan en la estructura diferencial de S como subvariedad. Para esto, el siguiente resultado es útil:

Teorema

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $\xi : A \to \mathbb{R}^{n+k}$ una aplicación diferenciable con

1. $\xi(A) \subset S$;
2. $\xi : A \to \xi(A)$ *es biyectiva;*
3. *para todo $a \in A$, $D\xi(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ tiene rango n.*

Entonces $\xi : A \to \xi(A)$ es una parametrización de S con su estructura de subvariedad diferencial (i.e, $(\xi(A), (\xi|_{\xi(A)})^{-1})$ es una carta de la ED de S).

La demostración se da a continuación, pero primero necesitamos una observación sobre cartas en general de $\mathbb{R}^m$ con su estructura usual.

Cartas de $\mathbb{R}^m$

Lema

(U, ϕ) es una carta de $\mathbb{R}^m$ con su estructura usual si y sólo si U es abierto en $\mathbb{R}^m$ y $\phi : U \to \phi(U)$ es un difeomorfismo en el sentido habitual de Cálculo III (i.e, ϕ diferenciable, biyectiva, inversa ϕ^{-1} diferenciable).

Demostración.

Si (U, ϕ) es carta de la estructura diferenciable de $\mathbb{R}^m$, entonces debe ser compatible con la carta del atlas $(\mathbb{R}^m, \psi(p) = p)$. Por lo tanto los cambios de coordenadas $\phi \circ \psi^{-1}(p) = \phi(p)$ y $\psi \circ \phi^{-1}(p) = \phi^{-1}(p)$ son diferenciables, luego ϕ es un difeomorfismo.

La recíproca es inmediata: como ϕ, ϕ^{-1} son diferenciables, los cambios de coordenadas con $(\mathbb{R}^m, \psi(p) = p)$ son diferenciables, y la carta (U, ϕ) se halla en la estructura diferencial de $\mathbb{R}^m$. $\square$

Cartas en la estructura de subvariedades Euclídeas (cont.)

Sea $a \in A$, $\xi(a) = p \in S$, y (U, ϕ) una carta de $\mathbb{R}^{n+k}$ adaptada a S en p. Como $\phi : U \to \phi(U)$ es un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^{n+k}$ por la pantalla anterior, tenemos que $D\phi(p)$ es un isomorfismo lineal, y por tanto

$$\operatorname{rango} D(\phi \circ \xi)(a) = \operatorname{rango} D\phi(p) \circ D\xi(a) = \operatorname{rango} D\xi(a) = n.$$

Pero $\phi \circ \xi(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n), 0, \ldots, 0)$ porque $\xi(A) \subset S$, y ϕ estaba adaptada a S.

Por lo tanto

$$D(\phi \circ \xi)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Cartas en la estructura de subvariedades Euclídeas (cont.)

Así que

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix} \neq 0$$

Pero la carta de S que corresponde a (U, ϕ) es $(U \cap S, \widetilde{\phi} = \pi \circ \phi)$. Así que

$$\widetilde{\phi} \circ \xi(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$$

tiene jacobiano no singular en a, y por el teorema de la función inversa es localmente invertible con inversa diferenciable.

Ahora podemos establecer el teorema:

- $\widetilde{\phi} \circ \xi$ es diferenciable porque es composición de aplicaciones diferenciables:

$$\xi : A \to \mathbb{R}^{n+k}, \phi : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}, \pi : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n}.$$

- $\xi^{-1} \circ \widetilde{\phi}^{-1}$ es diferenciable: si $b \in \xi \circ \widetilde{\phi}(A)$, $b = \xi \circ \widetilde{\phi}(a)$ para algún $a \in A$. Como

$$\xi^{-1} \circ \widetilde{\phi}^{-1} = (\widetilde{\phi} \circ \xi)^{-1}$$

y ésta última es diferenciable en b por el argumento anterior, $\xi^{-1} \circ \widetilde{\phi}^{-1}$ también lo es.

Esto demuestra que $(\xi(A), \xi^{-1})$ es compatible con las cartas de subvariedad de S.

Acciones de grupos

Definición

Sea G un grupo con elemento neutro e, X un conjunto. Una acción de G en X es una aplicación

$$\theta : G \times X \to X, \qquad (g, x) \to g \cdot x$$

tal que

1. $e \cdot x = x$ *para cualquier* $x \in X$
2. $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$

Ejemplos:

- $X = S^2$, $G = \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$. $1 \cdot x = x, -1 \cdot x = -x$.
- $X = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{Z}$, $m \cdot x = x + m$.
- $X = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{Z}^2$. $(m, n) \cdot (x, y) = (x + m, y + n)$.
- $X = G_1$ un grupo, $G = H$ un subgrupo de G_1; $h \cdot g = hg$, el producto del grupo.

Espacios cociente

La **órbita** de x es el subconjunto de X dado por

$$G \cdot x := \{g \cdot x \ : \ g \in G\}.$$

El estabilizador de x es el subconjunto de G dado por

$$G_x := \{g \in G \ : \ g \cdot x = x\}.$$

Hay una relación de equivalencia en X dada por:

$$x \sim y \iff \text{hay un } g \in G \text{ tal que } g \cdot x = y$$

Sus clases de equivalencia son las órbitas.

Definición

X/G es el espacio cociente que se obtiene mediante esta relación de equivalencia. Se le suele llamar el espacio de órbitas.

Acciones diferenciales

G un grupo discreto (i.e, un grupo con la topología discreta, aunque para nuestros efectos será un grupo con una cantidad numerable de elementos, como $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Z}_n$, dihedrales, productos de estos o similares).

Fijamos $g \in G$. Hay una aplicación

$$\theta_g : X \to X, \qquad x \to g \cdot x$$

que es una biyección con inversa $\theta_{g^{-1}}$:

$$\theta_{g^{-1}} \circ \theta_g(x) = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1}g) \cdot x = e \cdot x = x$$

Definición

Sea M una variedad diferencial, G un grupo discreto, y $\theta : G \times X \to X$ una acción. La acción se llama diferenciable si cada aplicación $\theta_g : M \to M$ es un difeomorfismo.

Acciones diferenciales: variedades cociente

Teorema

Sea M una variedad diferencial de dimensión n. Supongamos que G actúa sobre M cumpliendo lo siguiente:

1. *Para todo $x \in M$, existe un entorno abierto U_x tal que los conjuntos $g \cdot U_x, g \in G$ son todos disjuntos.*
2. *Para todo par $x, y \in M$ con $y \notin G \cdot x$, hay entornos $\widetilde{U}_x$ de x, $\widetilde{U}_y$ de y tal que para todo $g \in G$, $g\widetilde{U}_x \cap \widetilde{U}_y = \emptyset$*

Entonces la topología cociente en M/G es Hausdorff, y admite una (y sólo una) estructura diferencial para la que $\pi : M \to M/G$ es un difeomorfismo local.

La primera condición implica en particular que para cualquier $x \in M$, $g \cdot x = x$ implica $g = e$.

Para ayudarnos a entender la segunda condición, observamos que $y \notin G \cdot x$ significa $\bar{x} \neq \bar{y}$ en M/G.

Acciones diferenciales: variedades cociente (cont.)

Demostración:

1. M/G **es Hausdorff:** Sean $\bar{x}$, $\bar{y}$ puntos diferentes de M/G. Tomamos $x, y \in M$ con $\pi(x) = \bar{x}$, $\pi(y) = \bar{y}$ y $\widetilde{U}_x$, $\widetilde{U}_y$ como en la segunda hipótesis del teorema.

$\pi(\widetilde{U}_x)$ es un entorno abierto de $\bar{x}$ en M/G porque

$$\pi^{-1}\pi(\widetilde{U}_x) = \cup_{g \in G}\, g \cdot \widetilde{U}_x,$$

que es abierto en M. Lo mismo ocurre con $\pi(\widetilde{U}_y)$ e $\bar{y}$. Los denotamos $\bar{U}_x$ y $\bar{U}_y$ respectivamente.

$\bar{U}_x \cap \bar{U}_y = \emptyset$, porque si $\bar{z} \in \bar{U}_x \cap \bar{U}_y$, entonces

- hay un $z \in \widetilde{U}_x$ con $\pi(z) = \bar{z}$;
- hay un elemento en la órbita de z que está en $\widetilde{U}_y$, i.e, hay un $g \in G$ con $gz \in \widetilde{U}_y$.

Por lo tanto $gz \in g\widetilde{U}_x \cap \widetilde{U}_y \neq \emptyset$. Esto contradice la hipótesis del teorema.

Acciones diferenciales: variedades cociente (cont.)

2. M/G **es variedad topológica:** Construiremos una carta en cada punto $\bar{x} \in M/G$.

Para ello empezamos con el abierto U_x dado en la primera hipótesis del teorema. Observamos que $\pi : U_x \to \pi(U_x)$ es biyectiva: si $z, z' \in U_x$

$$\pi(z) = \pi(z') \Longleftrightarrow z = gz' \text{ para algún } g \in G$$

lo que implica $z \in gU_x \cap U_x$, y por tanto $g = e$, $z = z'$.

Si (V, ϕ) es una carta de M en x, tomamos $U = U_x \cap V$. Se sigue cumpliendo que los gU son disjuntos (ya que lo eran los gU_x)

Además $\bar{U} = \pi(U)$ es abierto en M/G, ya que $\pi^{-1}\pi(U) = \cup_{g \in G} g \cdot U$ es abierto en M.

La carta que tomamos en M/G es

- $\bar{U} = \pi(U)$;
- $\widetilde{\phi} = \phi \circ (\pi|_U)^{-1}$.

Acciones diferenciales: variedades cociente (cont.)

$\widetilde{\phi}$ **es continua:** basta verlo para $(\pi|_U)^{-1} : \pi(U) \to U$ ya que ϕ lo es. Para ello, recordamos que para ver si una aplicación desde un cociente es continua hay que mirar a la flecha diagonal del diagrama

$$\begin{tikzcd} U \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr] & \\ \pi(U) \arrow[r, "(\pi|_U)^{-1}"'] & U \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} p \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \bar{p} \arrow[r] & p \end{tikzcd}$$

que es claramente continua.

$\widetilde{\phi}$ **es biyectiva** por serlo ϕ y $(\pi|_U)^{-1}$.

$\widetilde{\phi}^{-1}$ **es continua:** $\pi|_U$ y ϕ eran invertibles, así que $\widetilde{\phi}^{-1}$ coincide con $\pi|_U \circ \phi^{-1}$ que es composición de aplicaciones continuas.

De todo ello deducimos que $(\pi(U), \widetilde{\phi})$ es una carta en $\bar{x}$. Como este punto es arbitrario, hemos construido cartas en cada punto de M/G.

Acciones diferenciales: variedades cociente (cont.)

3. M/G **es variedad diferencial:** En el punto anterior hemos construido cartas para cada punto de M/G. Ahora vamos a comprobar su compatibilidad.

- Empezamos tomando cartas $(\pi(U), \widetilde{\phi})$, $(\pi(V), \widetilde{\psi})$ en el cociente M/G con $\pi(U) \cap \pi(V) \neq \emptyset$. El problema principal es que esto no implica que $U \cap V \neq \emptyset$, sino sólo que en U y en V hay puntos de la misma clase de equivalencia. Esto complica un poco el cálculo del cambio de coordenadas $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\phi}^{-1}$ (el cambio $\widetilde{\phi} \circ \widetilde{\psi}^{-1}$ se hace de forma análoga alo que sigue).

- Sea $x_0 \in \widetilde{\phi}(\pi(U) \cap \pi(V))$. Vamos a ver que $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\phi}^{-1}$ es diferenciable en x_0. Nuestro objetivo es encontrar un entorno A de x_0 contenido en $\widetilde{\phi}(\pi(U) \cap \pi(V))$ en el que $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\phi}^{-1}$ sea diferenciable.

- Sea $\bar{z}_0 = \widetilde{\phi}^{-1}(x_0) \in \pi(U) \cap \pi(V)$. Hay un único $z_0 \in U$ con $\pi(z_0) = \bar{z}_0$ (ya que $\pi|_U : U \to \pi(U)$ es biyectiva)

- Como $\bar{z}_0$ también pertenece a $\pi(V)$, hay un único $g \in G$ con $gz_0 \in V$, ya que π es inyectiva en V.

Acciones diferenciales: variedades cociente (cont.)

- En z_0 puedo escoger un entorno $U_{z_0} \subset U$ suficientemente pequeño para que $\theta_g(U_{z_0})$ esté contenido en V. Además puedo suponer que U_{z_0} es conexo, sin más que quedarme con la componente conexa que contiene a z_0.
- Como U_{z_0} es abierto, también lo es $\phi(U_{z_0}) \subset \mathbb{R}^n$. Este será el A que buscábamos. Además

$$x_0 = \widetilde{\phi}(\bar{z}_0) = \phi \circ \pi|_U^{-1}(\bar{z}_0) = \phi(z_0) \in \phi(U_{z_0}) = A$$

- En U_{z_0}, $(\pi|_V)^{-1} \circ (\pi|_U)$ coincide con θ_g:

$$(\pi|_V)^{-1} \circ (\pi|_U)(z) = (\pi|_V)^{-1}(\bar{z})$$

que es el único elemento de V en la misma clase que z, lo que lo fuerza a ser $\theta_g(z)$.

- Ahora calculamos el cambio en A:

$$\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\phi}^{-1}(x) = (\psi \circ (\pi|_V)^{-1}) \circ (\pi_U \circ \phi^{-1}) = \psi \circ \theta_g \circ \phi^{-1}$$

que es diferenciable. □

Acciones diferenciales: variedades cociente (cont.)

Lema

En las condiciones del teorema, $\pi : M \to M/G$ es un difeomorfismo local

Demostración.

Dado un $x \in M$, tomamos cartas (U, ϕ) en x como en el teorema, $(\pi(U), \widetilde{\phi})$ en $\pi(x) = \bar{x}$. Como π es biyectiva en U, sólo hay que ver diferenciabilidad de $\pi|_U$, $(\pi|_U)^{-1}$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\pi"] & \pi(U) \arrow[d, "\widetilde{\phi}=\phi\circ(\pi|_U)^{-1}"] \\ \phi(U) \arrow[u, "\phi^{-1}"] \arrow[r, "\bar{\pi}"'] & \phi(U) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \phi^{-1}(x_1, \dots, x_n) \arrow[r, "\pi"] & \pi(\phi^{-1}(x_1, \dots, x_n)) \arrow[d, "\widetilde{\phi}=\phi\circ(\pi|_U)^{-1}"] \\ (x_1, \dots, x_n) \arrow[u, "\phi^{-1}"] \arrow[r, "\bar{\pi}"'] & (x_1, \dots, x_n) \end{tikzcd}$$

La otra diferenciabilidad se demuestra igual. $\square$

Acciones diferenciales: variedades cociente (cont.)

Lema

La ED obtenida en M/G es la única que hace de π un difeomorfismo local.

Demostración.

Si $(\widetilde{U}, \Phi)$ es una carta en una estructura diferencial que hace de π un difeomorfismo local, entonces para cualquier carta $(\pi(U), \widetilde{\phi})$ de nuestra estructura diferencial, se tiene

$$\widetilde{\phi} \circ \Phi^{-1} = (\widetilde{\phi} \circ \pi|_U) \circ (\pi|_U^{-1} \circ \Phi^{-1})$$

que es composición de aplicaciones diferenciables (en su dominio de definición). La diferenciabilidad de $\Phi \circ \widetilde{\phi}^{-1}$ se demuestra igual. $\square$

Acciones diferenciales: variedades cociente (cont.)

Observación 1: A veces las condiciones del teorema son engorrosas de comprobar. En algunas situaciones especiales, hay atajos para evitarlo:

Lema

Supongamos que además de variedad, M tiene una métrica d y

1. *para cada $g \in G$, $\theta_g : M \to M$ es una isometría de la métrica:*
$$d(gx, gy) = d(x, y) \qquad \text{para todos } g \in G, x, y \in M$$
2. *para cada $x \in M$, hay un $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto de puntos $Gx = \{gx\}$ está ε-separado, i.e,*
$$d(x, gx) > \varepsilon \qquad \text{para todo } g \in G, g \neq e$$
3. *$G_x = \{e\}$ para todo $x \in M$ (i.e, la acción es libre)*

Entonces la acción de G cumple las condiciones del teorema anterior, y M/G es una variedad diferencial.

Acciones diferenciales: variedades cociente (cont.)

Observación 2: Hay una versión del teorema para variedades con borde, dando al final como cociente otra variedad con borde de la misma dimensión que M. Las cartas en puntos del borde de M/G se obtienen como en la demostración del teorema original, sólo que empezando con cartas del borde de M.

Observación 3: Para hacerse una idea de qué espacio puede ser M/G en casos específicos, se suele usar un **dominio fundamental de la acción**.

Definición

Un dominio fundamental de $G \times M \to M$ es un subconjunto cerrado $D \subset M$ tal que

1. *M es la unión de todos los $g \cdot D$, $g \in G$;*
2. *la intersección de $g \cdot D$ y $h \cdot D$ tiene interior vacío para todos los $g, h \in G$.*

La primera condición dice que D contiene representates para todas las órbitas de la acción; la segunda que el número de órbitas repetidas en D son "pocas". M/G se obtiene mirando a D y viendo qué identificaciones hay que hacer en D correspondientes a órbitas repetidas.

Apéndice: Aplicaciones diferenciables $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Sea $\mathcal{O}$ un abierto en $\mathbb{R}^n$, que usaremos como dominio de una aplicación. Sea

$$F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$$

una aplicación. F se escribe como

$$F = (f_1, \dots, f_m),$$

donde cada $f_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ es una función.

Una aplicación $F : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable cuando cada función f_i lo es. En este caso,

$$DF(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

es la matriz de la diferencial.

Teorema de la función inversa

Teorema

Sea $F : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable donde $\mathcal{O}$ es un abierto. Si $\det DF(a) \neq 0$, entonces existen entornos A de a, B de $F(a)$, tal que $F(A) = B$, y $F|_a : A \to B$ es invertible con inversa diferenciable.

$F : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ es un difeomorfismo si es diferenciable, biyectiva, con inversa diferenciable.

F es un difeomorfismo local en $a \in A$ si existen entornos A de a, B de $F(a)$ tal que $F(A) = B$, y $F|_a : A \to B$ es invertible con inversa diferenciable.

Teorema de la función implícita.

Teorema

Sea $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ una aplicación diferenciable en un conjunto abierto que contiene el punto $p = (a, b)$. Supongamos que $F(a, b) = c$, y que el menor

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_{n+1}}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_{n+1}}{\partial x_{n+k}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_{n+k}}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_{n+k}}{\partial x_{n+k}} \end{vmatrix} \neq 0$$

en el punto (a, b). Entonces

- *existe un entorno abierto de (a, b) de la forma $A \times B$ y una aplicación diferenciable $g : A \to B$ tal que $F(x, g(x)) = c$ para todo $x \in A$;*
- $F^{-1}(c) \cap (A \times B) = \{ (x, g(x)) : x \in A \}$.

Es evidente que si el menor $k \times k$ que no se anula es otro, entonces una reordenación de coordenadas nos permite obtener una conclusión similar.