

# Topología de variedades

Luis Guijarro

UAM

24 de septiembre de 2010

## Definición

*Una variedad topológica de dimensión  $n$  es un espacio topológico Hausdorff  $M$  tal que cada punto  $p \in M$  tiene un entorno homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^n$ .*

No hay ambigüedad posible en la dimensión de  $M$ : si un abierto de  $\mathbb{R}^n$  es homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^m$ , entonces  $m = n$  (Teorema de la invariancia del dominio).

Si  $M$  es una variedad topológica,  $p \in M$ , existen

- un abierto  $U$  en  $M$  conteniendo  $p$ ;
- un abierto  $A$  en  $\mathbb{R}^n$ ;
- un homeomorfismo  $\phi : U \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$

## Definición

*$(U, \phi)$  se llama una carta de  $M$  en  $p$ .  $U$  se llama un entorno coordinado.  $\phi$  es la aplicación coordinada.*

---

$\phi$  es un homeomorfismo:

- ①  $\phi$  es continua;
- ②  $\phi$  es biyectiva:
  - ① Inyectiva:  $\phi(p) = \phi(q) \iff p = q \in U$ ,
  - ② Sobreyectiva:  $\phi(U) = A$ , i.e, para todo  $a \in A$  hay un  $q \in U$  con  $\phi(q) = a$ ;
- ③  $\phi^{-1} : A \rightarrow U$  es continua.

A veces hay atajos: problema (1.3), por ejemplo.

---

$\phi(q) \in \mathbb{R}^n \implies \phi(q) = (x_1(q), \dots, x_n(q))$  (coordenadas de  $q$  en la carta  $(U, \phi)$ ).

$\phi^{-1} : A(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow X$ , así que  $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \phi^{-1}(x_1, \dots, x_n) \in X$ .

## Ejemplos:

1.  $\mathbb{R}^n$ , abiertos de  $\mathbb{R}^n$ .
2. Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  es abierto, y si  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces el grafo de  $f$

$$\Gamma_f = \{ (x, f(x)) : x \in A \}$$

es una variedad topológica (con la topología subespacio de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ).

Ejemplo: un hemisferio abierto de la esfera  $S^n = \{ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) : x_{n+1} > 0 \}$  es una variedad topológica.

3.  $S^n \setminus \{(0, \dots, 1)\}$  es una variedad topológica.

Proyección estereográfica:  $\phi : S^n \setminus \{(0, \dots, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$\phi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$$

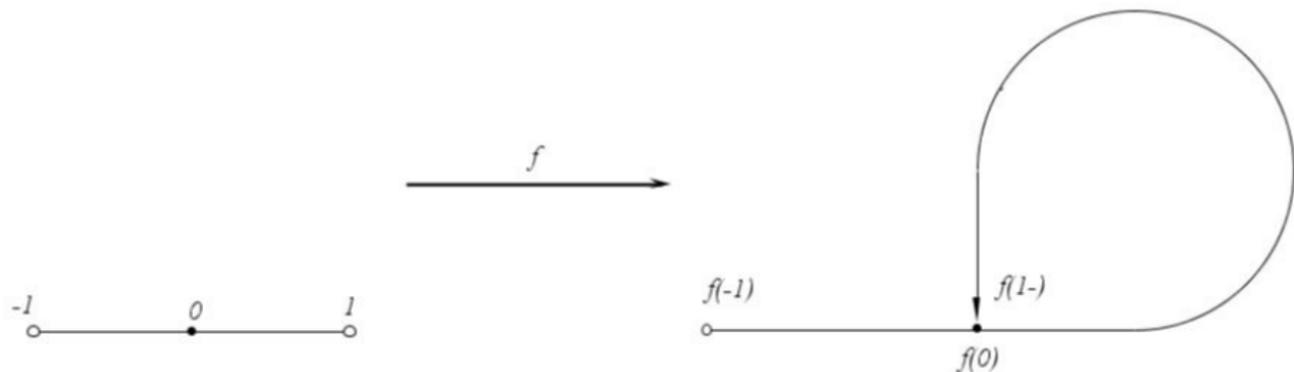
4.  $S^n$  es una variedad topológica:

- si  $p \in S^n \setminus \{(0, \dots, 1)\}$ , uso  $U = S^n \setminus \{(0, \dots, 1)\}$ ,  $\phi$  anterior.
- si  $p \in S^n \setminus \{(0, \dots, -1)\}$ , uso la otra proyección estereográfica, desde el polo sur.

La topología que hace de un objeto una variedad no es siempre la más obvia:

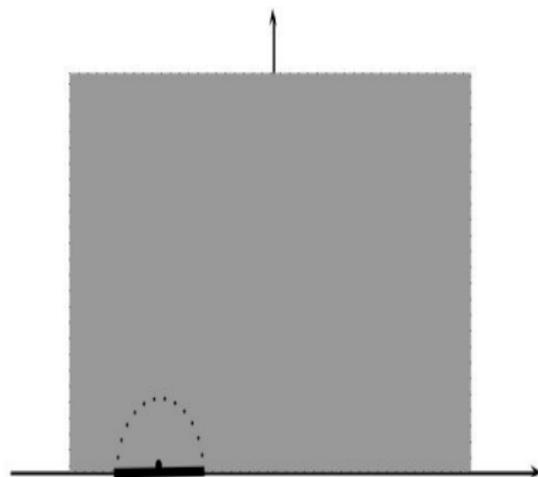
### Lema

Sea  $f : X \rightarrow Y$  una biyección de un espacio topológico a un **conjunto**  $Y$ .  
Entonces  $Y$  admite una única topología para la que  $f$  es un homeomorfismo. Si  $X$  es variedad,  $Y$  también.



¡La topología subespacio de  $\mathbb{R}^2$  no es la que hace de la imagen una subvariedad!

## Variedades con borde.



El semiplano superior **cerrado**

$\overline{\mathbb{R}}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n \geq 0\}$ , reemplaza ahora a  $\mathbb{R}^n$  en la definición de carta.

- Su "interior" es  $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ .
- Su "borde" es  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ .

### Definición

*Una variedad topológica  $n$ -dimensional con borde (frontera) es un espacio topológico en el que todo punto tiene un entorno abierto homeomorfo a un abierto de  $\overline{\mathbb{R}}_+^n$ .*

## Variedades con borde (cont.)

### Lema

Si para un  $p \in M$  existe alguna carta  $(U, \phi)$  con  $\phi(p) \in \partial \overline{\mathbb{R}_+^n}$ , entonces todas las cartas de  $M$  en  $p$  mandan éste a algún punto de  $\partial \overline{\mathbb{R}_+^n}$ .

Esto nos permite definir el borde y el interior de una variedad:

### Definición

Sea  $M^n$  una variedad con borde.

- El **borde** de  $M^n$  es el conjunto de puntos  $p \in M^n$  que son enviados por alguna carta a  $\{x \in \overline{\mathbb{R}_+^n} : x_n = 0\}$ .
- El **interior** de  $M^n$  son los puntos de  $M^n$  que son enviados por alguna carta a  $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ . (Ojo: no siempre es el interior topológico)

**Notación:**  $\partial M$ ,  $\text{int } M$  son, respectivamente, el borde y el interior de  $M$ .

$$M = \text{int } M \cup \partial M$$

## Varietades con borde (cont)

### Lema

$M^n$  una variedad con borde.

- $\text{int } M^n$  es una  $n$ -variedad topológica sin borde.
- $\partial M^n$  (con su topología subespacio) es una  $(n - 1)$ -variedad topológica sin borde.

### Lema

Si  $F : M_1 \rightarrow M_2$  es un homeomorfismo entre dos variedades con borde, entonces  $F(\partial M_1) = \partial M_2$ , y  $F|_{\partial M_1} : \partial M_1 \rightarrow \partial M_2$  es un homeomorfismo.



# Variedad producto

$M^m$ ,  $N^n$  variedades topológicas. El **producto** es

$$M \times N = \{ (p, q) : p \in M, q \in N \}$$

$M \times N$  con su topología producto es una variedad topológica de dimensión  $m + n$ .

Para construir cartas en  $(p, q) \in M \times N$ , tomamos cartas  $(U, \phi)$  en  $p \in M$ ,  $(V, \psi)$  en  $q \in N$ , y construimos

$$\phi \times \psi(p', q') := (\phi(p'), \psi(q')) = (x_1(p'), \dots, x_m(p'), y_1(q'), \dots, y_n(q'))$$

donde  $\phi(p') = (x_1(p'), \dots, x_m(p'))$ , y  $\psi(q') = (y_1(q'), \dots, y_n(q'))$ .

# Curvas y superficies topológicas

- **Curvas:** variedades topológicas de dimensión 1.
- **Superficies:** variedades topológicas de dimensión 2.

Las curvas y superficies con borde se definen de forma similar (en vez de "variedades", diríamos "variedades con borde")

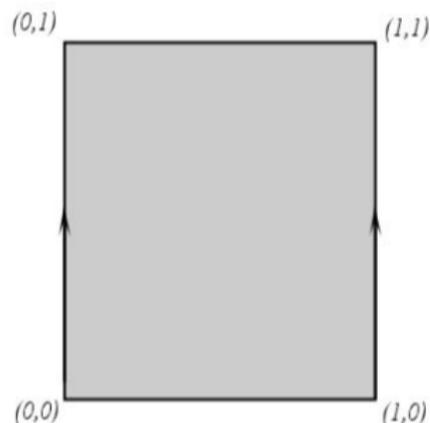
Si  $S$  es una superficie con borde,  $\partial S$  es un conjunto de curvas.

**Clasificación de curvas conexas:** Hay pocas posibilidades; son todas homeomorfas bien a  $(0, 1)$ ,  $[0, 1)$ ,  $[0, 1]$ , o a  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ .

¿Hay algo parecido para superficies?

## Construcción de superficies mediante pegado.

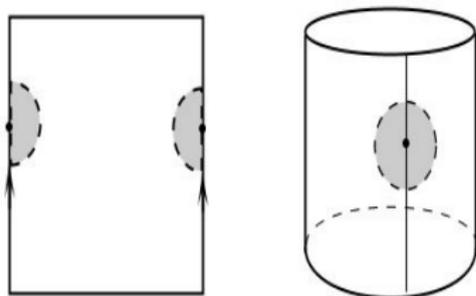
Empezamos con un rectángulo  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ . Vamos a intentar construir superficies identificando puntos en  $\partial R$ . Estas identificaciones se denotarán con flechas: pegamos lados con la misma flecha, en el sentido indicado por ésta.



Este pegado indica que se identifican los puntos  $(0, y)$  con  $(1, y)$  para cada  $0 \leq y \leq 1$ . El resto de puntos no se identifican con nada diferente a ellos.

El espacio cociente  $C = R / \sim$  es un cilindro.

## Tras el pegado



La superficie obtenida es una variedad topológica: El disco sombreado en el cilindro corresponde (antes de la identificación) a dos "medio discos" en el cuadrado, que son abiertos en éste. Por lo tanto es abierto en el cilindro.

Un camino más "formal" para demostrar que  $R/\sim$  es homeomorfa al cilindro

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

es construir la aplicación

$$\bar{F} : R \rightarrow K, \quad \bar{F}(s, t) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, t),$$

y comprobar que  $\bar{F}$  induce una aplicación  $F : R/\sim \rightarrow K$  que es un homeomorfismo. Para esto, ayuda bastante el problema 1.3.

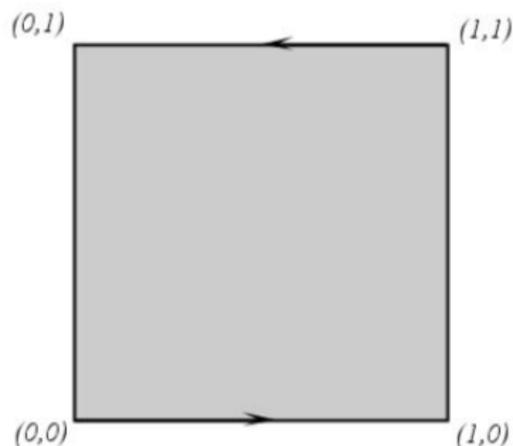
# Möbius y su banda



La banda de Möbius se construye de forma similar al cilindro, pero dándole previamente media vuelta a uno de los lados que se pegan.



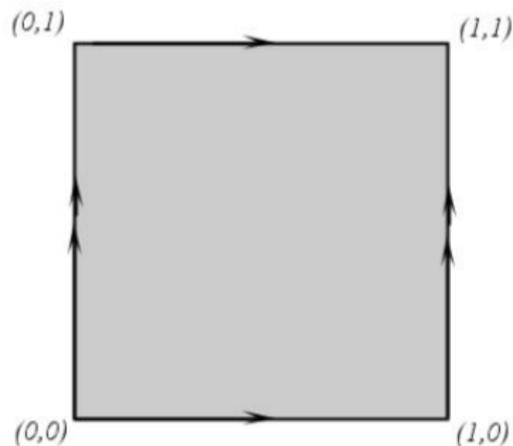
## La banda: pegado



Ahora pegamos cada punto  $(x, 0)$  con el  $(1 - x, 1)$  para cada  $0 \leq x \leq 1$ . El resto de puntos no se identifican con nada diferente a ellos. Esto equivale a pegar los bordes con un "giro" previo.

La frontera de la banda tiene una sola componente conexa: empieza en  $(0, 0)$ , sube a  $(0, 1) \sim (1, 0)$  y continúa subiendo hasta  $(1, 1) \sim (0, 0)$  donde se cierra. Por ello, obtenemos una superficie diferente del cilindro.

# El toro $T$



Se identifican  $(x, 0)$  con  $(x, 1)$  por un lado, y por otro  $(0, y)$  con  $(1, y)$ , donde  $0 \leq x, y \leq 1$ . Se puede visualizar pegando primero los lados verticales para obtener el cilindro, y después identificando los bordes de éste. No tiene frontera.

Para construir un homeomorfismo de  $T$  a  $S^1 \times S^1$  usamos la aplicación  $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1 \times S^1$ ,

$$F(s, t) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, \cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

y el problema (1.3).

# Klein y su botella

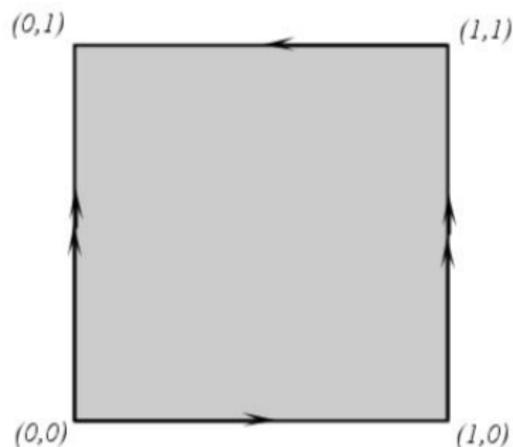


Felix Klein (1849-1925).



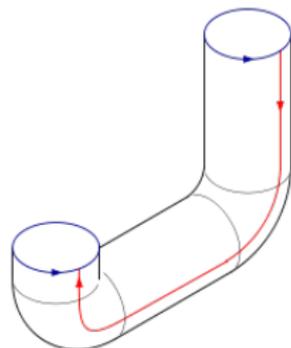
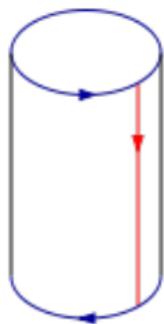
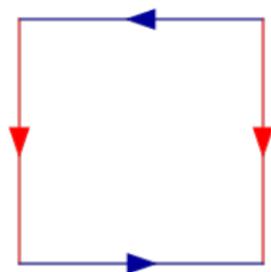
Su botella (1882-presente).

## Botella de Klein: construcción.



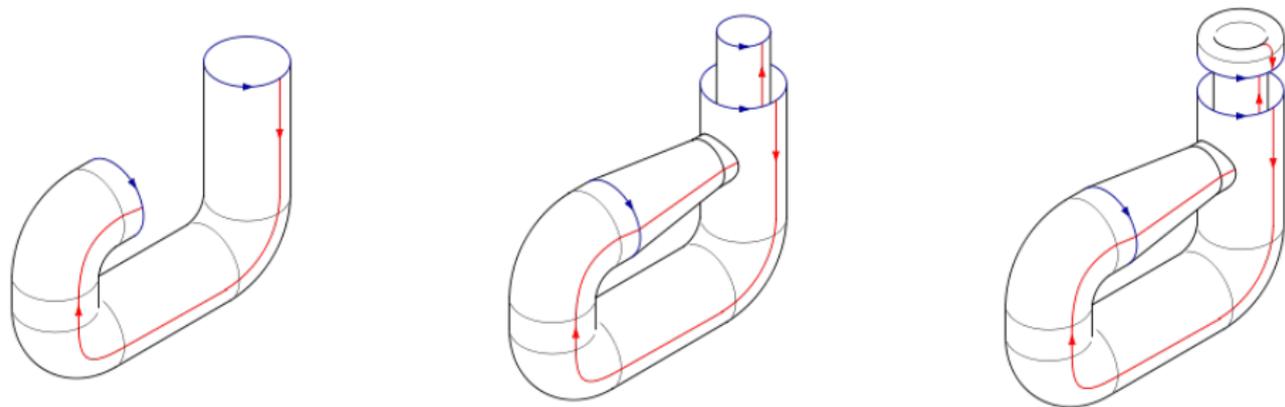
Las identificaciones son  $(0, y) \sim (1, y)$ ,  $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$ , donde como siempre  $0 \leq x, y \leq 1$ . Podemos visualizarlo como si primero pegáramos verticalmente para tener un cilindro, y luego pegáramos los bordes de éste "dándoles la vuelta". Las siguientes imágenes ayudan a entender esto.

## Pasos para el pegado de la botella.



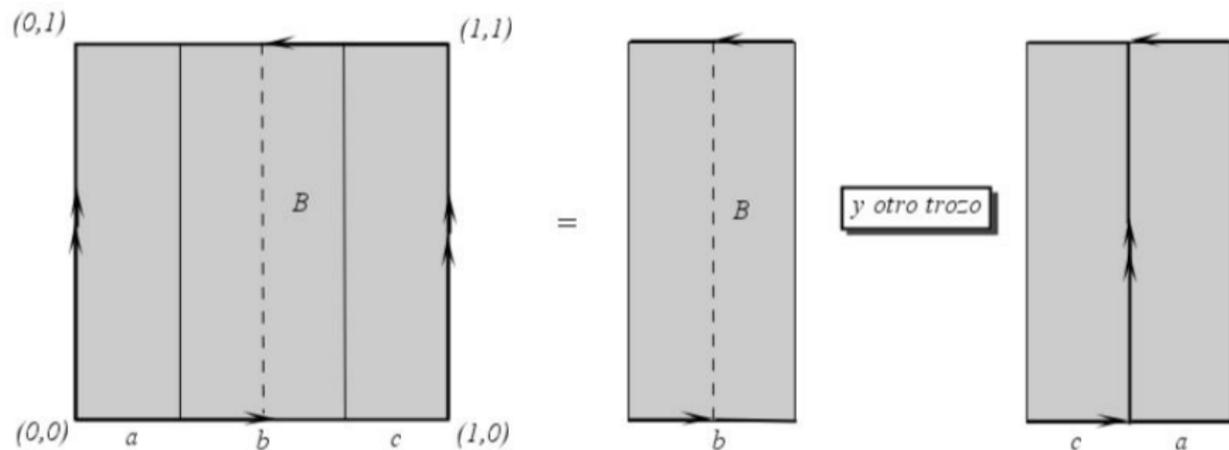
Las circunferencias azules están mal orientadas para poder ser pegadas; hace falta pasar "a través" de la botella. En la tercera imagen empezamos a estirar el cilindro para ver esto más claro.

## Pasos para el pegado de la botella (cont.)



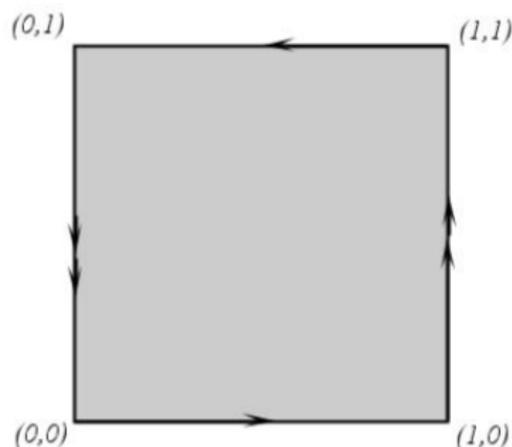
Los tres pasos que faltan: el cuarto da continuidad a la descripción, en el quinto intentamos corregir la orientación de las circunferencias azules atravesando la botella, y en el último comenzamos la identificación que faltaba. Es muy importante darse cuenta de que, en contra de lo que nuestro dibujo tridimensional parece indicar, la botella de Klein **NO TIENE AUTOINTERSECCIONES**, ya que el espacio cociente no las tiene.

## Dentro de la botella de Klein



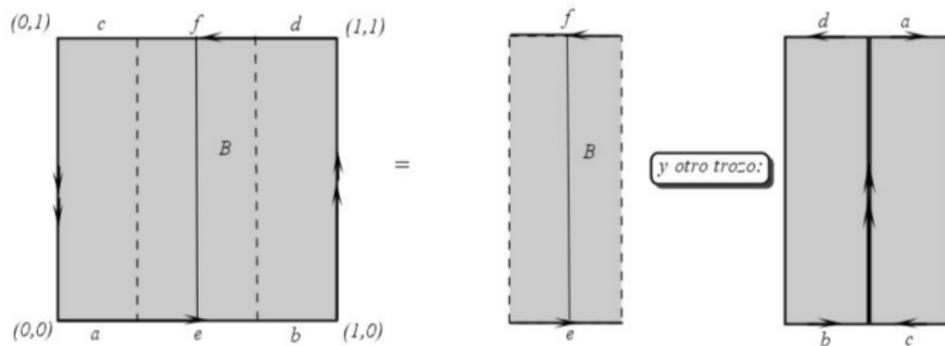
La botella de Klein puede describirse como dos bandas de Möbius cuyos bordes se identifican mediante un homeomorfismo  $f : \partial B_1 = S^1 \rightarrow S^1 = \partial B_2$ .

# El plano proyectivo.



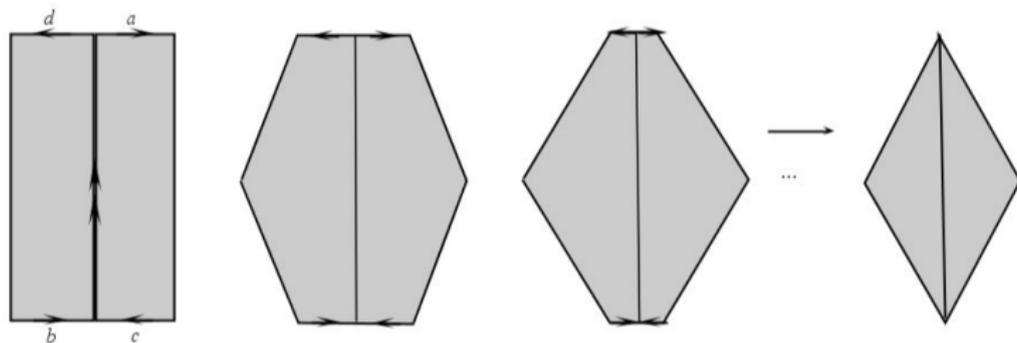
Las identificaciones que realizamos son  $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ ,  $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$ , donde como siempre  $0 \leq x, y \leq 1$ . Si hiciéramos una de las identificaciones primero, obtendríamos una banda de Moebius, y el siguiente pegado recordaría el de la botella de Klein, aunque es difícil de visualizar. Esto es debido a que el plano proyectivo no puede representarse fielmente dentro de  $\mathbb{R}^3$ . Sería necesario ir a  $\mathbb{R}^4$  para poder describirlo sin cortes.

# Dentro del proyectivo



Si cortamos el proyectivo así, obtenemos una banda de Mobius, y otro trozo que es homeomorfo a un disco, como muestra la próxima pantalla.

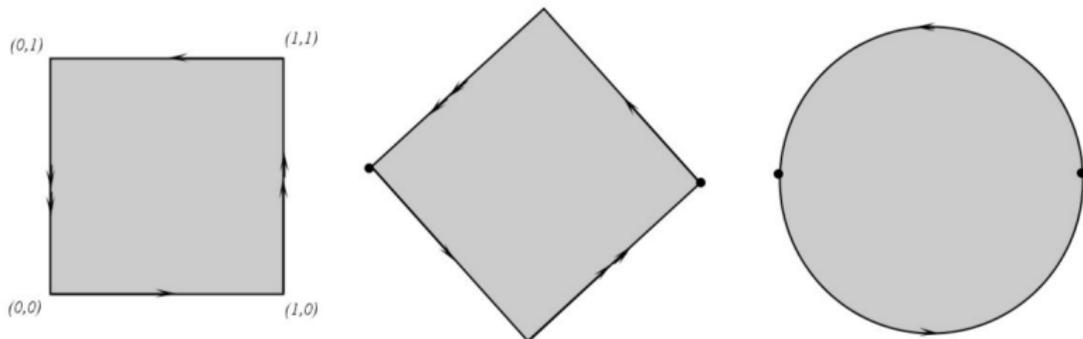
## Dentro del proyectivo (cont)



Deformando los bordes superiores e inferiores, se obtiene un homeomorfismo de la "pieza extra" a un disco. Con esto se obtiene que el plano proyectivo es homeomorfo a una cinta de Mobius con un disco pegado por el borde: tanto la cinta como el disco tienen una circunferencia  $S^1$  por frontera, e identificando éstas mediante un homeomorfismo  $f : \partial B_1 = S^1 \rightarrow S^1 = \partial B_2$  tenemos el plano proyectivo.

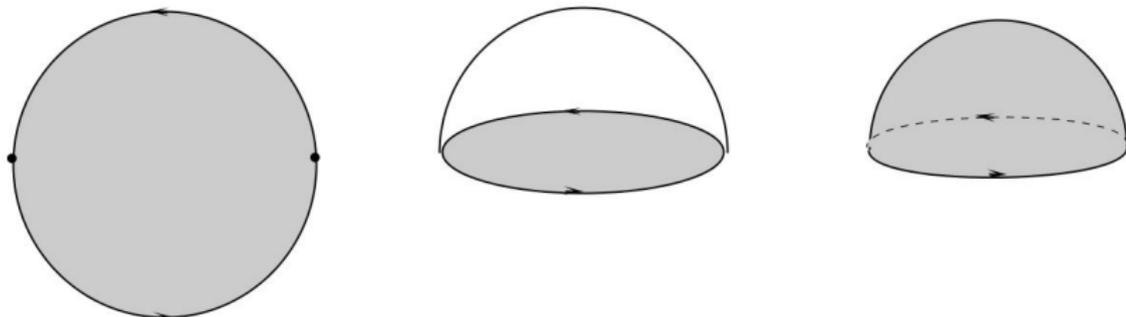
# El proyectivo como cociente de la esfera $S^2$

El plano proyectivo se puede obtener también como cociente de la esfera unidad en  $\mathbb{R}^3$ ,  $S^2 = \{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$ . De hecho, esta identificación nos permite comprobar que efectivamente coincide con el plano proyectivo real de geometría proyectiva.



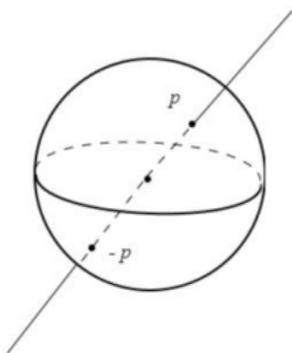
Empezamos con el proyectivo obtenido como identificaciones en los bordes del cuadrado, y rotamos éste para darnos cuenta de que las identificaciones dadas dan un cociente homeomorfo al obtenido con un disco en el que identificaríamos puntos opuestos en el borde de éste.

## El proyectivo como cociente de la esfera $S^2$ (cont.)



Como ningún punto del interior del disco se identifica con nada diferente a sí mismo, el cociente indicado por el primer dibujo es equivalente al obtenido con el hemisferio superior de la esfera, en el que identificaríamos puntos opuestos en el ecuador.

## El proyectivo como cociente de la esfera $S^2$ (cont.)

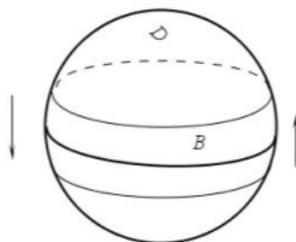


Si añadimos el hemisferio sur (abierto) al dibujo, e identificamos puntos antipodales en toda la esfera, es fácil ver que se obtiene el espacio cociente precedente. (fácil, pero no trivial: ¡hay que usar el problema (1.3)!) Pero ésta es la identificación que se hacía originalmente para obtener el plano proyectivo real en Geometría I:

$$p, q \in S^2, \quad p \sim q \iff p = q, \text{ ó } p = -q$$

## El proyectivo como cociente de la esfera $S^2$ (cont.)

Con esta representación del proyectivo, la banda de Moebius que contiene es fácilmente identificable:

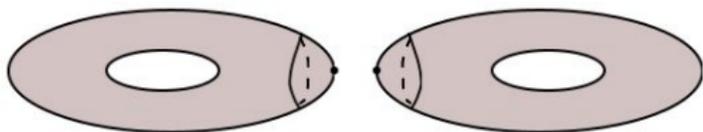


Una banda de anchura constante alrededor del ecuador donde identificamos puntos antipodales da, en el cociente, una cinta de Moebius. El complemento en  $S^2$  son dos discos antipodales y disjuntos, así que en el cociente dan lugar a un único disco.

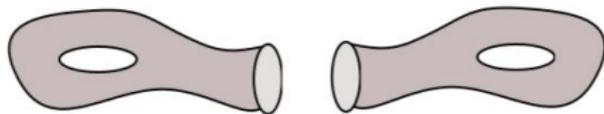
# Suma conexa

Para construir más superficies podemos seguir pegando lados en polígonos más complicados, pero es más útil definir una especie de "suma" de superficies como sigue.

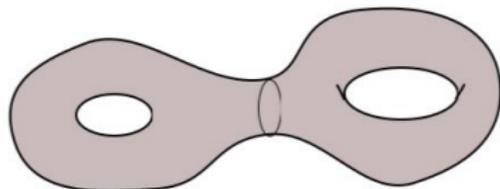
- 1 Escogemos discos abiertos en  $S_1$  y en  $S_2$ :  $D_1$  y  $D_2$  respectivamente.



- 1 Los removemos para obtener dos superficies  $S'_1$ ,  $S'_2$  con frontera  $\partial S_1 \sim S^1 \sim \partial S_2$ .

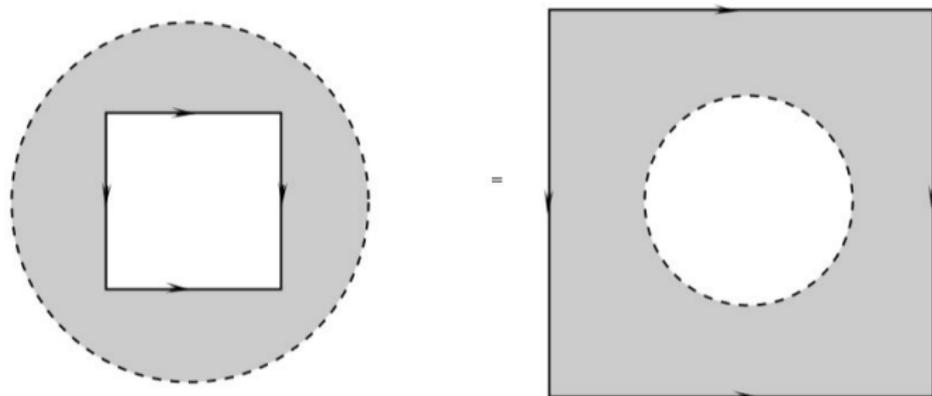


- 1 Identificamos los bordes de  $S'_1$ ,  $S'_2$  para obtener una nueva superficie denotada por  $S_1 \# S_2$ .



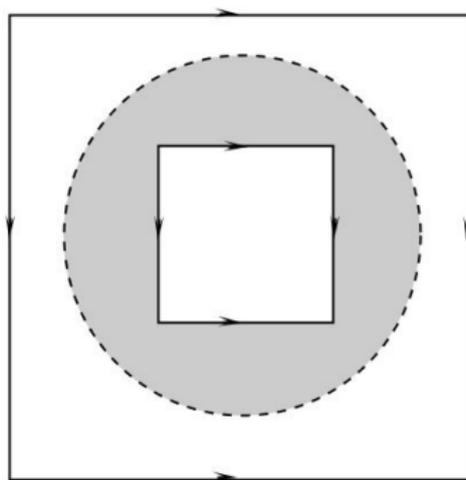
## Suma conexa en diagramas

A veces ayuda poder ver una suma conexa en diagramas de pegado. En este ejemplo vamos a ver la suma conexa de dos toros. Observad que la figura de la derecha es un cuadrado donde hacemos las identificaciones de un toro, menos un disco. Como el disco no entra en las identificaciones, tendremos un toro menos un disco. La figura es homeomorfa a la de la izquierda (usad un homeomorfismo del cuadrado menos un disco que intercambie los bordes).



## Suma conexa en diagramas (cont.)

Ahora pegamos ambas figuras identificando la frontera del disco. El resultado será por tanto una suma conexa de dos toros, o con diagramas:



El mismo argumento se puede usar para identificar otras sumas conexas en diagramas.

## Suma conexa (cont.)

Se puede demostrar (pero no es fácil) que  $S_1 \# S_2$  está bien definida (salvo homeomorfismos) independientemente de los discos  $D_1, D_2$  elegidos, y de la identificación elegida entre  $\partial S'_1$  y  $\partial S'_2$ . Además, se tiene

- 1  $(S_1 \# S_2) \# S_3$  es homeomorfa a  $S_1 \# (S_2 \# S_3)$ ;
- 2  $S_1 \# S_2$  es homeomorfa a  $S_2 \# S_1$ ;
- 3  $S_1 \# S^2$  es homeomorfa a  $S_1$ .

Pero no hay "elementos inversos" (salvo para  $S^2$ ...)

Uno puede ahora empezar a construir nuevas superficies a partir de las que ya tenemos, usándolas como piezas en sumas conexas. Por ejemplo

$$T \# T \# M \# K \# K \# P_2(\mathbb{R})$$

con  $T$  el toro,  $M$  Mobius,  $K$  botellas de Klein,  $P_2(\mathbb{R})$  el proyectivo, etc. Pero esto deja dos cuestiones:

- ¿Puedo obtener todas las superficies así?
- ¿Cómo distingo las distintas superficies que obtenga?

# Triangulaciones de superficies

Un triángulo en una superficie es un subconjunto cerrado  $T \subset S$  homeomorfo a un triángulo cerrado  $T' \subset \mathbb{R}^2$ .

Si  $h : T' \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow T \subset S$  es el homeomorfismo, las imágenes mediante  $h$  de los vértices y de los lados de  $T'$  se llaman respectivamente los vértices y los lados de  $T$ .

Queremos cubrir ahora  $S$  con triángulos, de tal forma que parezca un "mosaico".

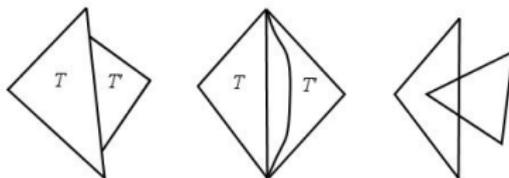
## Definición

*Una triangulación de  $S$  es una familia finita de triángulos  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$  tal que*

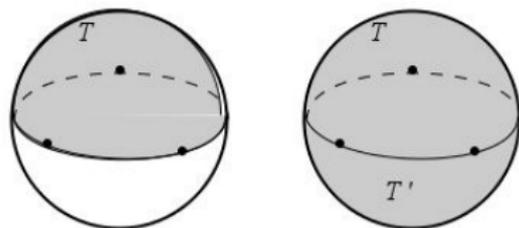
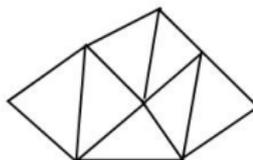
- 1  $S = \cup_{i=1}^n T_i$ ;
- 2 Dada cualquier pareja de triángulos  $T_i, T_j$  en  $\mathcal{T}$  se tiene que
  - o bien  $T_i \cap T_j = \emptyset$ ,
  - o bien  $T_i \cap T_j$  es un único vértice común a  $T_i$  y  $T_j$ ,
  - o bien  $T_i \cap T_j$  es un único lado común.

# Triangulaciones (cont)

Esto es lo que uno no puede ver en triangulaciones:



Esto sí, pero hasta cubrir toda la superficie:

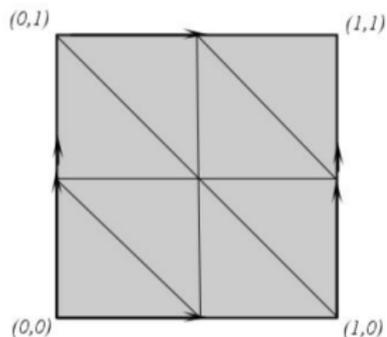


La primera figura es un triángulo (!!)

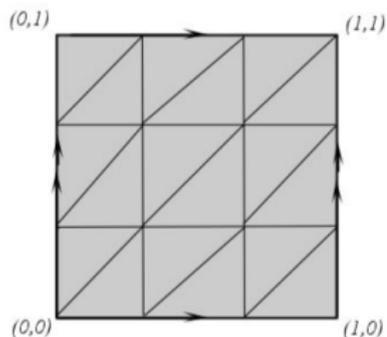
en la esfera: el hemisferio norte es un triángulo cuyos lados son los tres segmentos del ecuador entre los puntos marcados (que son los vértices del triángulo); la segunda son dos triángulos en la esfera, pero no una triangulación: los triángulos se intersecan en demasiados lados.

# Triangulaciones (cont.)

1 La siguiente no es una triangulación del toro, aunque a primera vista lo parezca:



1 La siguiente sí lo es, aunque es tedioso comprobarlo:



# Existencia de triangulaciones de superficies

Teorema (Radó, 1925)

*Toda superficie con o sin borde admite una triangulación.*

El teorema es sencillo de formular, pero es difícil de probar. Lo damos por cierto.

# Teorema de clasificación de superficies

Empezamos con un resultado intermedio para ir mejorándolo más adelante:

## Proposición

*Sea  $S$  una superficie compacta, conexa y sin borde. Entonces  $S$  es homeomorfa a uno de estos tres casos:*

- 1 *bien a  $S^2$ ,*
- 2 *bien a  $T \# \dots \# T$ ,*
- 3 *bien a  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \dots \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ .*

Este teorema dice qué superficies sin borde pueden existir. No dice nada de si son diferentes entre sí, cuestión a la que regresaremos más adelante.

## Demostración de la proposición.

Tomamos una triangulación  $\mathcal{T}$  de  $S$ . Separamos los triángulos  $T_1, \dots, T_n$  manteniendo la información de qué lado se identifica con cual, y en qué sentido. Una vez separados, empezamos el camino inverso: los detalles son largos de explicar y nos llevarían demasiado lejos, pero eventualmente, si uno es cuidadoso, se puede recuperar la superficie  $S$  como cociente de un polígono en el plano en el que se realizan identificaciones de lados en su borde.

Un examen cuidadoso (pero demasiado largo) de tales identificaciones muestra que si  $S$  no es la esfera, entonces es suma conexa de toros  $T$ , botellas de Klein  $K$ , y planos proyectivos  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  (los detalles aparecen desperdigados en el artículo de la bibliografía G.K. Francis, J.R. Weeks: *Conway's ZIP Proof*, Amer. Math. Monthly, Vol 106, N 5, pp. 393–399,).

Lo que nos queda por ver es que cualquier superficie de esa form puede reducirse a una de las de la lista. Esto se hará mediante dos lemas:

Lema:  $K = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Demostración.

Un plano proyectivo es la unión de una cinta de Moebius y un disco pegados por el borde mediante un homeomorfismo:

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = M \cup_h D^2$$

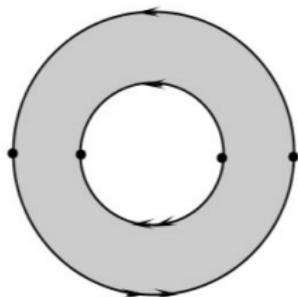
Para sumar dos planos proyectivos, primero removemos un disco  $D^2$  de cada uno de los sumandos. Al hacer esto tenemos dos bandas de Moebius, una por cada sumando, cuyas fronteras son circunferencias  $S^1$  que corresponden al borde del disco  $D^2$  que removemos.

El último paso de la suma conexa requiere identificar las circunferencias mediante algún homeomorfismo  $h'$ :

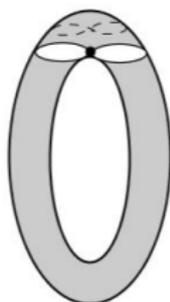
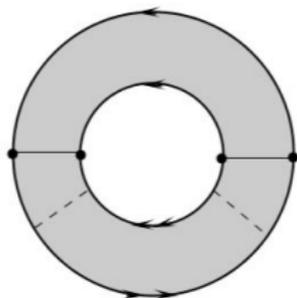
$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = M \cup_{h'} M$$

Pero vimos anteriormente que esto resultaba en la botella de Klein (Ver "Dentro de la botella de Klein"). □

Lema:  $T \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = K \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$



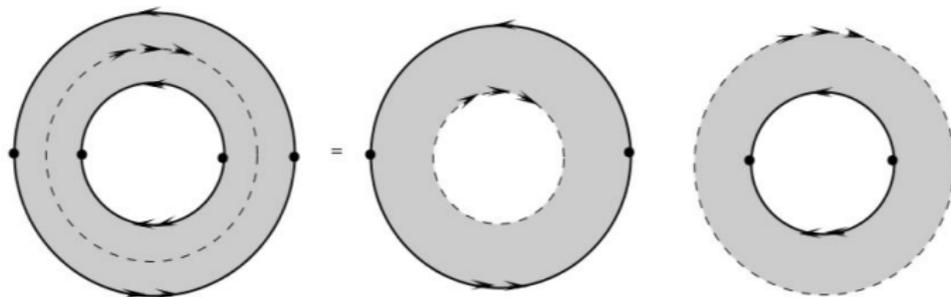
Esto lo demostraremos con el diagrama de la izquierda. Haremos las identificaciones en órdenes diferentes. Primero identificamos los lados marcados con una flecha simple:



El resultado es un toro, al que le cortamos un disco; si ahora identificamos la mitad inferior, obtenemos una cinta de Moebius que se está pegando al toro a lo largo de la frontera. Ya sabemos que esto es  $T \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Por si acaso esto no queda claro (después de todo, el dibujo es un poco confuso), realizaremos este pegado de nuevo en varios pasos.

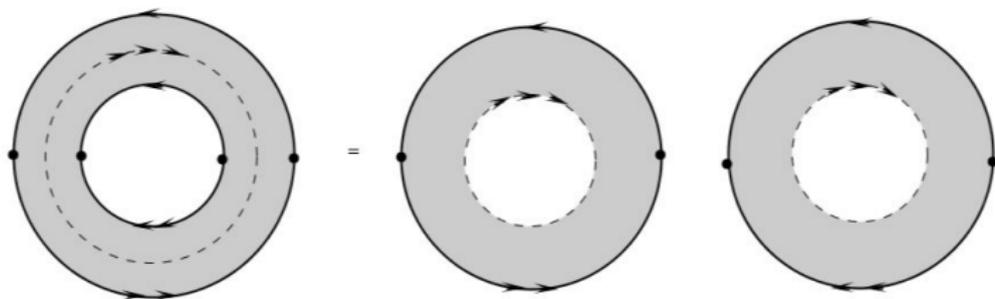
# Lema: $T \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = K \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (cont.)

Repetimos en varios pasos el pegado de las flechas simples primero, con objeto de que se vea un poco mejor. Primero cortamos el dibujo por un círculo intermedio (marcado con una línea intermitente en el dibujo). Hay que recordar que más adelante habrá que reparar este corte volviendo a identificar los lados que hemos separado. Para ello lo marcaremos con una triple flecha.



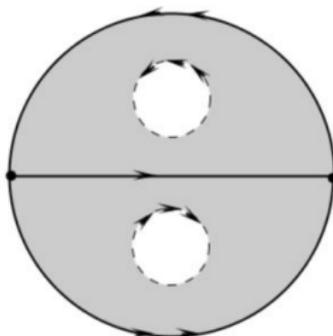
Lema:  $T \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = K \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  (cont.)

Ahora aplicamos un homeomorfismo del anillo que cambie la circunferencia interior y la exterior. Con esto, facilitamos el pegado de los lados con la flecha simple.



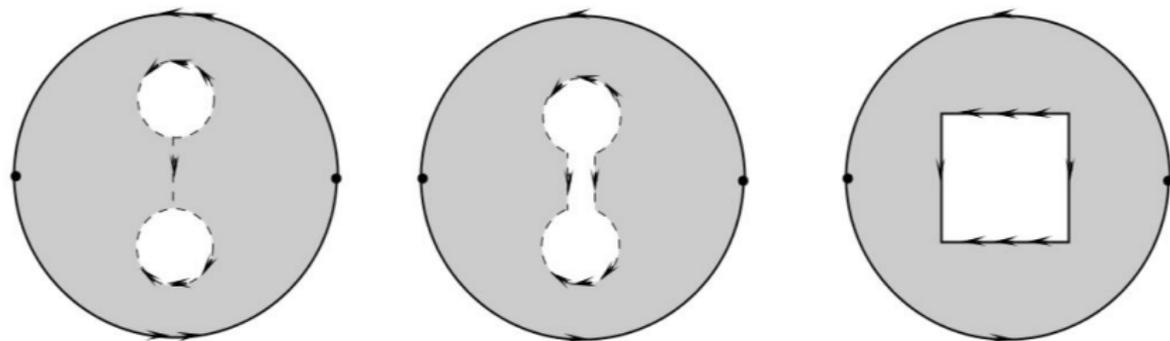
## Lema: $T\#\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = K\#\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (cont.)

Esta es la figura resultante después de pegar la flecha simple; al hacer esto, e intentar colocar el espacio resultante sobre el plano, nos vemos forzados a invertir la dirección de las flechas de la mitad superior, lo que explica su nuevo sentido. No se debería seguir leyendo hasta haber entendido bien este punto.



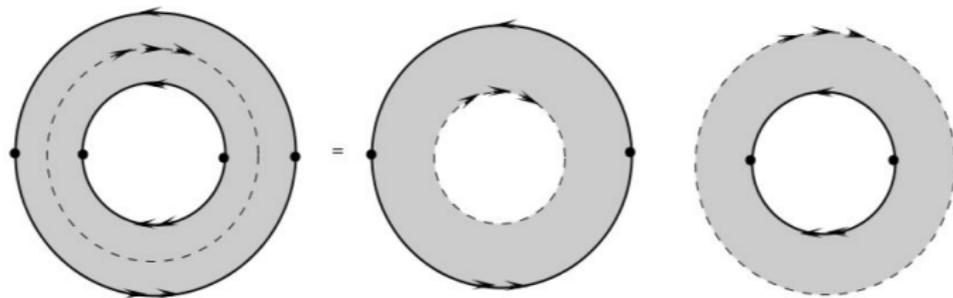
## Lema: $T \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = K \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (cont.)

Para poder ver qué espacio es el obtenido, nos ayudamos pegando un nuevo corte entre los círculos interiores: otra vez hay que acordarse del corte introduciendo flechas para acordarse de que lados corresponden al mismo punto. Al hacer esto, y abrir el circuito anterior, vemos un cuadrado con las identificaciones del toro. La parte exterior corresponde a un proyectivo. Por la sección en que se indica cómo identificar algunas sumas conexas mediante diagramas, vemos que el espacio obtenido de esta forma es  $T \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ .



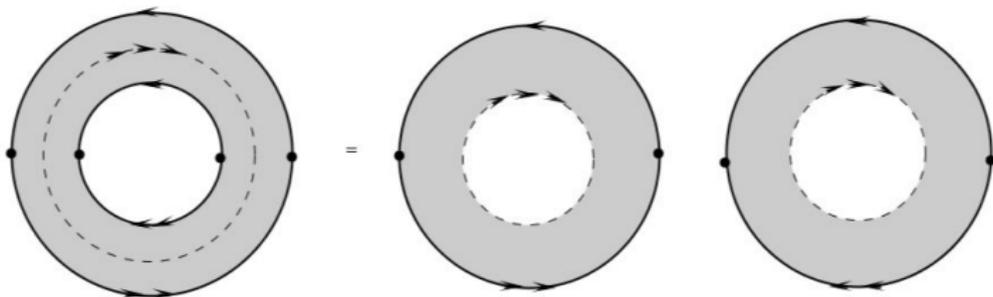
## Lema: $T \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = K \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (cont.)

Ahora pegamos en el otro orden. Para ello, primero cortamos el dibujo por un círculo intermedio (marcado con una línea intermitente en el dibujo). Hay que recordar que más adelante habrá que reparar este corte volviendo a identificar los lados que hemos separado.



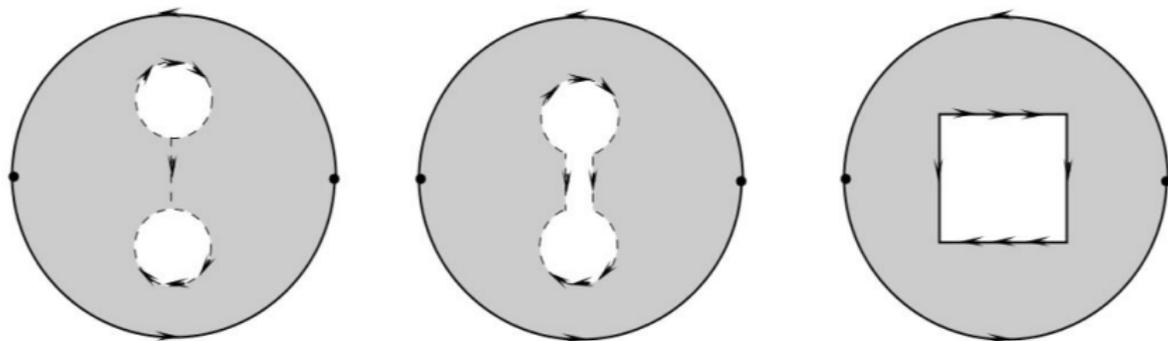
# Lema: $T\#\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = K\#\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (cont.)

Para poder pegar la flecha doble, tenemos que sacarla de dentro en la figura de la derecha. Esto es lo que se hace en este dibujo: observad que es equivalente al de la pantalla anterior: para visualizarlo ayuda pensar que el dibujo viniera de un cilindro que hemos aplastado en el plano. En un caso lo aplastamos de abajo a arriba, y en el otro de arriba a abajo.



## Lema: $T \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = K \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (cont.)

Tras pegar la flecha doble, queda la figura de la izquierda. Para poder ver qué queda, eliminamos la flecha doble (que ya se pegó) y cortamos por el segmento vertical indicado en la figura central. Con esto obtenemos un cuadrado interno cuyas identificaciones son como las de la figura de la derecha. Ya sólo queda recordar que esto es la suma conexa de un plano proyectivo y de una botella de Klein.



## Demostración de la proposición (final).

Si la superficie  $S \neq S^2$ , entonces  $S$  es suma conexa de toros, botellas de Klein, y  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ 's. Pueden pasar dos cosas:

1. No hay ni botellas de Klein ni proyectivos presentes:  $S$  es sólo suma conexa de toros y es el caso (2) de la proposición.
2. Hay alguna botella de Klein o algún proyectivo: Usamos las dos identidades demostradas para escribir cualquier suma conexa de la forma

$$T \# \dots T \# K \# \dots \# K \# \dots \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \dots \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

como una suma conexa con sólo  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ 's

- 1 Usando  $K = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , podemos escribir  $S$  sólo como una suma conexa de toros  $T$ 's y de proyectivos. Tiene que haber al menos un proyectivo presente.
- 2 Cada suma de un toro  $T$  con un proyectivo  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  lo reemplazamos por  $K \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , y éste por  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Así hemos hecho bajar el número de toros en uno. Tras un número finito de pasos, sólo habrá proyectivos (caso (3) de la proposición).

# Teorema de clasificación de superficies (con o sin borde)

Sea  $S$  una superficie compacta y conexa con  $r$  componentes de borde. Entonces  $S$  es homeomorfa a:

- 1 bien a  $S^2 \setminus \cup_{i=1}^r D_i^2$ ,
- 2 bien a  $T \# \dots \# T \setminus \cup_{i=1}^r D_i^2$ ,
- 3 bien a  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \dots \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \cup_{i=1}^r D_i^2$

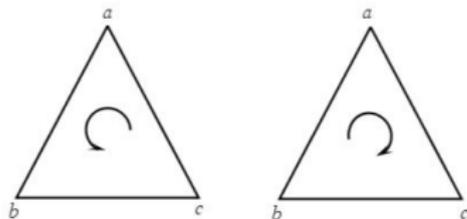
donde  $D_i$ 's son discos abiertos disjuntos. Si  $S$  no tiene borde,  $r = 0$  (i.e, no aparece la parte con los discos).

## Demostración.

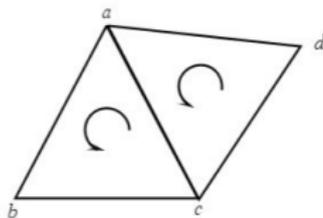
Sólo hay que darse cuenta de que si  $S$  tiene borde, cada componente de  $\partial S$  es una variedad 1-dimensional compacta sin borde, i.e, homeomorfa a  $S^1$ . Pegando discos  $D^2$  a esos bordes da una variedad compacta, conexa, sin borde, y por lo tanto debe estar en la lista de la proposición anterior. Volviendo a quitar los discos, obtenemos el resultado. □

# Orientabilidad

Si  $\mathcal{T}$  es una triangulación de una superficie, cada triángulo admite dos posibles orientaciones: Bien como  $abc$ , bien como  $acb$ . Podemos identificar cada una de las orientaciones del triángulo como una forma de girar en pequeñas regiones, como discos.



Diremos que dos triángulos adyacentes tienen una orientación compatible cuando ambos "giran en la misma dirección":



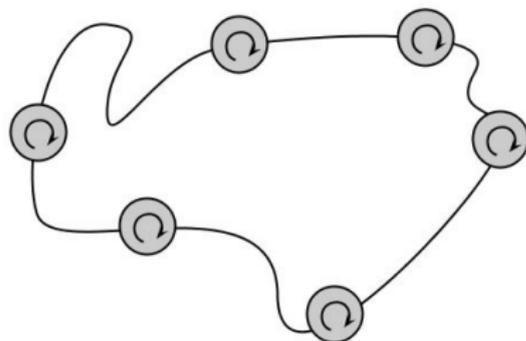
## Definición

*Diremos que una superficie  $S$  es orientable cuando tiene una triangulación en la que todos los triángulos adyacentes están orientados de forma compatible.*

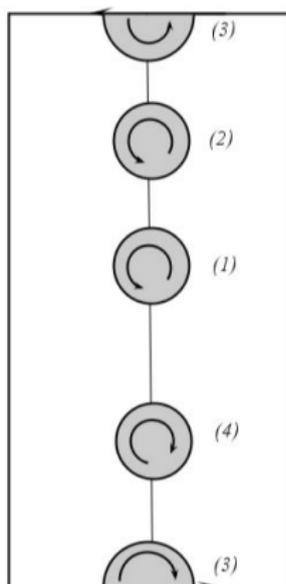
## Orientaciones (cont.)

Podemos pensar también en que un triángulo orientado orienta discos pequeños contenidos en él. Si una superficie es orientable, entonces todos los discos (suficientemente pequeños) en la superficie admiten un sentido de giro común y sin cambios.

Esto implica que si recorremos cualquier curva cerrada en la superficie, conservando memoria de la orientación, debemos volver a un punto donde la orientación del disco trasladado debe coincidir con la orientación del disco original.



# Orientabilidad



Pero esto no ocurre para todas las superficies: en una cinta de Moebius, por ejemplo, al recorrer la curva central, la orientación del disco trasladado no coincide con la del disco original; esto quiere decir que la cinta de Moebius no es orientable. El mismo argumento da:

## Lema

*Si una superficie contiene el interior de una cinta de Moebius, entonces no es orientable.*

# Orientabilidad (cont.)

## Lema

Sean  $S, S'$  superficies compactas, conexas, con o sin borde.

- 1 Si  $S$  es orientable y  $D$  es un disco cerrado de  $S$ , entonces  $S \setminus \text{int}(D)$  es orientable.
- 2 Si  $S$  y  $S'$  son ambas orientables, entonces  $S \# S'$  es orientable.

## Demostración.

Ejercicios. □

Combinando lo anterior tenemos

## Proposición

Si  $S$  es una superficie compacta, conexa, con o sin frontera, entonces

- $S$  es orientable si y sólo si es homeomorfa a  $S^2 \setminus \cup_{i=1}^r D_i$  o a  $T \# \dots \# T \setminus \cup_{i=1}^r D_i$ .
- $S$  es no orientable si y sólo si es homeomorfa a  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \dots \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \cup_{i=1}^r D_i$ .

# Característica de Euler

Sea  $S$  una superficie con una triangulación  $\mathcal{T}$ . Sea:

- 1  $v_0$  el número de vértices de  $\mathcal{T}$ ;
- 2  $v_1$  el número de lados de  $\mathcal{T}$ ;
- 3  $v_2$  el número de triángulos de  $\mathcal{T}$ .

Definimos el número  $\chi(S, \mathcal{T}) := v_0 - v_1 + v_2$ .

## Lema

*Si  $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$  son dos triangulaciones diferentes de  $S$ , entonces  $\chi(S, \mathcal{T}) = \chi(S, \mathcal{T}')$ .*

## Definición (Característica de Euler de $S$ )

*El número*

$$\chi(S; \mathcal{T}) = v_0 - v_1 + v_2$$

*no depende de la triangulación  $\mathcal{T}$  elegida. Lo denotaremos  $\chi(S)$  y lo llamaremos característica de Euler de la superficie  $S$ .*

## Característica de Euler (cont.)

### Lema

Si  $S_1, S_2$  son dos superficies compactas, entonces  $\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$

### Demostración.

Tomamos triangulaciones  $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$  de  $S_1, S_2$ , respectivamente. Elegimos un triángulo  $T$  en  $S_1$ , y un triángulo  $T'$  en  $S_2$ . Ambos son homeomorfos a discos cerrados, así que podemos usarlos como los discos que se quitan en la definición de suma conexa. El resto de triángulos en  $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$  nos dan una triangulación de  $S_1 \# S_2$ . Calculamos  $v_0, v_1, v_2$  para esta triangulación de  $S_1 \# S_2$ :

- $v_2(S_1 \# S_2) = v_2(S_1) - 1 + v_2(S_2) - 1$ , ya que quitamos un triángulo a cada triangulación;
- $v_1(S_1 \# S_2) = v_1(S_1) + v_1(S_2) - 3$ , ya que los tres lados de  $T$  los identificamos con los tres lados de  $T'$ ;
- $v_0(S_1 \# S_2) = v_0(S_1) + v_0(S_2) - 3$ , ya que los tres vértices de  $T$  se identifican con los tres vértices de  $T'$ .

Al calcular  $v_0(S_1 \# S_2) - v_1(S_1 \# S_2) + v_2(S_1 \# S_2)$ , se obtiene el lema. □

## Característica de Euler (cont.)

### Lema

Si  $S$  y  $S'$  son homeomorfas, entonces  $\chi(S) = \chi(S')$ .

### Demostración.

si  $\mathcal{T}$  es una triangulación de  $S$ , y  $h: S \rightarrow S'$  es un homeomorfismo, entonces  $\mathcal{T}' = \{h(T) : T \in \mathcal{T}\}$  es una triangulación de  $S'$ . Como tiene el mismo número de vértices, lados y triángulos que  $\mathcal{T}$ , entonces  $\chi(S) = \chi(S')$ .  $\square$

### Lema

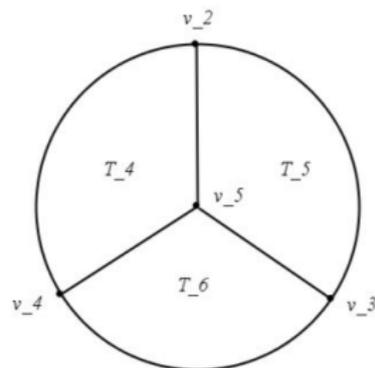
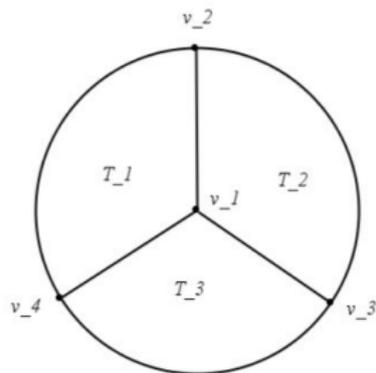
Si  $\bar{D} \subset S$  es un disco cerrado en una superficie compacta con interior  $D$ , entonces  $\chi(S \setminus D) = \chi(S) - 1$ .

### Demostración.

Tomamos una triangulación  $\mathcal{T}$  de  $S$ ; si  $T$  es uno de los triángulos,  $S \setminus D \sim S \setminus \text{int}(T)$ , así que  $\chi(S \setminus D) = \chi(S \setminus \text{int}(T)) = \chi(S) - 1$ .  $\square$

# Cálculo de $\chi(S)$ para las superficies de la lista.

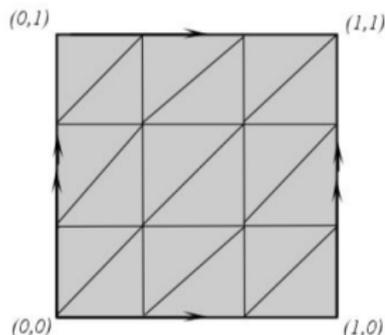
**1. La esfera  $S^2$ :** Esta es una triangulación de la esfera: los discos son los dos hemisferios; los triangulamos como está indicado. Como la esfera se obtiene identificando los dos discos por el borde, nos queda  $\chi(S^2) = 5 - 9 + 6 = 2$ .



# Cálculo de $\chi(S)$ para las superficies de la lista (cont).

## 2. Suma conexa de toros $T \# \dots \# T$ :

$\chi(T) = 0$ , ya que esto lo podemos calcular con la triangulación indicada:



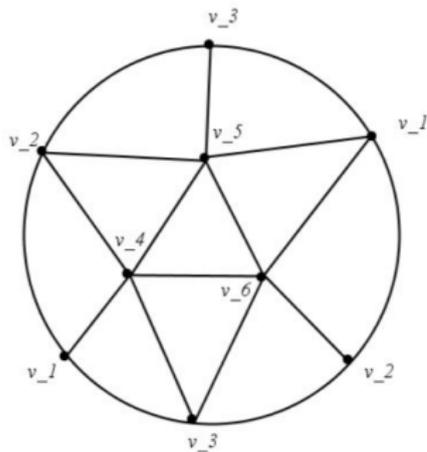
Si  $S = T \# \dots \# T$  (con  $g$  sumandos), entonces por inducción,  $\chi(S) = 2 - 2g$ .

Si  $S = T \# \dots \# T \setminus \cup_{i=1}^r D_i$ , entonces otra vez por inducción,  $\chi(S) = 2 - 2g - r$ .

# Cálculo de $\chi(S)$ para las superficies de la lista (cont).

## 3. Suma conexa de proyectivos $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \dots \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ :

$\chi(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = 1$ , ya que esto lo podemos calcular con la triangulación indicada:



Si  $S = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \dots \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  (con  $g$  sumandos), entonces por inducción,  $\chi(S) = 2 - g$ .

Si  $S = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \dots \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \cup_{i=1}^r D_i$ , entonces otra vez por inducción,  $\chi(S) = 2 - g - r$ .

# Teoremas

## Teorema

*Sean  $S$ ,  $S'$  superficies compactas, conexas, sin borde. Entonces  $S$  y  $S'$  son homeomorfas si y sólo si  $\chi(S) = \chi(S')$  y ambas son o bien orientables, o bien no orientables.*

## Teorema

*Sean  $S$ ,  $S'$  superficies compactas, conexas, con borde. Entonces  $S$  y  $S'$  son homeomorfas si y sólo si  $\chi(S) = \chi(S')$ , ambas son o bien orientables, o bien no orientables, y además  $\partial S$  y  $\partial S'$  tienen el mismo número de componentes conexas.*

Estos teoremas, junto con los cálculos de  $\chi(S)$  precedentes, quiere decir que la lista no es sólo exhaustiva, sino además que ninguna superficie de la lista está repetida.

# Género de una superficie

Ya hemos visto que cualquier superficie compacta, conexa, es homeomorfa a  $S^2$ , una suma conexa de toros, o una suma conexa de proyectivos, a los que se les quita un número finito de discos disjuntos. El **género de  $S$**  es el número de sumandos:

## Definición

- El género de  $S^2 \setminus \cup_{i=1}^r D_i$  es 0;
- el género de  $\overbrace{T \# \dots \# T}^k \setminus \cup_{i=1}^r D_i$  es  $k$ ,
- el género de  $\overbrace{\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \dots \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})}^k \setminus \cup_{i=1}^r D_i$  también es  $k$ .

## Apéndice: topología subespacio

$Z$  un espacio topológico,  $X$  un subconjunto de  $Z$ .

$$\{X \cap A : A \text{ abierto de } Z\}$$

**Funciones continuas desde y hasta un subespacio:**  $X, Y, Z$  espacios topológicos.

- 1 **Inclusión:** Si  $A$  es subespacio de  $X$ , la inclusión  $j : A \rightarrow X$  es continua.
- 2 **Restricción del dominio:** Si  $f : X \rightarrow Y$  es continua, y si  $A$  es subespacio de  $X$ , entonces  $f|_A : A \rightarrow Y$  es continua.
- 3 **Restricción de la imagen:** Si  $f : X \rightarrow Y$  es continua, y si  $Z$  es un subespacio de  $Y$  con  $f(X) \subset Z$ , entonces la función  $g : X \rightarrow Z$  obtenida restringiendo la imagen de  $f$  (i.e,  $g(x) = f(x)$ , pero visto como punto en  $Z$ ) es continua.
- 4 **Agrandando la imagen:** Si  $f : X \rightarrow Y$  es continua, y si  $Z$  es un espacio topológico que contiene a  $Y$  como subespacio, entonces la función  $h : X \rightarrow Z$  obtenida como  $h(x) = f(x)$  es continua.

# Espacios producto.

$X$  e  $Y$  espacios topológicos. En  $X \times Y$  se define una topología con una *base* dada por los subconjuntos  $A \times B$ , donde  $A$  es abierto de  $X$ ,  $B$  abierto de  $Y$ .

## Continuidad:

- Si  $f : X_1 \rightarrow Y_1$ ,  $g : X_2 \rightarrow Y_2$  son continuas, entonces  $f \times g : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$  es continua.
- Las proyecciones  $\pi_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$ ,  $\pi_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_2$  son continuas.

## Apéndice: Espacios cociente.

Sea  $\sim$  una relación de equivalencia en un conjunto  $Z$ .

$X := Z / \sim$  el espacio cociente (o de clases), sus puntos se denotan  $\bar{x}$ , donde  $\bar{x}$  es la clase de equivalencia a la que pertenece  $x$ . Si  $x \sim x'$ , entonces  $\bar{x} = \bar{x}'$ .

$\pi : Z \rightarrow X$  la proyección canónica  $\pi(x) = \bar{x}$ .

**Topología cociente para  $\pi : Z \rightarrow X$ :**  $U \subset X$  es abierto si y sólo si  $\pi^{-1}(U)$  es abierto en  $Z$ .

# Espacios obtenidos mediante identificaciones

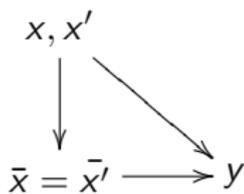
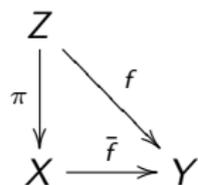
**Ejemplo: Partición de un conjunto  $Z$**  Si  $Z^*$  es una subdivisión de  $Z$  en conjuntos disjuntos, podemos poner una relación de equivalencia en  $Z$  como  $x \sim x' \iff x, x'$  se hallan en el mismo subconjunto.

$\pi : Z \rightarrow Z / \sim := X$  es un espacio obtenido de  $Z$  mediante **identificación**.

Para identificaciones, si  $U \subset X$ ,  $\pi^{-1}(U)$  es la unión de todos los puntos de  $Z$  cuya clase de equivalencia se halla en  $U$ , i.e, la unión de todos los conjuntos de la partición cuya clase de equivalencia está en  $U$ .

# Funciones desde cocientes

A menudo queremos construir funciones desde un espacio cociente  $\bar{f} : X \rightarrow Y$ .



Si se define  $\bar{f}(\bar{x})$  como  $f(x)$ , hay que asegurarse de que  $f(x) = f(x')$  para cualquier otro  $x' \sim x$  (ver problema 1.4).

Si  $X$  tiene la topología cociente,  $\bar{f}$  es continua si y sólo si lo es  $f$ .