Geometría III, CC. Matemáticas

Luis Guijarro

UAM

27 de Septiembre de 2010

Geometría III, CC.Matemáticas, UAM. Curso 2010/11, primer semestre.

Geometría III, CC.Matemáticas, UAM. Curso 2010/11, primer semestre.

PROFESOR: Luis Guijarro Santamaría. Despacho: C–XV–605. Tutorías por cita previa.

Geometría III, CC.Matemáticas, UAM. Curso 2010/11, primer semestre.

PROFESOR: Luis Guijarro Santamaría. Despacho: C–XV–605.
Tutorías por cita previa.

HORARIO: Lunes a Jueves, 12:30-13:20. Aula 01.17.AU.102.

Geometría III, CC.Matemáticas, UAM. Curso 2010/11, primer semestre.

PROFESOR: Luis Guijarro Santamaría. Despacho: C–XV–605. Tutorías por cita previa.

HORARIO: Lunes a Jueves, 12:30-13:20. Aula 01.17.AU.102.

PÁGINA WEB:
http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/lguijarr/docencia/geometria_3_0910/geo_3_index.html

De qué trata este curso

De qué trata este curso

Espacios topológicos donde todo punto tiene entornos parecidos a los de $\mathbb{R}^n$.

De qué trata este curso

Espacios topológicos donde todo punto tiene entornos parecidos a los de $\mathbb{R}^n$.

Tres niveles:

1. **Topológico:** ¿Se pueden clasificar salvo homeomorfismos?
2. **Diferenciable:** ¿Cómo puedo hacer cálculo en ellos?
3. **Métrico:** ¿Tienen forma? ¿Distancias? ¿Se curvan?

Por qué es troncal

Por qué es troncal

- Generalización de curvas y superficies. ¿Cómo es un objeto n-dimensional para n general?

Por qué es troncal

- Generalización de curvas y superficies. ¿Cómo es un objeto n-dimensional para n general?
- Extienden el cálculo diferencial a otros espacios, lo que puede ayudar a entenderlo mejor en $\mathbb{R}^n$.

Por qué es troncal

- Generalización de curvas y superficies. ¿Cómo es un objeto n-dimensional para n general?
- Extienden el cálculo diferencial a otros espacios, lo que puede ayudar a entenderlo mejor en $\mathbb{R}^n$.
- Son una gran fuente de ejemplos de espacios topológicos.

Por qué es troncal

- Generalización de curvas y superficies. ¿Cómo es un objeto n-dimensional para n general?
- Extienden el cálculo diferencial a otros espacios, lo que puede ayudar a entenderlo mejor en $\mathbb{R}^n$.
- Son una gran fuente de ejemplos de espacios topológicos.
- A muchos matemáticos nos gustan y mucho.

Por qué es troncal

- Generalización de curvas y superficies. ¿Cómo es un objeto n-dimensional para n general?
- Extienden el cálculo diferencial a otros espacios, lo que puede ayudar a entenderlo mejor en $\mathbb{R}^n$.
- Son una gran fuente de ejemplos de espacios topológicos.
- A muchos matemáticos nos gustan y mucho.
- Suelen aparecer en sitios insospechados, y ya habeís visto alguna anteriormente. La geometría diferencial abre nuevas posibilidades para el estudio de muchas áreas de las matemáticas.

DÓNDE APARECEN (LISTA NO EXHAUSTIVA)

Dónde aparecen (Lista no exhaustiva)

- Geometría algebraica: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, son las variedades algebraicas sin singularidades. Resolución de singularidades.
- EDP's: ecuaciones de Hamilton-Jacobi, ecuación eikonal.
- Topología: conjetura de Poincaré.
- Relatividad: espacios-tiempo son variedades de Lorentz.
- Física teórica.
- Mecánica: sistemas hamiltonianos, variedades simplécticas.
- Álgebra: teoría geométrica de grupos. ¿Puedo ver un grupo?
- Variable compleja: muchos teoremas de funciones analíticas se entienden mejor vistos como isometrías del plano de Poincaré.
- (Micro)economía: Los puntos de equilibrio de mercados (Pareto) forman a menudo la *variedad de equilibrio*.
- Matemática financiera: superficies de volatilidad.

Dónde aparecen (Lista no exhaustiva)

- Geometría algebraica: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, son las variedades algebraicas sin singularidades. Resolución de singularidades.
- EDP's: ecuaciones de Hamilton-Jacobi, ecuación eikonal.
- Topología: conjetura de Poincaré.
- Relatividad: espacios-tiempo son variedades de Lorentz.
- Física teórica.
- Mecánica: sistemas hamiltonianos, variedades simplécticas.
- Álgebra: teoría geométrica de grupos. ¿Puedo ver un grupo?
- Variable compleja: muchos teoremas de funciones analíticas se entienden mejor vistos como isometrías del plano de Poincaré.
- (Micro)economía: Los puntos de equilibrio de mercados (Pareto) forman a menudo la *variedad de equilibrio*.
- Matemática financiera: superficies de volatilidad. (cómo cambia el precio de opciones del mismo activo subyacente bajo diferentes precios de ejercicio y diferentes fechas de vencimiento)

Qué necesito saber.

- **Álgebra lineal:** espacios vectoriales, bases, cambio de bases, aplicaciones lineales, un poco de formas cuadráticas, matrices.

Qué necesito saber.

- **Álgebra lineal:** espacios vectoriales, bases, cambio de bases, aplicaciones lineales, un poco de formas cuadráticas, matrices.
- **Cálculo II y III:** Diferencial de funciones $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, derivada direccional, jacobiano, *teorema de la función inversa*, teorema de la función implícita, difeomorfismos y difeomorfismos locales.

Qué necesito saber.

- **Álgebra lineal:** espacios vectoriales, bases, cambio de bases, aplicaciones lineales, un poco de formas cuadráticas, matrices.
- **Cálculo II y III:** Diferencial de funciones $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, derivada direccional, jacobiano, *teorema de la función inversa*, teorema de la función implícita, difeomorfismos y difeomorfismos locales.
- **Un poco de EDO's:** Teorema de Picard de existencia y unicidad de soluciones de sistemas lineales de primer orden $X' = AX$, $X(0) = x_0$.

Qué necesito saber.

- **Álgebra lineal:** espacios vectoriales, bases, cambio de bases, aplicaciones lineales, un poco de formas cuadráticas, matrices.
- **Cálculo II y III:** Diferencial de funciones $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, derivada direccional, jacobiano, *teorema de la función inversa*, teorema de la función implícita, difeomorfismos y difeomorfismos locales.
- **Un poco de EDO's:** Teorema de Picard de existencia y unicidad de soluciones de sistemas lineales de primer orden $X' = AX$, $X(0) = x_0$.
- **Topología:** Casi toda, pero conveniente repasar lo antes posible la topología cociente.

Qué necesito saber.

- **Álgebra lineal:** espacios vectoriales, bases, cambio de bases, aplicaciones lineales, un poco de formas cuadráticas, matrices.
- **Cálculo II y III:** Diferencial de funciones $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, derivada direccional, jacobiano, *teorema de la función inversa*, teorema de la función implícita, difeomorfismos y difeomorfismos locales.
- **Un poco de EDO's:** Teorema de Picard de existencia y unicidad de soluciones de sistemas lineales de primer orden $X' = AX$, $X(0) = x_0$.
- **Topología:** Casi toda, pero conveniente repasar lo antes posible la topología cociente.
- **Curvas y superficies:** Parametrizaciones, cartas, aplicaciones diferenciables entre superficies, sus diferenciales, primera forma fundamental.

Cómo se estructura.

Cómo se estructura.

1. Variedades y Topología. Contenidos teóricos y prácticos. Variedades topológicas con y sin borde. Superficies topológicas: construcción de ejemplos mediante pegados y cocientes. Suma conexa. Orientabilidad. Clasificación de superficies. Característica de Euler-Poincaré.

2. Variedades y coordenadas. Entornos coordenados, atlas y estructuras diferenciales. Variedad diferencial. Ejemplos: espacios euclídeos esferas, productos, espacios proyectivos. Funciones y aplicaciones diferenciables. Subvariedades regulares. Variedades cociente.

3. Derivadas en variedades. Vectores tangentes. Espacio tangente. Diferencial de funciones y de aplicaciones diferenciables. Campos de vectores. Flujos. Formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$, producto y derivada exteriores. Comportamiento bajo aplicaciones diferenciables.

Cómo se estructura(cont.)

Cómo se estructura(cont.)

4. Estructuras Riemannianas. Contenidos teóricos y prácticos. Métricas Riemannianas. Longitud, distancia, ángulos. Isometrías. Derivada covariante. Transporte paralelo y geodésicas. Curvatura. Efecto sobre las geodésicas. Efecto sobre la topología.

Los contenidos finales del último capítulo dependeran en gran medida del tiempo disponible.

Bibliografía:

Bibliografía:

- Boothby, William M., *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*. Academic Press, 2003. Buena referencia para el capítulo 2 y partes del 3, aunque bastante exigente.
- Díaz Miranda, Antonio, *Geometría III*. Apuntes disponibles en formato pdf en la página `http://www.uam.es/luis.guijarro/clases/diaz.pdf`. Conveniente si no podeís acceder a los textos de Boothby o Gonzalo.
- G.K. Francis, J.R. Weeks: *Conway's ZIP Proof*, Amer. Math. Monthly, Vol 106, N 5, pp. 393-399. Este artículo da una demostración simple y visual del teorema de clasificación de superficies del capítulo I. Se puede descargar (conectados a la red de la UAM) desde la sección de revistas electrónicas de la página de la biblioteca de la UAM.
- Jesús Gonzalo Pérez, *Variedades y Geometría: un curso breve*, Colección Documentos de Trabajo, vol. 64, UAM (2005); a la venta en la librería del Campus. Este libro cubrirá gran parte del temario del curso a un nivel adecuado. Muy recomendabla cuando se combina con una asistencia reguilar a clase.
- W. S. Massey, *Algebraic topology, an introduction*. Springer Verlag. Para aquellos que exigen un nivel superior de exigencia en las demostraciones del capítulo I.

Y por supuesto, **los apuntes de clase**.

Sistema de evaluación:

Sistema de evaluación:

Durante el curso habrá un examen parcial (EP) y un examen final (EF). La calificación final se calculará mediante la fórmula

$$\boxed{\text{Max}(0.7\ \text{EF} + 0.3\ \text{EP},\ \text{EF})}$$

En la convocatoria extraordinaria de septiembre se considerará exclusivamente la nota obtenida en el examen correspondiente, quedando sin valor la nota de problemas. El examen de septiembre compartirá algunas cuestiones con el examen de la clase del segundo semestre, *aunque podrá diferir en otras*.

- Fecha del examen parcial: A determinar (11 de Noviembre?)
- Fecha del examen final: 2 de febrero de 2011 (M).