Examen Parcial de Geometría III. **18 de Noviembre de 2010**

Profesor: Luis Guijarro Santamaría.

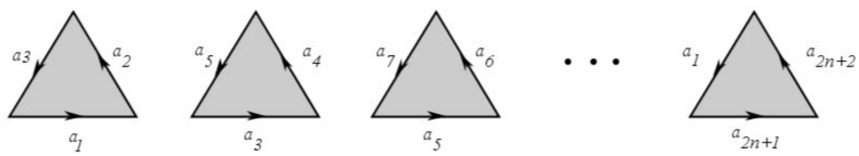
Instrucciones: Entregue la solución de cada problema en una hoja diferente.

---

1. (2 puntos) Halle todas las superficies compactas y conexas S tal que $\mathbb{T}\#S \simeq K\#S$, donde K es la botella de Klein.

---

2. (3 puntos) Construimos un espacio X realizando las identificaciones indicadas en el dibujo: lados con la misma letra se identifican entre sí a lo largo del sentido indicado por las flechas.



Decida a qué superficie es homeomorfo X.

---

3. (2 puntos) Sea $F : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ una aplicación suave. Si $c \in \mathbb{R}^k$ es un valor crítico, ¿es cierto que $F^{-1}(c)$ no puede ser subvariedad de $\mathbb{R}^{n+k}$?

---

4. (3 puntos) Denotamos por X al conjunto de planos en $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen, salvo por el plano $z = 0$. Consideramos los siguientes subconjuntos y aplicaciones:

- U son los planos de ecuación $Ax + By + Cz = 0$, $A \neq 0$.
- V son los planos de ecuación $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ con $\beta \neq 0$.
- ϕ, ψ están definidas como

$$\phi(Ax + By + Cz = 0) = \left(\frac{B}{A}, \frac{C}{A}\right), \qquad \psi(\alpha x + \beta y + \gamma z = 0) = \left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\beta}\right)$$

1. Demuestre que X tiene una estructura de variedad diferencial con atlas $(U, \phi), (V, \psi)$ (asuma que X es Hausdorff) si es necesario.
2. Demuestre que el conjunto de planos de X que contienen al eje $0Z$ forma una subvariedad de X.

Soluciones:

1. Si S fuera orientable, $\mathbb{T}\#S$ también lo sería, lo que obligaría a $K\#S$ a serlo también por ser homeomorfa. Pero K contiene una banda de Moebius, y $K\#S$ también, lo que da una contradicción. Por lo tanto S sólo puede ser de la forma

$$\underbrace{\mathbb{P}^2(\mathbb{R})\#\ldots\#\mathbb{P}^2(\mathbb{R})}_{k}\setminus\cup_{i=1}^r D_i$$

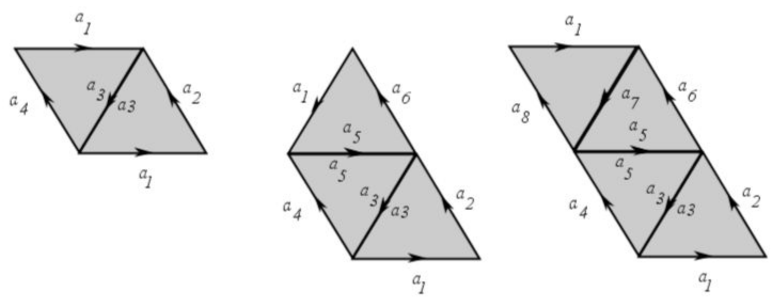
para $k\geq 1$, $r\geq 0$. Vemos que todas estas superficies valen como S: en clase vimos que $\mathbb{T}\#\mathbb{P}^2(\mathbb{R})\simeq K\#\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, por lo que

$$\begin{aligned}(1)\quad T\#\underbrace{\mathbb{P}^2(\mathbb{R})\#\ldots\mathbb{P}^2(\mathbb{R})}_{k}\setminus\cup_{i=1}^r D_i &\simeq (\mathbb{T}\#\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))\#\underbrace{\mathbb{P}^2(\mathbb{R})\#\ldots\mathbb{P}^2(\mathbb{R})}_{k-1}\setminus\cup_{i=1}^r D_i\simeq\\ &\simeq (K\#\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))\#\underbrace{\mathbb{P}^2(\mathbb{R})\#\ldots\mathbb{P}^2(\mathbb{R})}_{k-1}\setminus\cup_{i=1}^r D_i\simeq K\#\underbrace{\mathbb{P}^2(\mathbb{R})\#\ldots\mathbb{P}^2(\mathbb{R})}_{k}\setminus\cup_{i=1}^r D_i\end{aligned}$$

(nótese que hemos usado que $k\geq 1$; si $k=0$ el argumento fallaría).

---

2. Para hacernos una idea, miramos qué superficies se obtienen pegando $m=2,3$ ó 4 triángulos:



(con un solo triángulo no se obtiene una superficie). Los casos $m=2,4$ dan cilindros, y el caso $m=3$ da una banda de Moebius. Observamos que los lados del polígono marcados con un número par no se identifican con nada, y van a dar el borde de la superficie. Esto induce a pensar que la superficie obtenida depende de la paridad de m, el número de triángulos usados: si m es par, S será un cilindro, y si m es impar, S será una banda de Moebius. Para demostralo, observamos que cada vez que se añade un triángulo más a la cinta obtenida con m triángulos, el lado correspondiente a a_1 en el $m+1$-triángulo cambia de sentido con respecto al lado a_1 del último triángulo usado en la cinta con m-triángulos, como se puede ver con un dibujo similar al anterior. Una inducción sencilla concluye el argumento:

- si $m=2k$, la cinta con $2k$-triángulos tiene lados a_1 orientados '"sin medio giro". El nuevo triángulo hace que la cinta correspondiente a $2k+1$ triángulos tenga lados a_1 orientados "con medio giro", y por ello, para $m=2k+1$ se tiene que S es una banda de Moebius;
- si $m=2k+1$, la cinta con $2k+1$-triángulos tiene lados a_1 orientados '"con medio giro". El nuevo triángulo hace que la cinta correspondiente a $2k+2$ triángulos tenga lados a_1 orientados "sin medio giro", y por ello, para $m=2k+2$ se tiene que S es un cilindro.

---

3. No es cierto. Si $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ es $F(x,y,z)=z^2$, entonces $DF=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2z\end{bmatrix}$, y los puntos críticos son de la forma $(x,y,0)$. El único valor crítico es $c=0$, y $F^{-1}(0)$ es el plano $z=0$ que es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$.

---

4. **(a)** Aplicamos el teorema de conjuntos con un atlas.

1. Si $\pi \subset \mathbb{R}^3$ es un plano por el origen, entonces su ecuación tiene la forma $ax + by + cz = 0$; si no es $z = 0$, entonces bien $a \neq 0$, bien $b \neq 0$. En el primer caso π está en U, y en el segundo en V, así que $X = U \cup V$.

2. $\phi(U) = \mathbb{R}^2$, ya que si $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $\phi(\pi) = (u, v)$ para π de ecuación $x + uy + vz = 0$. $\psi(V) = \mathbb{R}^2$ de la misma forma.

3. $\phi : U \to \mathbb{R}^2$ es biyectiva, ya que si $\phi(\pi_1) = \phi(\pi_2)$ con π_i de ecuación $A_i x + B_i y + C_i = 0$, $i = 1, 2$, entonces
$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{B_2}{A_2}, \qquad \frac{C_1}{A_1} = \frac{C_2}{A_2},$$
y por tanto el plano π_1, $A_1 x + B_1 y + C_1 z = 0$ coincide con el plano $A_1\left(x + \frac{B_2}{A_2}y + \frac{C_2}{A_2}\right) = 0$. Multiplicando por $A_2/A_1 \neq 0$, tenemos que este último plano coincide con $A_2 x + B_2 y + C_2 z = 0$, que es π_2. La otra carta se hace igual.

4. $U \cap V$ son aquellos planos con coeficientes en x e y diferentes de cero. Esto hace que $\phi(U) = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, u \neq 0 \right\}$.

5. Si $u \neq 0$, $\psi \circ \phi^{-1}(u, v) = \psi(x + uy + vz = 0) = \left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right)$. El otro cambio se hace igual.

---

4. (b) Denotamos por P a ese subconjunto de X. Si un plano contiene al eje OZ, tiene que ser de la forma $ax + by = 0$. Vemos que las cartas del apartado **4(a)** están adaptadas a P:

- $P \cap U$ son planos de la forma $ax + by = 0$ con $a \neq 0$; si $\pi \in P \cap U$, $\phi(\pi) = (\frac{b}{a}, 0) \in \phi(U) \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$. Por otra parte, si $u \in \mathbb{R}$, $(u, 0)$ es imagen del plano $x + uy = 0$, que está en $U \cap P$. Esto implica que $\phi(U \cap P) = \{(u, 0) \,:\, u \in \mathbb{R}\} = \phi(U) \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$.

- La otra carta se hace igual. Como $X = U \cup V$, tenemos cartas adaptadas en todos los puntos de P, así que P es subvariedad de X.