Campos y métricas

Luis Guijarro

UAM

17 de enero de 2011

La diferencial de una función en un punto

Sea $f : \mathcal{O} \subset M \to \mathbb{R}$ una función suave. Si $p \in \mathcal{O}$, para cada $v \in T_pM$ podemos obtener el número

$$v(f)$$

que refleja cómo cambia f a lo largo de la dirección indicada por v.

Definición

La diferencial de la función f en $p \in \mathcal{O}$ es el funcional lineal

$$df_p : T_pM \to \mathbb{R}, \qquad df_p(v) := v(f)$$

df_p es lineal:

$$df_p(av + bw) = (av + bw)(f) = a(v(f)) + b(w(f)) = a \cdot df_p(v) + b \cdot df_p(w)$$

df_p es un elemento del espacio dual de T_pM, que denotaremos por T_p^*M.

La diferencial de una función en un punto (cont.)

Si $(U, \phi = (x_1, \ldots, x_n))$ es una carta de M en p, las funciones coordenadas $x_i : U \to \mathbb{R}$ son suaves, y por tanto podemos mirar a sus diferenciales en cada $p \in U$:

Lema

Las diferenciales $\{\, dx_{1,p}, \ldots, dx_{n,p} \,\}$ *son la base dual a la base de vectores coordenados* $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p \right\}$.

Demostración.

$$dx_{i,p}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\Big) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p (x_i) = \delta_{i,j}$$

□

Covectores en p

Definición

Los elementos de T_p^*M se llaman covectores en p.

Si $\alpha_p \in T_p^*M$, entonces

$$\alpha_p = \alpha_p(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p)dx_{1,p} + \cdots + \alpha_p(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p)dx_{n,p}$$

Como $df_p \in T_p^*M$,

$$df_p = df_p(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p)dx_{1,p} + \cdots + df_p(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p)dx_{n,p} = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p(f)dx_{1,p} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p(f)dx_{n,p}$$

1-formas suaves

Por similitud con la definición de campo de vectores, definimos

Definición

Una 1-forma α *en* $\mathcal{O}$ *es una correspondencia que asigna a cada* $p \in \mathcal{O}$ *un covector* $\alpha_p \in T_p^*M$*.*

Definición

La 1-forma α *es suave si para todo campo de vectores suave* X*, la función*

$$p \to \alpha_p(X_p)$$

es suave.

Expresión local de una 1-forma en una carta

Si $(U, \phi = (x_1, \ldots, x_n))$ es una carta de M, entonces

$$\alpha|_U = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) dx_1 + \cdots + \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right) dx_n$$

Lema

Una 1-forma α es suave si y sólo si para todo p hay una carta (U, ϕ) de M en p con cada función

$$\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) : U \to \mathbb{R}$$

siendo diferenciable.

La diferencial de una función

Definición

Si $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ es suave, la diferencial de una función es la correspondencia que asigna a cada $p \in \mathcal{O}$ la diferencial $df_p \in T_p^* M$.

Proposición

Si $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ es una función suave, df es una 1-forma suave.

Expresión local de df en (U, ϕ):

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

que es similar a la expresión usual del cálculo diferencial.

Subvariedades y diferenciales

Teorema

Sea $F : M \to N$ una aplicación suave y $q \in N$. Si $F^{-1}(q) \neq \emptyset$, y para todo $p \in F^{-1}(q)$ se tiene que $dF_p : T_pM \to T_qN$ es sobreyectiva, entonces $S := F^{-1}(q)$ es una subvariedad regular de M de dimensión $\dim M - \dim N$.

Demostración.

Si $p \in M$ se halla en S, la expresión local de F en cartas (U, ϕ) en p y (V, ψ) en q cumple las condiciones del teorema correspondiente para subvariedades del espacio euclídeo, por lo que en esa carta, $\phi(S \cap U)$ será subvariedad de $\mathbb{R}^m$. Como ϕ es un difeomorfismo y p es arbitrario, S es subvariedad. $\square$

Subvariedades y diferenciales (cont.)

Teorema

Sean $f_1, \ldots, f_n : M \to \mathbb{R}$ funciones suaves en M. Sea $F : M \to \mathbb{R}^n$ definida como $F = (f_1, \ldots, f_n)$. Si para $a \in \mathbb{R}^n$ tenemos que $S := F^{-1}(a) \neq \emptyset$ y que para todo $p \in S$, $df_{1,p}, \ldots, df_{n,p}$ son linealmente independientes (como elementos de $T_P M^*$), entonces S es una subvariedad de M de dimensión $\dim M - n$.

Demostración.

La condición en las df_i implica que F cumple las propiedades del teorema anterior. $\square$

Aplicaciones y 1-formas

Sea $F : \mathcal{O} \subset M \to N$ una aplicación suave, y α una 1-forma suave en N. Para cada $p \in M$ obtenemos un elemento $(F^*\alpha)_p$ de T_p^*M como

$$(F^*\alpha)_p(v) = \alpha_{F(p)}(dF_p(v))$$

Definición

$F^*\alpha$ se llama la forma inducida (por α mediante F).

Si $\alpha = df$, la definición nos da

$$(F^*df)_p(v) = df_{F(p)}(dF_p(v)) = dF_p(v)(f) = v(f \circ F) = d(f \circ F)_p(v),$$

así que

$$F^*df = d(f \circ F).$$

Aplicaciones y 1-formas

Proposición

$(F^*\alpha)$ *es suave en* M.

Para ver esto calculamos su expresión local en alguna carta.

Cálculo local: Supongamos $(U, \phi = (x_1, \ldots, x_n))$ es una carta en M, $(V, \psi = (y_1, \ldots, y_m))$ es una carta en N con $F(U) \subset V$. Supongamos además que la 1-forma α se escribe en (V, ψ) como

$$\alpha = f_1 dy_1 + \cdots + f_m dy_m$$

Entonces en U, $F^*\alpha$ se escribe como:

$$F^*\alpha = (f_1 \circ F)d(y_1 \circ F) + \cdots + (f_m \circ F)d(y_m \circ F)$$

Aplicaciones y 1-formas

Demostración.

Aplicamos $F^*\alpha$ a los vectores coordenados $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$, y usamos definiciones. p es un punto arbitrario:

$$
\begin{aligned}
(F^*\alpha)_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right) &= \alpha_{F(p)}\left(dF_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right)\right) = \\
= \sum_j f_j(F(p))\, dy_{j,F(p)}\left(dF_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right)\right) &= \sum_j (f_j \circ F)(p)\, F^*(dy_j)_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right) = \\
&= \sum_j (f_j \circ F)(p)\, d(y_j \circ F)\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

□

Ejemplos

1. $M = S^2$, $f : S^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = y + z$. Tomamos la parametrización

$$\xi(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v),$$

Calculamos df en la carta asociada a esta parametrización:

- Primero calculamos la expresión local de f en esta carta:

$$f \circ \xi(u, v) = \sin u \sin v + \cos v$$

- Ahora calculamos $\dfrac{\partial f}{\partial u}$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}$:

$$\frac{\partial}{\partial u}(f) = D_u(f \circ \xi) = \cos u \sin v, \quad \frac{\partial}{\partial v}(f) = D_v(f \circ \xi) = \sin u \cos v - \sin v$$

- y usamos la fórmula:

$$df = \cos u \sin v \, du + (\sin u \cos v - \sin v) \, dv$$

Ejemplos

2. $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\pi(x, y, z) = (x + yz, e^z + \sin y)$. Sea α la 1-forma en $\cdot\mathbb{R}^2$ dada por $\alpha = y\, dx - x\, dy$ en la carta usual.

$$F^*\alpha = (e^z + \sin y)\, d(x + yz) - (x + yz)\, d(e^z + \sin y)$$

Y ahora aplicamos como se escribe df en una carta (que en este caso es la usual de $\mathbb{R}^3$):

$$F^*\alpha = (e^z + \sin y)(dx + z\, dy + y\, dz) - (x + yz)(e^z\, dz + \cos y\, dy)$$

en donde podemos agrupar términos semejantes en dx, dy, dz si queremos.

3. $x\, dy - y\, dx$ **en polares:** $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, así que

$$x\, dy - y\, dx = r\cos\theta\, (\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta) - r\sin\theta(\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta)$$

que tras simplificar queda

$$x\, dy - y\, dx = r^2\, d\theta$$

Campos de formas bilineales

Definición

Sea $\mathcal{O} \subset M$ un abierto.

- *Un* **campo de formas bilineales** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ **en** $\mathcal{O}$ *es una correspondencia que asigna a cada punto $p \in \mathcal{O}$ una forma bilineal*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *es diferenciable si para todo par de campos de vectores diferenciables X, Y, la función*

$$\langle X, Y \rangle : \mathcal{O} \to \mathbb{R}, \quad \langle X, Y \rangle (p) := \langle X_p, Y_p \rangle_p$$

es diferenciable en $\mathcal{O}$.

Métricas Riemannianas

Definición

Sea M una variedad diferencial.

- *Una* **métrica Riemanniana** *en M es un campo suave de formas bilineales simétricas definidas positivas en todos los puntos de M.*
- *Una* **variedad Riemanniana** *es una variedad diferencial con una métrica Riemanniana sobre ella.*

Una forma bilineal simétrica y definida positiva en un espacio vectorial se llamaba *producto escalar*, por lo que una métrica Riemanniana no es más que un producto escalar en cada T_pM que varía de forma suave con p.

Expresión local de una métrica Riemanniana

Si $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ era una base de un espacio vectorial V, entonces un producto escalar sobre V se escribía como

$$\langle v, w\rangle = \begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & \ldots & \langle e_1, e_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_n, e_1\rangle & \ldots & \langle e_n, e_n\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

Además la matriz tenía que ser simétrica, y definida positiva, lo que según el criterio de Sylvester quería decir que los menores angulares satisfacían

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & \ldots & \langle e_1, e_i\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_i, e_1\rangle & \ldots & \langle e_i, e_i\rangle \end{vmatrix} > 0$$

para $i = 1, \ldots, n$.

Expresión local de una métrica Riemanniana

Aplicando esto a $V = T_pM$, y a $\mathcal{B}$ la base de vectores coordenados

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_p \right\}$$

resulta en:

$$\langle v, w\rangle = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p \right\rangle_p & \dots & \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p \right\rangle_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p \right\rangle_p & \dots & \left\langle \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p \right\rangle_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

donde $(\{v_1, \dots, v_n\})$, $(w_1, \dots, w_n)$ son las coordenadas de v y w en la base de vectores coordenados.

Expresión local de una métrica Riemanniana

Vamos a abreviar esto escribiendo

$$g_{ij}(p) := \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle (p) = \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p \right\rangle_p :$$

Cuando se desarrolla lo anterior, queda

$$\langle v, w \rangle = \sum_i \sum_j g_{ij} v_i w_j$$

y como en la base coordenada $dx_i(v) = v_i$, $dx_j(w) = w_j$, se suele escribir

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \sum_i \sum_j g_{ij} dx_i dx_j$$

La métrica se suele escribir como g en vez de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Ejemplos de métricas Riemannianas

1. **Espacio euclídeo:** $M = \mathbb{R}^n$ con la carta usual, $g_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$.
2. **Plano hiperbólico:** $M = \{\,(x, y) \,:\, y > 0\}$,

$$g = \frac{1}{y^2}dx^2 + \frac{1}{y^2}dy^2$$

(donde como es claro, $dx\,dx = dx^2$, etc.)

3. **Subvariedades euclídeas:** $S \subset \mathbb{R}^{n+k}$ subvariedad regular. En cada punto de S definimos

$$\langle v, w\rangle_p = \langle di_p(v), di_p(w)\rangle_p^{\mathbb{R}^{n+k}}$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle^{\mathbb{R}^{n+k}}$ es la métrica euclídea definida en el primer apartado.

Métricas y aplicaciones

Un difeomorfismo $F : M \to N$ puede ser usado para traer métricas desde N hasta M.

Definición

Si h es una métrica en N, F^*h es la métrica en M definida como

$$(F^*h)_p(v,w) = h_{F(p)}(dF_p(v), dF_p(w)), \quad v,w \in T_pM$$

F^*h es una métrica porque $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ es un isomorfismo lineal.

En coordenadas: Si $h = \sum_{i,j} h_{ij}\, dy_i\, dy_j$, entonces

$$F^*h = \sum_{i,j} (h_{ij} \circ F)\, d(y_i \circ F)\, d(y_j \circ F)$$

con la misma demostración que para 1-formas.

Isometrías e isometrías locales

Definición

Sean (M, g) *y* (N, h) *variedades Riemannianas.*

- *Un difeomorfismo* $F : (M, g) \to (N, h)$ *se llama una isometría si* $F^* h = g$.
- *Un difeomorfismo local* $F : (M, g) \to (N, h)$ *se llama una isometría local si* $F^* h = g$.

La condición $F^* h = g$ sólo dice que para todo $p \in M$, $v, w \in T_p M$,

$$g_p(v, w) = h_{F(p)}(dF_p(v), dF_p(w))$$

En coordenadas, esta condición es fácil de comprobar: tomamos una carta $\phi = (x_1, \ldots, x_n)$ en M, usamos

$$F^* h = \sum_{i,j} (h_{ij} \circ F)\, d(y_i \circ F)\, d(y_j \circ F)$$

y lo comparamos con $g = \sum_{rs} g_{rs}\, dx_r\, dx_s$.

Ejemplos de métricas Riemannianas (cont.)

4. Métricas en cocientes: Supongamos que $\theta : G \times M$ es una acción de un grupo discreto en una variedad Riemanniana y $\widetilde{M} = M/G$ es una variedad. Queremos poner una métrica en $\widetilde{M}$.

Definición

La acción es por isometrías si para cada $g \in G$, $\theta : g : M \to M$ es una isometría.

Teorema

En el contexto anterior, si G actua por isometrías, entonces $\widetilde{M}$ admite una métrica para la cual la aplicación cociente $\pi : M \to \widetilde{M}$ es una isometría local.

Longitudes, ángulos, gradientes

Definición

Sea (M, g) *una variedad Riemanniana.*

- *Si* $v \in T_pM$*, la longitud* $\|v\|_p$ *de* v *es* $\sqrt{g_p(v, v)}$.
- *Si* $\alpha : [a, b] \to M$ *es una curva suave, su longitud es*

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|_{\alpha(t)}$$

- *El ángulo entre dos vectores* v, $w \in T_pM$ *se define como*

$$\cos \angle(v, w) = \frac{g_p(v, w)}{\|v\|_p \|w\|_p}$$

- *Si* $f : M \to \mathbb{R}$ *es suave, el gradiente de* f *en la métrica* g *es el campo de vectores* $\nabla^g f$ *tal que*

$$g_p(\nabla^g f, v) = v(f) \quad \textit{para todo } v \in T_pM$$

Distancia Riemanniana y geodésicas

En una variedad Riemanniana $(M, \langle\, , \rangle)$ se puede definir una distancia de forma natural:

$$\mathrm{dist}(p, q) = \operatorname*{ínf}_{\gamma \in \Omega_{p,q}} L(\gamma)$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las curvas suaves (a trozos) con punto inicial p y punto final q.

Definición

Una geodésica minimal es una curva (parametrizada por arco) $\gamma : [a, b] \to M$ *tal que* $L(\gamma) = \mathrm{dist}(\gamma(a), \gamma(b))$.

Definición

Una geodésica es una curva $\gamma : I \to M$ *tal que para todo* $t \in I$*, existe un intervalo* $J = [t - \varepsilon, t + \varepsilon] \subset I$ *para el que* $\gamma|_J : J \to M$ *es geodésica minimal.*

Superficies Riemannianas

En lo que sigue nos dedicaremos al caso en que la variedad Riemanniana M tiene dimensión 2, con lo que localmente las métricas tendran el aspecto

$$E(u,v)\,du^2 + 2F(u,v)\,du\,dv + G(u,v)\,dv^2$$

donde

$$E = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle, F = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle, G = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle$$

La situación es parecida a la de geometría de curvas y superficies, pero sólo en lo que atañe a la primera forma fundamental (no hay una segunda, ya que S es una superficie abstracta y no necestia ser subconjunto de $\mathbb{R}^3$). Pero todos los objetos intrínsecos de Geometría II pueden definirse.

Símbolos de Christoffel

$$\begin{bmatrix}\Gamma_{11}^{1}\\ \Gamma_{11}^{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E & F\\ F & G\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}E_u/2\\ F_u - \frac{1}{2}E_v\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\Gamma_{12}^{1}\\ \Gamma_{12}^{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E & F\\ F & G\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}E_v/2\\ G_u/2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\Gamma_{22}^{1}\\ \Gamma_{22}^{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E & F\\ F & G\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}F_v - \frac{1}{2}G_u\\ G_v/2\end{bmatrix}$$

Los símbolos con Γ_{21}^{i} se definen como los correspondeintes con Γ_{12}^{i}. Con estos símbolos, y E, F, G, podemos definir la curvatura Gaussiana y la ecuación de las geodésicas.

Geodésicas

Si $\gamma : I \to S$ es una curva diferencial con coordenadas $(u(t), v(t))$ en una carta, la condición de que γ fuera geodésica es

$$\begin{array}{rcl} u'' + \Gamma^1_{11}(u')^2 + 2\Gamma^1_{12}u'v' + \Gamma^1_{22}(v')^2 & = & 0 \\ v'' + \Gamma^2_{11}(u')^2 + 2\Gamma^2_{12}u'v' + \Gamma^2_{22}(v')^2 & = & 0 \end{array}$$

que siempre tiene solución única (al menos para pequeños intervalos) en cuanto pongamos condiciones iniciales $(u(0), v(0))$, y $(u'(0), v'(0))$.

Teorema

Para cualquier $p \in M$, y cualquier $v \in T_pM$ existe un $\varepsilon > 0$ y una única geodésica $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ con $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$.

Curvatura Gaussiana

En términos de E, F, G, la curvatura Gaussiana de S se obtenía como

$$K = \left(\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix} \right) / \, (EG - F^2)^2$$

El caso más frecuente es en el que $F = 0$, y ahí la fórmula se simplifica para dar

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}$$

El plano hiperbólico

Como superficie S tomamos el semiplano superior $\mathrm{H} = \{\,(x,y)\ :\ y>0\,\}$

Como métrica la que en esta parametrización tiene coeficientes

$$E(u,v) = \frac{1}{v^2}, \quad F(u,v) = 0, \quad G(u,v) = \frac{1}{v^2}$$

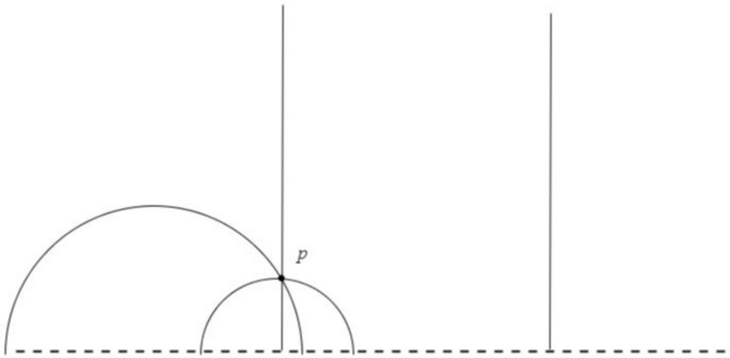
La curvatura Gaussiana es

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right\} = -1$$

Geodésicas:

- Semicírcunferencias con centro en la línea $y=0$;
- Rectas verticales.

El plano hiperbólico



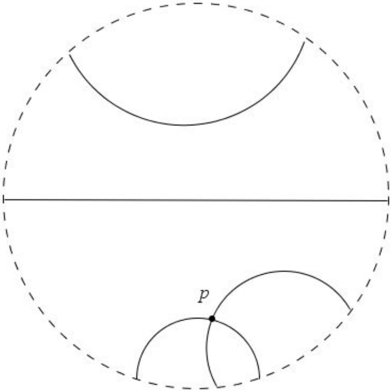
Da una geometría donde por un punto no en una recta pasan infinitas de ellas que no la intersecan.

El plano hiperbólico en un disco

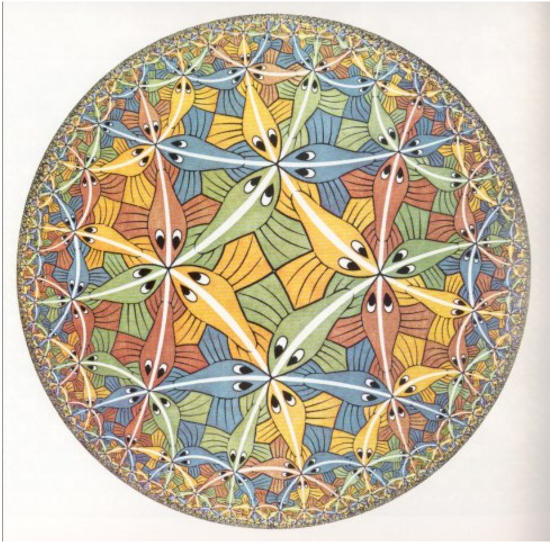
El semiplano superior y el disco unidad son difeomorfos, por lo que se puede llevar la métrica del semiplano superior al disco.

Una manera de hacer esto es como en el problema 2 de la hoja 7, usando una transformación de Moebius.

Este tipo de transformación preserva ángulos, y lleva rectas y circunferencias a rectas y circunferencias (aunque no en ese orden necesariamente), por lo que las geodésicas hiperbólicas en este modelo son circunferencias y rectas ortogonales a la circunferencia unidad.



Límite Circular III, Escher (1959)



Límite Circular III, Escher (1959)

Tenemos solamente series con "tráfico continuo", todos los peces pertenecientes a una misma serie determinada tienen el mismo color y nadan uno detrás del otro - cabeza con cola - a lo largo de una vía semicircular que une dos puntos del borde. Cuanto más se aproximan al centro, más grandes se vuelven.

Al igual que todas esas filas de peces, que a una distancia infinita en algún punto del borde ascienden perpendicularmente como cohetes y luego vuelven a precipitarse en el vacío, ninguno de los componentes llega a tocar nunca el límite. Más allá de él se encuentra la "nada absoluta". Y sin embargo, este rotundo mundo no podría existir sin el vacío que hay en torno a él. No sólo por la razón de que un interior presupone un exterior, sino también porque en la "nada" se encuentran los centros inmateriales, aunque perfectamente ordenados, de los arcos que estructuran el círculo.

M.C. Escher

Superficies hiperbólicas

De la misma forma que podemos construir un toro plano aprovechando la métrica del plano, podemos usar la métrica en el disco para construir superficies hiperbólicas:

- En vez de traslaciones enteras en el plano tomaremos algunas isometrías en el disco hiperbólico;
- debe haber alguna figura que "tesele" el disco mediante ellas.

Para entender cómo pueden ser las isometrías del hiperbólico,

`http://bulatov.org/math/1001/index.html`

Límite Circular IV (Cielo e infierno), Escher (1960)

¿Pero están estas superficies dentro de $\mathbb{R}^3$?

Teorema (Hilbert, 1901)

Una superficie completa con curvatura constante negativa no puede realizarse con una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$.

Teorema (Efimov)

Tampoco si $K \leq \delta < 0$.

Teorema

Las únicas superfices completas en $\mathbb{R}^3$ con curvatura $K = 0$ son planos o cilindros sobre alguna curva en un plano.

¿Pero están estas superficies dentro de $\mathbb{R}^3$?

Teorema (Hadamard)

Una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ *con curvatura constante* $K = \delta > 0$ *es isométrica a una esfera.*

Teorema (Hadamard)

Una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ *con curvatura* $K > \delta > 0$ *es difeomorfa a una esfera.*