---

1. $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ es el plano proyectivo con la estructura diferencial estudiada en clase.

- Sea $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida como $f[x,y,z] = \dfrac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$. Halle la expresión local de df en la carta (U,ϕ) donde
$$U = \{[x,y,z] \,:\, z \neq 0\}, \qquad \phi[x,y,z] = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right).$$
- Si $p = [0,0,1]$, halle el valor de $df_p\left(2\left.\dfrac{\partial}{\partial u}\right|_p - 3\left.\dfrac{\partial}{\partial v}\right|_p\right)$, donde $\dfrac{\partial}{\partial u}$, $\dfrac{\partial}{\partial v}$ son los vectores coordenados de la carta anterior.
- Si $\pi : S^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ es la aplicación $\pi(x,y,z) = [x,y,z]$, escriba $\pi^*(df)$ en la base de vectores coordenados correspondiente a la carta (U,ϕ), donde $U = \{(x,y,z) \in S^2 \,:\, z > 0\}$, y $\phi(x,y,z) = (x,y)$.

---

2. Sea M el conjunto de todas las circunferencias del plano $\mathbb{R}^2$. Recuerde que M admite una estructura de variedad de dimensión 3 con un atlas de una sola carta (M,ϕ) donde $\phi(C) = (x,y,r) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ para una circunferencia $C \in M$.

(a) Si $f : M \to \mathbb{R}$ es la función que asigna a una circunferencia C el valor del área del círculo con frontera C, halle df en la carta anterior.

(b) Sea $\pi : M \to \mathbb{R}^2$ la aplicación que lleva cada circunferencia en M a su centro. Decida si puede haber alguna 1-forma α en $\mathbb{R}^2$ tal que $df = \pi^*\alpha$.

(c) Supongamos en la carta (M,ϕ), el campo de vectores X se escribe como
$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial r}$$
Halle el flujo de X y úselo para ver dónde envía la circunferencia de centro el origen y radio 1 tras un tiempo $t = 1$.

---

3. Sea M el conjunto de las matrices 2×2 con entradas reales. Tras identificarlo con $\mathbb{R}^4$, M recibe una estructura diferencial a partir de la estructura diferencial usual de $\mathbb{R}^4$.

1. Si $C(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$, definimos la aplicación
$$\theta : \mathbb{R} \times M \to M, \quad \theta(t,A) = C(t) \cdot A$$
Demuestre que es un flujo en M, y halle su generador infinitesimal.
2. Demuestre que si X es un campo de vectores en una variedad arbitraria, y si $X_p = 0$ para algún punto p, entonces la curva integral de X por p es constante.
3. Compruebe lo anterior en el caso del flujo y del campo X que aparecen en el primer apartado del problema.

4. Sea S el subconjunto de $\mathbb{R}^4$ definido como

$$S = \{ (x, y, z, t) \, : \, xy = zt = 1 \}$$

- Si Z es el campo de vectores de $\mathbb{R}^4$ dado por

$$Z = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} - t\frac{\partial}{\partial t}$$

  el campo $X = Z|_S$ es un campo de vectores suave en S como vimos en la hoja anterior. Halle su flujo.

---

5. Sean $f, g : M \to \mathbb{R}$ funciones suaves.

- Si $f : M \to \mathbb{R}$ es una función constante, demuestre que $df = 0$.
- Demuestre que si M es conexa y $df = 0$, entonces f es constante.
- Demuestre que $d(fg) = g\,df + f\,dg$. Halle la fórmula correspondiente para $d\left(\frac{f}{g}\right)$.

---

6. Sea $\alpha = x\,dx + y\,dy + z\,dz$ una 1-forma en $\mathbb{R}^3$ (escrita en la carta usual). Si $i : S^2 \to \mathbb{R}^3$ es la inclusión, halle $i^*\alpha$.

---

7. Expresa la 1-forma $x\,dx + y\,dy$ en coordenadas polares.

---

8. Si α es una 1-forma en $\mathbb{R}^2$ y $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ es una curva suave, definimos la integral de α sobre c como el valor

$$\int_c \alpha = \int_a^b \alpha_{c(t)}(c'(t))\,dt$$

Demuestre que si $\alpha = df$ para una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, entonces

$$\int_c df = f(c(b)) - f(c(a))$$
