En los cuatro primeros problemas, conteste las siguientes preguntas:

- Demuestre que la aplicación $\Theta : G \times M \to M$ es una acción.
- Demuestre que el cociente $\widetilde{M} = M/G$ admite estructura de variedad diferencial cociente.
- Halle un dominio fundamental para la acción y úselo para convencerse de cúal es el espacio cociente (aunque no lo demuestre).
- Dé una carta de $\widetilde{M}$ en el punto p indicado, y las coordenadas de p en esa carta.
- Demuestre que la aplicación indicada $F : \widetilde{M} \to N$ está bien definida y es diferenciable.

1.

- $G = \mathbb{Z}_2 = \{+1, -1\}, \qquad M = S^2, \qquad p = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.
- $\Theta(a, p) = a \cdot p$.
- $F : \widetilde{M} \to S^2, \qquad F[x, y, z] = \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^4+y^4+z^4}}, \frac{y^2}{\sqrt{x^4+y^4+z^4}}, \frac{z^2}{\sqrt{x^4+y^4+z^4}} \right)$.

2.

- $G = \mathbb{Z}, \qquad M = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}, \qquad p = [(-1/2, 7/2)]$.
- $\Theta(k, (s, t)) = ((-1)^k s, t + k)$.
- $F : \widetilde{M} \to \mathbb{R}^2, \qquad F[s, t] = (s^2 \cos 2\pi t, s^2 \sin 2\pi t)$.

3.

- $G = \mathbb{Z}$, $M = S^1 \times \mathbb{R}$ donde vemos S^1 como la circunferencia unidad en el plano complejo $\mathbb{C}$.
- $\Theta(k, (z, t)) = ((-1)^k z, t + k)), \qquad p = (i, 7/2)$.
- $F : \widetilde{M} \to \mathbb{C}, \qquad F[z, t] = z^2 \exp 2i\pi t$.

---

4. Este problema sirve para observar que a veces, el grupo que da la acción no es el más adecuado para trabajar en el cociente.

- $G = \mathbb{Z}, \qquad M = \mathbb{R}^2 - (0, 0), \qquad p = [(1, 0)]$.
- $\Theta(k, (x, y)) = R_{k\pi}(x, y)$, donde $R_\vartheta(x, y)$ es la rotación central de ángulo ϑ en el plano $\mathbb{R}^2$.
- $F : \widetilde{M} \to S^1 \times [0, \infty), \qquad F[(x, y)] = \left((\frac{x^2}{\sqrt{x^4+y^4}}, \frac{y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}), \sqrt{x^2 + y^2} \right)$

Empiece calculando el subgrupo de $\mathbb{Z}$ que induce difeomorfismos θ_g igual a la identidad. ¿Puede encontrar un grupo y una acción cuyo espacio de órbitas coincida con el de $\mathbb{Z}$, pero cumpliendo las condiciones del teorema que asegura que M/G sea variedad?

---

5. Si G_1, G_2 son grupos actuando suavemente sobre M_1 y M_2 respectivamente, demuestre que la acción producto de $G := G_1 \times G_2$ sobre $M := M_1 \times M_2$ dada por

$$(g_1, g_2) \cdot (p_1, p_2) := (g_1 \cdot p_1, g_2 \cdot p_2)$$

es efectivamente una acción, que es suave si lo son las acciones de G_1 y G_2, y que cumple las hipótesis del teorema de suavidad del cociente si G_1 y G_2 ya las cumplían.

---

6. Sea $G \times M \to M$ una acción tal que M/G es una variedad diferencial con $\pi : M \to M/G$ un difeomorfismo local.

1. Dé un ejemplo de una variedad diferencial P, y una aplicación suave $F : P \to M/G$ tal que no exista ninguna $\widetilde{F} : P \to M$ con $F = \pi \circ \widetilde{F}$.
2. Sea $F : P \to M/G$ una aplicación; demuestre que si para cada $p \in P$, existen un entorno abierto U de p y una aplicación suave $\widetilde{F} : U \to M$ tal que $F|_U = \pi \circ \widetilde{F}$, entonces $F : P \to M/G$ es suave.
3. Si ahora $F : M/G \to P$ es una aplicación, demuestre que F es suave sii $F \circ \pi : M \to P$ es suave.

---

7. Halle una acción de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}^2$ cuyo espacio cociente sea difeomorfo al toro $S^1 \times S^1$.

---

8. Halle una acción de $\mathbb{Z}_2$ en $S^1 \times (-1, 1)$ cuyo espacio cociente sea difeomorfo al interior de una cinta de Moebius.

---

9. Halle una acción de $\mathbb{Z}^3$ en $\mathbb{R}^3$ tal que su espacio cociente sea difeomorfo al producto de S^1 y una botella de Klein.
