1. Construya una triangulación de la botella de Klein K. Úsela para calcular la característica de Euler de K.

2. Demuestre que la suma conexa de dos superficies orientables es orientable, sin usar el teorema de clasificación de superficies.

3. Demuestre que una superficie compacta y conexa es homeomorfa a la esfera S^2 si y sólamente si $\chi(S) = 2$.

4. Sea $C = S^1 \times [0,1]$ un cilindro compacto. ¿ A qué superficie de la lista es homeomorfa $(S^1 \times S^1)\#C$?

5. Cierta superficie compacta y conexa S tiene una triangulación formada por 6 triángulos.

1. Si $\partial S = \varnothing$ ¿cuántas aristas tiene esa triangulación?
2. Si $\partial S = \varnothing$ y además la triangulación tiene 4 vértices ¿a qué superficie del teorema de clasificación es homeomorfa S?

6. Una generalización natural de las triangulaciones consiste en usar, en vez de triángulos, polígonos. Más en concreto, una descomposición de una superficie compacta S es una colección de subconjuntos $\{P_i\}$ donde

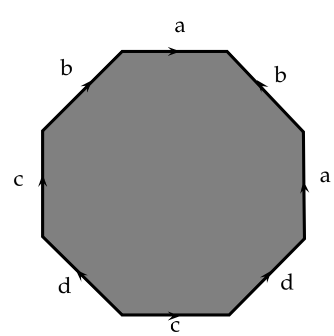
- cada subconjunto P_i debe ser homeomorfo a un polígono en el plano, y estar limitado por un número finito de segmentos;
- la intersección de dos de estos polígonos debe seguir las mismas condiciones que para las triangulaciones: bien es vacía, bien intersecan en un sólo vértice, o bien intersecan en un sólo lado.

Se pide

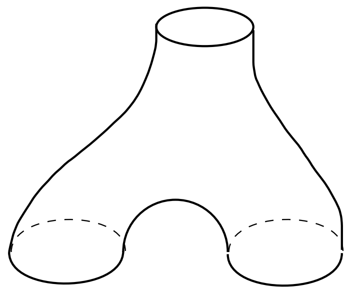
1. Puesto que todo polígono se subdivide en triángulos, explique cómo obtener una triangulación a partir de una descomposición.
2. A partir del enunciado para triangulaciones, demuestre que todas las descomposiciones de una superficie compacta S cumplen:

$$(\text{n}^{\text{o}} \text{ de caras}) - (\text{n}^{\text{o}} \text{ de aristas}) + (\text{n}^{\text{o}} \text{ de vértices}) = \chi_S$$

7. Dada la región del plano del dibujo, obtenemos un espacio cociente realizando las identificaciones indicadas: lados con la misma letra se identifican entre sí con el sentido de la flecha. Asumiendo que el cociente obtenido es una superficie orientable, indique a cuál de las posibilidades mencionadas en el teorema de clasificación corresponde.



8. Una superficie con frontera como la del dibujo se conoce como "un par de pantalones"; si tenemos k de ellos, podemos pegarlos entre sí identificando las diversas componentes de la frontera. En las identificaciones permitimos el caso en que dos componentes de borde del mismo par de pantalones se identifiquen entre sí.



1. Demuestre que si al pegar k pantalones obtenemos una superficie sin borde, entonces k debe ser par.
2. Demuestre que no se puede obtener S^2 pegando un número finito de pantalones.
