1. Sea X_1 una variedad topológica (sin borde) de dimensión n_1. Sea X_2 variedad topológica de dimensión n_2. Demuestre que

- Si X_2 no tiene borde, $X_1 \times X_2$ es una variedad topológica (sin borde) de dimensión $n_1 + n_2$.
- Si X_2 tiene borde, $X_1 \times X_2$ es una variedad topológica con borde de dimensión $n_1 + n_2$. ¿Cuál es el borde de $X_1 \times X_2$?

2. Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ la unión conjuntista de todas las rectas que pasan por $(0,0)$, excepto la horizontal. Demuestre que si damos a X la topología inducida de $\mathbb{R}^2$ entonces X no es una variedad topológica.

3. Este ejercicio es muy útil cuando hay que trabajar con la topología cociente.

1. Sea X un espacio topológico compacto. Demuestre que si $f : X \to Y$ es una biyección continua sobre un espacio de Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.
2. Sea Z un espacio topológico en el que hay definida una relación de equivalencia $\sim$. Denotamos por $X = Z/\sim$ y por $\pi : Z \to X$ el espacio y la aplicación cociente respectivamente. Deduzca bajo qué condiciones una aplicación $f : Z \to Y$ induce una aplicación $g : X \to Y$ con $f = g \circ \pi$. ¿Es g continua si lo es f?
3. Suponga ahora que X es compacto e Y Hausdorff. Demuestre que una aplicación continua y sobreyectiva $f : Z \to Y$ con $f(z) = f(z')$ sii $z \sim z'$ induce un homeomorfismo $g : X \to Y$.

4. En $Z = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ definimos la relación de equivalencia:

$$(0, y) \sim (2\pi, y)\ ,\ (x, 0) \sim (x, 2\pi)\ ,\ (x, y) \sim (x, y)$$

Demuestra que $X = Z/\sim$ es homeomorfo a el toro $S^1 \times S^1$ (como variedad producto). Dé también un homeomorfismo explícito de X a una superficie de $\mathbb{R}^3$ (conviene repasar el curso de curvas y superficies)

5. Otra forma de obtener el plano proyectivo es como un conjunto cociente. En $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, definimos la relación de equivalencia $p \sim q$ sii existe un número real $\lambda \neq 0$ tal que $q = \lambda p$. El conjunto cociente $X/\sim$ se denota $P_2(\mathbb{R})$.

1. Demuestre que $U = \{[x, y, z] \,:\, x \neq 0\}$ es un abierto de $P_2(\mathbb{R})$ con la topología cociente.
2. Demuestre que $\phi : U \to \mathbb{R}^2$, $\phi([x, y, z]) = (\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$ está bien definida, y es un homeomorfismo sobre su imagen.
3. De lo anterior, $(U; \phi)$ es una carta de $P_2(\mathbb{R})$. Demuestre que $P_2(\mathbb{R})$ es una variedad topológica contruyendo de forma similar cartas en cada uno de sus puntos.

6. En S^2 consideramos la relación de equivalencia donde un punto p se identifica bien con sí mismo, bien con su antipodal $-p$. Denotamos por Z su espacio cociente.

1. Demuestre que Z es compacto.
2. Construya un homeomorfismo $F : Z \to P_2(\mathbb{R})$ (y demuestre que lo es asumiendo que $P_2(\mathbb{R})$ es compacto).

3. De un argumento geométrico (no enteramente riguroso) para convencerse de que $P_2(\mathbb{R})$ contiene una banda de Moebius cuyo complemento es un disco.

7. En $\mathbb{R}$ se considera la relación de equivalencia $x \sim y$ sii $x - y \in \mathbb{Z}$; llamamos X al espacio cociente $\mathbb{R}/\sim$.

1. Demuestre que $U = \{ [t] \, : \, t \in (0,1)$ es un conjunto abierto en X;
2. si $\pi : \mathbb{R} \to X$ es la proyección cociente, demuestre que $\pi|_{(3,4)} : (3,4) \to X$ es un homeomorfismo de $(3,4)$ sobre U;
3. concluya que $(U, \left(\pi|_{(3,4)}\right)^{-1})$ es una carta en X;
4. construya cartas análogas a la anterior para demostrar que X es una variedad topológica de dimensión uno.
