Derivadas en variedades

Luis Guijarro

UAM

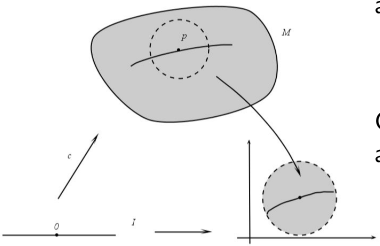
19 de mayo de 2010

Curvas suaves en una variedad

Definición

Una **curva suave** *en una variedad M es una aplicación diferenciable $c : I \to M$ donde I es un intervalo abierto en $\mathbb{R}$.*

Expresión local de una curva suave en una carta (U, ϕ):



Sea (U, ϕ) una carta de M con $(I) \cap U \neq \emptyset$. La **expresión local de** c **en** (U, ϕ) es la aplicación

$$\bar{c} = (\phi \circ c) : I \to \mathbb{R}^n,$$

Como es una aplicación de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$ tiene el aspecto

$$\bar{c}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

donde todas las funciones son diferenciables. Se llaman las **coordenadas de** c.

Vectores tangentes en un punto $p \in M$

Sea $p \in M$ un punto.

Definición

Sea $\mathcal{O} \subset M$ un entorno abierto de p, y $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. La derivada direccional de f a lo largo de c en p es $(f \circ c)'(0)$.

Cálculos locales:

- Escribimos la expresión local de la curva $c : I \to M$ usando las cartas (I, Id) en $\mathbb{R}$, y (U, ϕ) en M:

$$\bar{c}(t) = \phi \circ c \circ \mathrm{Id}^{-1}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

- Escribimos la expresión local de f:

$$\bar{f} = f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}, \qquad \bar{f}(x_1, \ldots, x_n) = f \circ \phi^{-1}(x_1, \ldots, x_n)$$

- Escribimos $f \circ c : I \to \mathbb{R}$ usando lo anterior:

$$f \circ c(t) = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c)(t) = (f \circ \phi^{-1})(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \\ = \bar{f}(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \bar{f} \circ \bar{c}(t) \quad (1)$$

Vectores tangentes en un punto $p \in M$

$\bar{f}$ y $\bar{c}$ son ambas aplicaciones entre abiertos de espacios euclídeos y se pueden diferenciar de la forma usual:

$$(f \circ c)'(0) = \sum_{i=1}^{n} D_i \bar{f}(\bar{c}(0)) x_i'(0)$$

Vectores tangentes en un punto $p \in M$

Ahora vamos a fijar la curva $c : I \to M$ con $c(0) = p$, y a derivar direccionalmente funciones diferenciables en un abierto de p.

$\mathcal{F}_p$ denota el conjunto de funciones diferenciables con dominio un entorno de p.

Si $f \in \mathcal{F}_p$, denotaremos por

$$c'(0) : \mathcal{F}_p \to \mathbb{R}, \qquad c'(0)(f) = (f \circ c)'(0)$$

al funcional que deriva direccionalmente funciones de $\mathcal{F}_p$.

Definición

Un vector tangente a M en p es un funcional

$$v : \mathcal{F}_p \to \mathbb{R}$$

donde $v = c'(0)$ para alguna curva suave $c : I \to M$ con $c(0) = p$.

Vector tangente en $p \in M$

Propiedades de vectores tangentes:

1. $v(f+g) = v(f) + v(g)$
2. $v(af) = av(f)$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}_p$
3. $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$
4. $v(a) = 0$, donde a denota la función constante que toma el valor $a \in \mathbb{R}$.

Definición

El **plano tangente de** M **en** p *es el conjunto cuyos elementos son los vectores tangentes a* M *en* p*. Lo denotaremos* T_pM*.*

Curvas coordenadas

Sea (U, ϕ) una carta de M en p. Supongamos que las coordenadas de p en M son

$$\phi(p) = (a_1, \ldots, a_n)$$

Definición

La curva coordenada i-ésima por p es la curva

$$c_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \quad c_i(t) = \phi^{-1}(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

Lema

Las curvas coordenadas por un punto pson curvas suaves.

Demostración.

$$\phi \circ c_i(t) = \phi \circ \phi^{-1}(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n) = \\ = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n) \quad (2)$$

y por lo tanto sus funciones coordenadas son diferenciables. □

Vectores coordenados en p

Sea $(U, \phi = (x_1, \ldots, x_n)$ una carta de M en p. Las curvas coordenadas por p son suaves y tienen un vector tangente correspondiente. Le damos un nombre especial:

Definición

El vector coordenado i-ésimo en p en la carta (U, ϕ) es el vector tangente a la i-ésima curva coordenada en p. Lo denotaremos como

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$$

¿Cómo actúa $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$? (i.e, ¿cómo se calcula $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p(f)$?)

Vectores coordenados en p

Lo calculamos usando la definición:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f\circ\phi^{-1}(a_1,\ldots,a_i+t,\ldots,a_n) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \bar{f}((a_1,\ldots,a_i+t,\ldots,a_n) =$$

$$= D_i\bar{f}(a) \quad (3)$$

donde $\bar{f}$ es la expresión local de f en (U,ϕ).

Como esto lo tenemos que usar repetidamente, aquí va otra vez la fórmula pero recordando que $\phi(p) = a$:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) = D_i(f\circ\phi^{-1})(\phi(p))$$

y por favor, no confundáis $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ con una derivada parcial. Es un vector.

T_pM es un espacio vectorial

Vamos a definir dos operaciones en el plano tangente T_pM que lo convierten en espacio vectorial:

- Una suma de vectores, definida como

$$(v+w)(f) = v(f) + w(f), \qquad \text{para } v, w \in T_pM, f \in \mathcal{F}_p$$

- Un producto por números reales, definido como

$$(av)(f) = a(v(f)), \qquad \text{donde } a \in \mathbb{R}, v \in T_pM$$

Es fácil (pero aburrido y largo) comprobar que estas operaciones hacen de T_pM un espacio vectorial.

Una base de T_pM

Si (U, ϕ) es una carta de M en p, entonces los vectores coordenados

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p \right\}$$

forman una base de T_pM.

Para demostrar esto, necesitamos primero el siguiente lema:

Lema

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (x_j) = \delta_{ij}$$

donde δ_{ij} vale 1 si $i = j$, 0 si $i \neq j$.

Demostración.

La función $x_j : U \to \mathbb{R}$ coincide con $\pi_j \circ \phi$, donde $\pi_j(u_1, \dots, u_n) = u_j$. Por lo tanto su expresión local en (U, ϕ) será

$$x_j \circ \phi^{-1}(u_1, \dots, u_n) = \pi_j(u_1, \dots, u_n) = u_j$$

Una base de T_pM

1. Los vectores coordenados son linealmente independientes:

Supongamos que hay reales $a_i \in \mathbb{R}$ con

$$a_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p = 0$$

Entonces para cualquier $f \in \mathcal{F}_p$,

$$(a_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p)(f) = 0,$$

y por tanto

$$\begin{aligned}(a_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p)(x_j) = \\ = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p(x_j) + \cdots + a_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p(x_j) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p(x_j) = a_j = 0 \quad (4)\end{aligned}$$

Una base de T_pM

2. Los vectores coordenados generan todo T_pM: Si $v = c'(0)$ para alguna curva con $c(0) = p$, entonces de lo visto anteriormente,

$$v(f) = (f \circ c)'(0) = \sum_{i=1}^{n} D_i \bar{f}(\phi(c(0)))x_i'(0)$$

donde $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ son las coordenadas de $c(t)$ en (U, ϕ). Como $c(0) = p$, y $D_i \bar{f}(\phi(p)) = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f)$, obtenemos

$$v(f) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) \text{ para cualquier } f \in \mathcal{F}_p$$

y por lo tanto

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$$

Coordenadas de un vector en una base de vectores coordenados

1. El vector está dado como $v = c'(0)$: Este es el caso que hemos tratado anteriormente, y ya vimos que si $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ eran las coordenadas de $c(t)$ en (U, ϕ), entonces

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p$$

El vector v está dado como como un funcional: Primero veamos cuáles deberían ser las coordenadas de un vector dado:

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p \Longrightarrow v(x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p (x_j) = a_j$$

y por tanto

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p$$

Cambio de base en T_pM

Supongamos que

- (U, ϕ) es una carta con $\phi = (x_1, \ldots, x_n)$,
- (V, ψ) es una carta con $\psi = (y_1, \ldots, y_n)$
- $U \cap V \neq \emptyset$

Tomamos un $p \in U \cap V$. Entonces en T_pM tenemos dos bases de T_pM:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p; \quad \text{y también} \quad \left.\frac{\partial}{\partial y_1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial y_n}\right|_p;$$

¿Cómo podemos cambiar coordenadas de una base a la otra? Está dada por una matriz de cambio de base, y para hallarla debemos escribir los miembros de una base en la otra. Para esto usamos la sección anterior:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p (y_i) \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_p$$

Cambio de base en T_pM (cont.)

Ahora calculamos los términos $\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p (y_i)$:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p (y_i) = D_j(y_i \circ \phi^{-1})(\phi(p))$$

por la definición de vectores coordenados y de su forma de actuar (que estudiamos anteriormente).

La matriz de cambio de la base $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial y_1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial y_n}\right|_p \right\}$ a la base $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p \right\}$ es

$$\begin{pmatrix} D_1(y_1 \circ \phi^{-1})(\phi(p)) & \dots & D_n(y_1 \circ \phi^{-1})(\phi(p)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1(y_n \circ \phi^{-1})(\phi(p)) & \dots & D_n(y_n \circ \phi^{-1})(\phi(p)) \end{pmatrix}$$

que no es más que la matriz Jacobiana de la aplicación de cambio de coordenadas $\psi \circ \phi^{-1}$ evaluada en $\phi(p)$.

Cambio de base en T_pM (cont.)

Y por recordarlo, si $v \in T_pM$ tiene

- coordenadas $(a_1, \ldots, a_n)$ en la base $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p \right\}$,
- y coordenadas $(b_1, \ldots, b_n)$ en la base $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial y_1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial y_n}\right|_p \right\}$, entonces

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} D_1(y_1 \circ \phi^{-1})(\phi(p)) & \ldots & D_n(y_1 \circ \phi^{-1})(\phi(p)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1(y_n \circ \phi^{-1})(\phi(p)) & \ldots & D_n(y_n \circ \phi^{-1})(\phi(p)) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Algunos ejemplos:

1. $\mathbb{R}^n$**:** Sea $p = (x_1, \dots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$. Tomo la carta $(U, \phi = \mathrm{Id})$. Los vectores coordenados actúan como

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) = D_i(f \circ \mathrm{Id}^{-1})(\mathrm{Id}(p))$$

donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable.

En este caso, $f \circ \mathrm{Id}^{-1}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$, por lo que (y sólo en este caso)

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) = D_i(f)(p)$$

y el vector actúa como una derivada parcial.

Si $c : I \to \mathbb{R}, c(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ es una curva con $c(0) = p$, entonces las coordenadas de la curva c en la carta mencionada son:

$$\mathrm{Id} \circ c(t) = \mathrm{Id}(x_1(t), \dots, x_n(t)) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

y $c'(0)$ se calculará como

$$c'(0) = x_1'(0) \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p + \cdots + x_n'(0) \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p$$

Algunos ejemplos:

2. S^2**:** Sea $p \in S^2$ un punto diferente del polo norte. $p \in S^2 \setminus \{N\}$, con lo que $(S^2 \setminus \{N\}, \phi_N)$ es una carta en p, donde ϕ_N era la proyección estereográfica desde el polo norte.

$$\phi(x, y, z) = (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}),$$

$$\phi^{-1}(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)$$

Sea $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S^2$ la curva $c(t) = (\cos t, \sin t, 0)$. Vamos a calcular sus funciones coordenadas en la carta anterior:

$$(u(t), v(t)) = \phi(c(t)) = \left(\frac{\cos t}{1-0}, \frac{\sin t}{1-0}\right) = (\cos t, \sin t, 0)$$

Algunos ejemplos (cont).

La base de vectores coordenados en un punto p está dada por

$$\left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_p$$

Si $p = c(0) = (1, 0, 0)$, vamos a escribir $c'(0)$ en esta base. Por lo visto anteriormente,

$$c'(0) = u'(0)\left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_p + v'(0)\left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_p = \left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_p$$

Como actúan los vectores coordenados: sea $f : S^2 \to \mathbb{R}$ una función suave.

$$\left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_p (f) = D_u(f \circ \phi^{-1}(u, v))(\phi(p)) = D_u(\bar{f})(\phi(p))$$

Alguno ejemplos (cont.)

Si por ejemplo, $f(x, y, z) = x + y + z$, entonces

$$\begin{aligned} \bar{f}(u, v) = f \circ \phi^{-1}(u, v) = f\left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right) = \\ = \frac{2u + 2v + u^2 + v^2 - 1}{u^2+v^2+1} \end{aligned} \tag{5}$$

y para hallar $\left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_p (f)$ tendríamos que diferenciar esa expresión en u, y sustituir en lo obtenido u y v por las coordenadas de p en la carta (U, ϕ), i.e, $\phi(p)$.

Campos de vectores

Definición

Sea $\mathcal{O}$ un abierto de una variedad diferencial M. Un campo de vectores X en $\mathcal{O}$ es una correspondencia que asigna cada punto $p \in \mathcal{O}$ un vector X_p tangente a M en p.

Si $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, entonces podemos definir una nueva función combinando X y f como sigue:

$$X(f) : \mathcal{O} \to \mathbb{R}, \qquad X(f)(p) := X_p(f)$$

Definición

Diremos que el campo de vectores X es suave si para cualquier función $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, la función $X(f) : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ es diferenciable.

Operaciones con campos de vectores

1. Suma de campos de vectores: Sean X e Y campos de vectores suaves. La **suma de** X **e** Y es el campo $X+Y$ definido como

$$(X+Y)_p = X_p + Y_p$$

$X+Y$ es suave, ya que si $f \in \mathcal{F}_p$,

$$\begin{aligned}(X+Y)(f)(p) = (X+Y)_p(f) = X_p(f) + Y_p(f) = \\ = X(f)(p) + Y(f)(p) = (X(f)+Y(f))(p)\end{aligned} \tag{6}$$

que es diferenciable porque $X(f)$ y $Y(f)$ son diferenciables.

Operaciones con campos de vectores (cont).

2. Producto de un campo de vectores por una función: Sea $g : M \to \mathbb{R}$ función diferenciable. Definimos **el producto de** X **por** g como el campo de vectores gX definido como

$$(gX)_p = g(p)X_p$$

gX es un campo de vectores suave porque

$$\begin{aligned}(gX)(f)(p) = (gX)_p(f) = (g(p)X_p)(f) = g(p) \cdot X_p(f) = \\ = g(p) \cdot X(f)(p) = (g \cdot X(f))(p) \qquad (7)\end{aligned}$$

así que como funciones en p, tenemos

$$(gX)(f) = (g \cdot X(f))$$

que es diferenciable.

Campos de vectores coordenados

Definición

Sea (U,ϕ) una carta de M, donde $\phi = (x_1,\dots,x_n)$. Los campos de vectores coordenados en U son los campos de vectores que asignan a cada $p \in U$, los vectores tangentes $\left.\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_p, \quad i = 1,\dots,n$

Los denotamos como $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Si $f : U \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f) : U \to \mathbb{R}$$

es una función que en un punto $p \in U$ toma el valor

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f)(p) = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) = D_i(\bar{f})(\phi(p))$$

o también

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f)(p) = \left(D_i(\bar{f}) \circ \phi\right)(p)$$

Campos de vectores coordenados

De lo anterior, se sigue que como funciones en U,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f) = D_i(\bar{f}) \circ \phi$$

Y por lo tanto su expresión local en (U, ϕ) es

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f) \circ \phi^{-1} = \left(D_i(\bar{f}) \circ \phi\right) \circ \phi^{-1} = D_i(\bar{f})$$

que es diferenciable en $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ por serlo $\bar{f}$. Hemos demostrado

Lema

Si $(U, \phi = (x_1, \ldots, x_n))$ es una carta en M, sus campos de vectores coordenados

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$$

son suaves en U.

Expresión local de un campo de vectores X en una carta

Sea X un campo de vectores en M. Sea (U, ϕ) una carta de M, con $\phi = (x_1, \dots, x_n)$.

Para cada $p \in U$, $X_p \in T_pM$, y $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_p, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_p \right\}$ es una base de T_pM, así que por lo ya visto,

$$X_p = X_p(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_p + \cdots + X_p(x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_p$$

Pero $X_p(x_i) = X(x_i)(p)$ por la forma en que definimos funciones del tipo $X(f)$, así que

$$X_p = X(x_1)(p)\frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_p + \cdots + X(x_n)(p)\frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_p$$

Expresión local de un campo de vectores X en una carta

$$X_p = \left(X(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + X(x_n)\frac{\partial}{\partial x_n} \right) \Big|_p$$

donde hay que recordar que $p \in U$.

Definición

La expresión local del campo de vectores X en U es

$$X\big|_U = X(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + X(x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

Proposición

Un campo de vectores X es suave si y sólo si para todo $p \in M$ hay una carta $(U, \phi = (x_1, \ldots, x_n))$ de M en p con $X(x_1), \ldots, X(x_n)$ funciones diferenciables.

Demostración.

Si X es suave, entonces la defnición de campo suave nos da que las funciones $X(x_i) : U \to \mathbb{R}$ son diferenciables. Por otra parte, si las funciones $X(x_i) : U \to \mathbb{R}$ son diferenciables, entonces para cualquier función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$, en puntos de U,

$$X(f) = X(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1}(f) + \cdots + X(x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}(f)$$

que es diferenciable por ser suma de productos de funciones suaves. $\square$

Ejemplo:

Sea $M = \mathbb{R}^2$. Tomamos la carta $(\mathbb{R}^2, \phi(x, y) = (x, y))$, que nos da los vectores coordenados $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$.

Sea $\xi : A = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ la parametrización definida como

$$\xi(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta),$$

que induce una carta $(\xi(A), \psi = \xi^{-1})$

Ésta nos da otros dos campos de vectores (definidos en $\xi(A)$): $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}$. Vamos a escribir su expresión local en $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$:

Primero hallamos el cambio $\phi \circ \psi^{-1}(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$. Esto nos da (x, y) como $x(r, \theta), y(r, \theta)$.

Ejemplo (cont.):

A continuación aplicamos lo que ya sabemos de cómo escribir un campo de vectores con respecto a los campos coordenados:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r}(y)\frac{\partial}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

De forma similar

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}(y)\frac{\partial}{\partial y} = -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

Ejemplo (cont.):

Vamos a hacer el camino inverso y a buscar la expresión local de $\dfrac{\partial}{\partial x}$ en la carta $(\mathbb{R}^2, \phi(x,y) = (x,y))$:

Primero necesitariamos el cambio de coordenadas $\psi \circ \phi^{-1}(x,y) = (r(x,y), \theta(x,y))$.

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta(x,y) = \begin{cases} \arctan y/x, & x > 0 \\ \arctan y/x + \pi, & x < 0, y > 0 \\ \arctan y/x - \pi, & x < 0, y < 0 \\ \operatorname{arccot}(x/y), & y > 0 \\ \operatorname{arccot}(x/y) - \pi, & y < 0 \end{cases}$$

Pero en $\left.\dfrac{\partial}{\partial x}\right|_{\xi(A)} = \dfrac{\partial}{\partial x}(r)\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\theta)\dfrac{\partial}{\partial \theta}$, hallar $\dfrac{\partial}{\partial x}(\theta)$ es un poco costoso.

Ejemplo (cont.):

En este caso, es más fácil resolver $\dfrac{\partial}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial}{\partial y}$ de la pantalla anterior:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

y despejando

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} \\ \\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

Ejemplo (cont.):

Para dejarlo en coordenadas (x, y), usamos que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\theta = x/r = x/\sqrt{x^2+y^2}$, etc. para tener

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial}{\partial r} - \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial}{\partial r} - \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\frac{\partial}{\partial \theta}$$

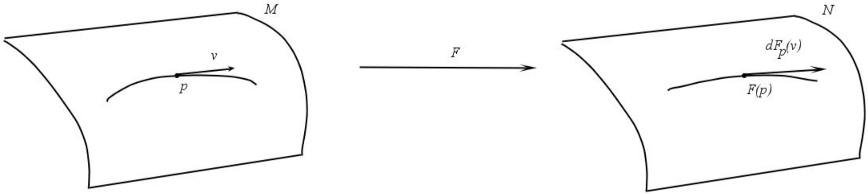
La diferencial de una aplicación entre variedades

Sea $F : \mathcal{O} \subset M \to N$ una aplicación diferenciable. Tomamos un $p \in M$ y queremos "diferenciar F en p".

Si $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ es una curva con $\alpha(0) = p$, entonces $\alpha'(0) \in T_pM$.

La curva $\beta = (F \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$ es suave y $\beta(0) = F(p) \in N$.

Por lo tanto, β tiene vector tangente $\beta'(0) \in T_{F(p)}N$



La diferencial de una aplicación entre variedades:definición.

Definición

La diferencial de F en p es la aplicación lineal

$$dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$$

definida como

$$dF_p(v) = (F \circ \alpha)'(0)$$

donde α es una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$.

Para que la definición sea correcta, hay que comprobar dos cosas:

- hay que ver que $dF_p(v)$ no depende de la curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ escogida siemrpre y cuando $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$;
- hay que comprobar que, efectivamente, $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ es lineal.

La diferencial de una aplicación (cont.)

Vamos a comprobar ambas a la vez. Para ello ponemos coordenadas:

- Tomo una carta $(U, \phi = (x_1, \dots, x_n))$ de M en p,
- tomo otra $(V, \psi = (y_1, \dots, y_m))$ de N en $F(p)$, con $F(U) \subset V$;
- supongo que la curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ tiene coordenadas $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ en (U, ϕ). Recordad que

  $$(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \phi(\alpha(t)),$$

  así que

  $$\alpha(t) = \phi^{-1}(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

  Como $\alpha(0) = p$, $(x_1(0), \dots, x_n(0))$ son las coordenadas de p. Además $\alpha'(0) = v$, con lo que

  $$v = x_1'(0) \frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_p + \cdots + x_n'(0) \frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_p$$

La diferencial de una aplicación (cont.)

La curva β: Sus coordenadas en la carta (V,ψ) están dadas por

$$\psi \circ \beta(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t))$$

con lo que

$$\beta'(0) = y_1'(0) \frac{\partial}{\partial y_1}\bigg|_{F(p)} + \cdots + y_m'(0) \frac{\partial}{\partial y_m}\bigg|_{F(p)}$$

De la definición, $\beta = (F \circ \alpha)$, y $\alpha(t) = \phi^{-1}(x_1(t), \dots, x_n(t))$, así que

$$(y_1(t), \dots, y_m(t)) = \psi \circ F \circ \phi^{-1}(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

Pero $\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es la expresión local de F en las cartas (U,ϕ) y (V,ψ). La denotamos $\bar{F}$, y como va de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, se escribe como:

$$\bar{F} = (\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_m)$$

La diferencial de una aplicación (cont.)

Sustituyendo en lo anterior

$$\begin{aligned}(y_1(t),\dots,y_m(t)) &= \bar{F}(x_1(t),\dots,x_n(t)) = \\ &= (\bar{F}_1(x_1(t),\dots,x_n(t)),\dots,\bar{F}_m(x_1(t),\dots,x_n(t)) \end{aligned} \tag{8}$$

que está escrita como composición de aplicaciones entre espacios euclídeos, y por tanto se puede derivar usando la regla de la cadena:

$$\begin{bmatrix} y_1'(0) \\ \vdots \\ y_m'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1\bar{F}_1 & \dots & D_n\bar{F}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1\bar{F}_m & \dots & D_n\bar{F}_m \end{bmatrix}_{\phi(p)} \begin{bmatrix} x_1'(0) \\ \vdots \\ x_n'(0) \end{bmatrix}$$

donde la matriz $D\bar{F}$ está evaluada en $(x_1(0),\dots,x_n(0))$, que eran las coordenadas de p.

La diferencial de una aplicación (cont.)

Esta fórmula tiene dos consecuencias:

1. **$dF_p(v)$ no depende de la curva α usada:**

   Si $\widetilde{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ fuera otra curva con $\widetilde{\alpha}(0) = \alpha(0) = p$, y con $\widetilde{\alpha}'(0) = \alpha'(0) = v$, entonces en la expresión anterior, $\phi(p)$ y $(x_1'(0), \ldots, x_n'(0))$ coincidirían, así que

   $$(F \circ \widetilde{\alpha})'(0) = (F \circ \alpha)'(0)$$

   .

2. Las coordenadas de $dF_p(v)$ en la base $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial y_1}\right|_{F(p)}, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial y_m}\right|_{F(p)} \right\}$ se obtienen multiplicando por una matriz las coordenadas de v en la base $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{p}, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_{p} \right\}$. Por lo tanto dF_p **es una aplicación lineal.**

Para futura referencia, ponemos como proposición el resultado obtenido:

Proposición

Sea $F : M \to N$ diferenciable. Si (U, ϕ) es una carta de M en p, (V, ψ) es una carta de N en $F(p)$, entonces en las bases $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p \right\}$ de T_pM y $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial y_1}\right|_{F(p)}, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial y_m}\right|_{F(p)} \right\}$ de $T_{F(p)}N$, la aplicación lineal $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ se escribe mediante la matriz

$$D(\psi \circ F \circ \phi^{-1})(\phi(p)) = \begin{bmatrix} D_1\bar{F}_1 & \dots & D_n\bar{F}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1\bar{F}_m & \dots & D_n\bar{F}_m \end{bmatrix}_{\phi(p)}$$

La diferencial de una aplicación: definición equivalente

Si $v = \alpha'(0) \in T_pM$, $dF_p(v) \in T_{F(p)}N$ es tangente a $\beta = F \circ \alpha$. Por ello, es un funcional

$$dF_p(v) : \mathcal{F}_{F(p)} \to \mathbb{R}$$

¿Cómo actúa?

Sea $f \in \mathcal{F}_{F(p)}$ una función diferenciable en $F(p)$.

Entonces

$$[dF_p(v)](f) = (f \circ \beta)'(0) = (f \circ F \circ \alpha)'(0) = [(f \circ F) \circ \alpha]'(0) = v(f \circ F)$$

Podíamos haber empezado con esta definición y haber deducido la otra.

Regla de la cadena en variedades

Teorema

Si $F : M \to N$, $G : N \to P$ son diferenciables con $F(p) = q$, $G(q) = r$, entonces

$$d(G \circ F)_p = dG_q \circ dF_p$$

Demostración.

Si $v \in T_pM$, tomamos $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Entonces

- $d(G \circ F)_p(v) = ((G \circ F) \circ \alpha)'(0)$;
- por la definición de diferencial, $\beta = F \circ \alpha$ es una curva con $\beta(0) = F(p) = q$, $\beta'(0) = dF_p(V)$, así que

$$\gamma = G \circ \beta = G \circ (F \circ \alpha) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to P,$$

  es una curva con $\gamma'(0) = dG_q(\beta'(0)) = dG_q(dF_p(v))$.

Como $(G \circ F) \circ \alpha = G \circ (F \circ \alpha)$, tenemos que

$$d(G \circ F)_p(v) = ((G \circ F) \circ \alpha)'(0) = (G \circ (F \circ \alpha))'(0) = dG_q(dF_p(v))$$

Teorema de la función inversa en variedades

Primero demostramos un lema fácil pero necesario:

Lema

Si $\mathrm{Id} : M \to M$ *es la aplicación identidad* $\mathrm{Id}(p) = p$*, entonces su diferencial* $d(\mathrm{Id})_p : T_pM \to T_pM$ *es la identidad en* T_pM *(i.e,* $d\,\mathrm{Id}_p(v) = v$ *para todo* $v \in T_pM$*)*

Demostración.

Si $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ tiene $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$, entonces

$$\mathrm{Id} \circ \alpha(t) = \alpha(t)$$

por lo que $d\,\mathrm{Id}_p(v) = (\mathrm{Id} \circ \alpha)'(0) = \alpha'(0) = v$ □

Ahora enunciamos la versión del teorema de la función inversa para variedades:

Teorema de la función inversa en variedades

Teorema

Sea $F : M \to N$ diferenciable. F es un difeomorfismo local en $p \in M$ si y sólo si $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ es un isomorfismo lineal.

Demostración:
Supongamos que F es un difeomorfismo local en $p \in M$. Entonces hay entornos U de p, V de $F(p)$, tal que $F\big|_U : U \to V$ es invertible con inversa $(F\big|_U)^{-1} : V \to U$ diferenciable. Componiendo

$$(F\big|_U)^{-1} \circ F\big|_U = \mathrm{Id}\big|_U$$

Si $p \in U$, la definición de diferencial da

$$dF_p = d(F\big|_U)_p$$

Tomando la diferencial, y aplicando la regla de la cadena,

$$d(F\big|_U)^{-1}_{F(p)} \circ dF_p = d(F\big|_U)^{-1}_{F(p)} \circ d(F\big|_U)_p = d((F\big|_U)^{-1} \circ F\big|_U)_p = d\,(\mathrm{Id})_p = \mathrm{Id}_{T_pM}$$

De forma similar, $dF_p \circ d(F\big|_U)^{-1}_{F(p)} = \mathrm{Id}_{T_{F(p)}N}$, y dF_p es isomorfismo lineal.

Teorema de la función inversa en variedades (cont.)

Ahora supongamos que $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ es un isomorfismo lineal; entonces su matriz (tras tomar bases en T_pM y $T_{F(p)}N$) debe ser cuadrada y no singular.

En particular, tomando cartas $(U_1, \phi = (x_1, \ldots, x_n))$ en p, $(V_1, \psi = (y_1, \ldots, y_m))$ en N, sabemos que en las bases de vectores coordenados en p y en $F(p)$, la matriz de dF_p es

$$D\bar{F}(\phi(p)) = D(\psi \circ F \circ \phi^{-1})(\phi(p)) = \begin{bmatrix} D_1\bar{F}_1 & \ldots & D_n\bar{F}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1\bar{F}_m & \ldots & D_n\bar{F}_m \end{bmatrix}_{\phi(p)}$$

Como la matriz es cuadrada, $\dim M = n = m = \dim N$.

Además, como $D\bar{F}(\phi(p))$ es no singular, el teorema de la función inversa en $\mathbb{R}^n$ asegura la existencia de entornos $\bar{U}$ de $\phi(p)$, $\bar{V}$ de $\bar{F}(\phi(p))$ tal que $\bar{F}\big|_{\bar{U}} : \bar{U} \to \bar{V}$ es invertible con inversa diferenciable.

Teorema de la función inversa (cont.)

Pero en $\bar{U}$, tenemos

$$\bar{F} = \psi \circ F \circ \phi^{-1},$$

así que en el abierto $\phi^{-1}(\bar{U}) = U$

$$F|_U = \psi^{-1} \circ \bar{F}|_{\bar{U}} \circ \phi$$

y

$$(F\big|_U)^{-1} = \phi^{-1} \circ (\bar{F}\big|_{\bar{U}})^{-1} \circ \psi$$

nos da una inversa para $F\big|_U$.

Teorema de la función inversa en variedades

La demostración se ve más clara con los siguientes diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "F|_U"] \arrow[d, "\phi"'] & V \\
\bar{U} \arrow[r, "\bar{F}|_{\bar{U}}"'] & \bar{V} \arrow[u, "\psi^{-1}"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
U & V \arrow[l, "(F|_U)^{-1}"'] \arrow[d, "\psi"] \\
\bar{U} \arrow[u, "\phi^{-1}"] & \bar{V} \arrow[l, "(\bar{F}|_{\bar{U}})^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

El primero indica como escribir $F|_U$ usando $\bar{F}$; el segundo indica cómo escribir su inversa usando la inversa de $\bar{F}$. La demostración sólo indica cómo escribir la inversa (local) de F usando la inversa (local) de $\bar{F}$, la cuál existe gracias al teorema de la función inversa en $\mathbb{R}^n$.

Vectores y campos de vectores en subvariedades

Sea $S \subseteq M$ una subvariedad.

Un vector tangente a S en p es tangente a alguna curva $\alpha : I \to S$, con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v \in T_pS$.

Pero como $S \subset M$, podemos ver la curva α como yendo a parar a M. Para esto nos hace falta la inclusión

$$i : S \hookrightarrow M, \qquad q \to q$$

Proposición

$i : S \to M$ es diferenciable, con diferencial $di_p : T_pS \to T_pM$ inyectiva.

Vectores y campos de vectores en subvariedades

Demostración.

La primera parte estaba demostrada en el apartado de subvariedades del capítulo anterior, donde vimos que si $(U, \phi = x_1, \ldots, x_n))$ era una carta adaptada a S en p, entonces la expresión local de i en ella, y en la carta que induce en S era

$$(\phi \circ i \circ \widetilde{\phi}^{-1})(x_1, \ldots, x_k, 0 \ldots, 0)$$

que tiene diferencial

$$\begin{bmatrix} I_{k\times k} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como tiene rango igual a la dimensión de T_pS, di_p es inyectiva. $\square$

Por ser $di_p : T_pS \to T_pM$ inyectiva, se suele identificar T_pS con $di_p(T_pS) \subset T_pM$, y considerarlo como un subespacio vectorial de T_pM.

Vectores y campos de vectores en subvariedades

En el caso de subvariedades Euclídeas, es fácil identificar T_pS dentro de T_pM:

1. Si S está definida implícitamente mediante $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$:
Supongamos que $S = F^{-1}(a)$, $a \in \mathbb{R}^{n-k}$, donde a es un valor regular de F.

Proposición

En la situación anterior,

$$T_pS = \ker DF_p$$

Demostración.

Si $\alpha : I \to S$ cumple $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v \in T_pS$, entonces $F(i \circ \alpha))(t) = a$, ya que $S = F^{-1}(a)$. Por ello,

$$DF_p(di_p(v)) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(F(i \circ \alpha))(t) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(a) = 0$$

Esto implica $di_p(T_pS) \subset \ker dF_p$, y como ambos son subespacios vectoriales de dimensión k, deben coincidir. □

Vectores y campos de vectores en subvariedades

2. $p \in S$ **está en el entorno coordenado correspondiente a una parametrización** $\xi : A \to S$**:** Supongamos que $\xi(a) = p$ para algún $a \in A$.

En este caso, $i \circ \xi : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación diferenciable en el sentido usual, y podemos trabajar con su matriz diferencial (calculada como en Cálculo II)

En la siguiente proposición, identificamos $T_p\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}^n$ gracias a la base de vectores coordenados de la carta $(\mathbb{R}^n, \mathrm{Id})$, i.e,

$$(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \text{ corresponde a } a_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_p + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_p \in T_p\mathbb{R}^n$$

Proposición

$di_p(T_pS) \subset T_p\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}^n$ coincide con el subespacio vectorial $\operatorname{img}(D(i \circ \xi)(a))$.

Vectores y campos de vectores en subvariedades

Demostración.

Si $v \in T_pM$ con $v = \alpha'(0)$, entonces la curva $\tilde{\alpha} = \xi^{-1} \circ \alpha : I \to A$ es una curva con $\xi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$, así que

$$d\xi_a(\tilde{\alpha}'(0)) = \alpha'(0) = v$$

Y por tanto

$$di_p(v) = di_p(d\xi_a(\tilde{\alpha}'(0)) = d(i \circ \xi)_a(\tilde{\alpha}'(0))$$

por lo que $di_p(T_pS) \subset \mathrm{img}(D(i \circ \xi)(a))$. Como ambos subespacios tienen la misma dimensión, son iguales. $\square$

Campos de vectores en variedades

Teorema

Sea X un campo de vectores suave en una variedad M. Supongamos que para una subvariedad $S \subset M$ tenemos que $X_p \in T_pS$ para todo $p \in S$. Entonces $X\big|_S$ es un campo suave en S.

La condición $X_p \in T_pS$ quiere decir que $X_p \in di_p(T_pS)$, de acuerdo con la identificación anterior, así que $X_p = di_p(\widetilde{X}_p)$ para algún $\widetilde{X}_p \in T_pS$. El teorema dice que $\widetilde{X}$ es un campo suave en S.

Demostración.

Usaremos sin demostar que dada una función diferenciable $f : \mathcal{O} \subset S \to \mathbb{R}$, existe una extensión diferenciable $\bar{f} : \bar{\mathcal{O}} \subset M \to \mathbb{R}$ (al menos localmente, que es todo cuanto nos hace falta).

$$X\big|_S(f)(p) = X(\bar{f}) \circ i(p)$$

que es una composición de funciones diferenciables, por lo que $X\big|_S$ es suave en S. □

Flujo global

Definición

Un **flujo global** *en una variedad M es una aplicación diferenciable $\theta : \mathbb{R} \times M \to M$, tal que*

- $\theta(0, p) = p$ *para todo* $p \in M$;
- $\theta(t, \theta(s, p)) = \theta(s + t, p)$

Para cada $p \in M$ tenemos una curva $c_p : \mathbb{R} \to M$

$$c_p(t) = \theta(t, p)$$

Tomando su vector tangente en $t = 0$ nos da un campo de vectores X en M:

$$X_p = c_p'(0)$$

Definición

X se llama el generador infinitesimal de θ.

Flujo de un campo de vectores

Para un $p \in M$, vamos a examinar la curva $c_p(s) = \theta(s, p)$ que describe dónde se mueve p mediante el flujo θ.

Proposición

La curva c_p es siempre tangente al campo X, i.e, $c_p'(s) = X_{c_p(s)}$.

Demostración.

Tomo la curva $c(t) = \theta(t, c_p(s))$. Por las propiedades de θ,

$$c(t) = \theta(t, c_p(s)) = \theta(t, \theta(s, p)) = \theta(t + s, p) = c_p(t + s)$$

Calculo el vector tangente a cada una cuando $t = 0$:

$$X_{c_p(s)} = c'(0) = c_p'(s)$$

$\square$

Curvas integrales: $c_p : \mathbb{R} \to M$ se llama una curva integral de X.

Curvas integrales

Si queremos hallar la curva integral por p de un campo de vectores X, usamos una carta $(U, \phi = (x_1, \dots, x_n)$ de M en p.

- Suponemos que: la expresión local de X en la carta es $X = X_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + X_n \dfrac{\partial}{\partial x_n}$, donde cada X_i es una función en U.
- Suponemos que $c_p(t)$ es la curva buscada; la escribimos en coordenadas: $(x_1(t), \dots, x_n(t))$, que son las funciones que queremos hallar.
- La condición de curva integral es

$$X_{c_p(t)} = \sum_i X_i(c(t)) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i x_i'(t) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

- Recordando que $c_p(t) = \phi^{-1}(x_1(t), \dots, x_n(t))$, esto nos da el sistema de EDO's de la siguiente pantalla:

Curvas integrales

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \circ \phi^{-1}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ X_n \circ \phi^{-1}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{bmatrix}$$

con una condición inicial

$$(x_1(0), \dots, x_n(0)) = \phi(p)$$

correspondiente a la condición $c_p(0) = p$.

Este sistema tiene solución al menos para pequeños valores de t. Además es única.

Ejemplo de cálculo de curvas integrales

Sea $M = S^2$. Consideramos el campo de vectores X en $\mathbb{R}^3$ definido como

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Como $S^2 = F^{-1}(1)$ para $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ y 1 es valor regular de F,

$$T_pS^2 = \ker DF_p$$

y al tener $DF_p(X_p) = 0$ para puntos $p \in S^2$, tenemos que $Y = X|_{S^2}$ es un campo de vectores en S^2. Vamos a calcular sus curvas integrales de dos formas:

Ejemplo de cálculo de curvas integrales

1. Usando una carta: Tomamos, por ejemplo, la parametrización

$$\xi(u,v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v), \quad (u,v) \in (0,2\pi) \times (0,\pi).$$

con inversa

$$\phi(x,y,z) = (u(x,y,z), v(x,y,z)), \quad u = u(x,y,z), v = \arccos z,$$

donde la fórmula para $u(x,y,z)$ es similar a la del ángulo polar.

En esta carta, la expresión del campo de vectores Y es

$$Y = Y(u)\frac{\partial}{\partial u} + Y(v)\frac{\partial}{\partial v}$$

y como no hay una buena fórmula para u, puede ser un poco pesado de calcular.

Ejemplo de cálculo de curvas integrales

En este caso, hay otra forma más conveniente de hacer este cálculo:

$$\begin{aligned}
\xi_u &= (-\sin u \sin v, \cos u \sin v, 0) = \frac{\partial}{\partial u}, \\
\xi_v &= (\cos u \cos v, \sin u \cos v, -\sin v) = \frac{\partial}{\partial v}
\end{aligned}$$

o tras identificar $\mathbb{R}^3$ con $T_p\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
\xi_u &= -\sin u \sin v \frac{\partial}{\partial x} + \cos u \sin v \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial u}, \\
\xi_v &= \cos u \cos v \frac{\partial}{\partial x} + \sin u \cos v \frac{\partial}{\partial y} - \sin v \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial v}
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$Y_{\xi(u,v)} = y(u,v)\frac{\partial}{\partial x} - x(u,v)\frac{\partial}{\partial y} = \sin u \sin v \frac{\partial}{\partial x} - \cos u \sin v \frac{\partial}{\partial y} = -\xi_u = -\frac{\partial}{\partial u}$$

Ejemplo de cálculo de curvas integrales

Si $\xi(u,v) = p$, entonces las ecuaciones del flujo de Y son

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con condición inicial $(u(0), v(0)) = (u, v)$, lo que da

$$(u(t), v(t)) = (u - t, v)$$

y para obtener el flujo en S^2,

$$\theta(t, \xi(u,v)) = \xi(u(t), v(t)) = (\cos(u-t)\sin v, \sin(u-t)\sin v, \cos v)$$

Ejemplo de cálculo de curvas integrales

Otra forma de hallar el flujo de un campo tangente a una subvariedad es usar este resultado:

Proposición

Si S es una subvariedad de M, e Y es un campo de vectores en S obtenido como restricción de un campo de vectores X de M que es tangente a S en puntos de S, entonces las curvas integrales de Y coinciden con las curvas integrales de X que empiezan en puntos de S.

Demostración.

Sea $p \in S$. Denotamos por $\alpha : I \to S$ la curva integral de Y con $\alpha(0) = p$. La condición de curva integral da

$$\alpha'(t) = Y_{\alpha(t)} = X_{\alpha(t)}$$

por la definición de Y como restricción de X; luego α es curva integral de X. $\square$

Ejemplo de cálculo de curvas integrales

Volviendo al ejemplo, Y se obtenía restringiendo $X = y\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial y}$ desde $\mathbb{R}^3$ a S^2, así que nos basta calcular las curvas integrales de X. Usamos la carta usual de R^3:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{bmatrix}$$

que tiene soluciones

$$(x(t), y(t), z(t)) = (x\cos t + y\sin t, -x\sin t + y\cos t, z)$$

Apéndice: La derivada direccional en $\mathbb{R}^n$

Sea $\mathcal{O}$ un abierto en $\mathbb{R}^n$ y una función

$$f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}, \quad f = f(x_1, \ldots, x_n)$$

Sea $p \in M$, y $v \in \mathbb{R}^n$ un vector. La recta que pasa por p en la dirección v es $c(t) = p + tv$, que cumple $c(0) = p$, $c'(0) = v$.

La variación de f a lo largo de la recta $c(t)$ es la derivada $(f \circ c)'(t)$ y si la queremos calcular en p, entonces es $(f \circ c)'(0)$.

Definición

La derivada direccional de f en la dirección v es

$$D_v(f) = (f \circ c)'(0)$$

Apéndice: La derivada direccional en $\mathbb{R}^n$ (cont)

La calculamos usando la regla de la cadena:

$$f(c(t)) = f(x_1 + tv_1, \dots, x_n + tv_n), \qquad \frac{d}{dt}|_{t=0}(f \circ c) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)v_n$$

Por razones que serán claras más adelante, denotaremos la derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ como $D_i f$

Propiedades:

- $D_v(f+g) = D_v(f) + D_v(g)$.
- $D_v(fg) = f(p)D_v(g) + g(p)D_v(f)$.

Apéndice: La derivada direccional en $\mathbb{R}^n$ (cont)

Si $c : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva suave con $c(0) = p$, $c'(0) = v$, podíamos haber hecho un cálculo similar:

$$
\begin{aligned}
(f \circ c)'(0) = (f(x_1(t), \dots, x_n(t)))'_{t=0} = D_1 f(p) x_1'(0) + \cdots + D_n f(p) x_n'(0) = \\
= D_1 f(p) v_1 + \cdots + D_n f(p) v_n \quad (9)
\end{aligned}
$$

que demuestra que una derivada direccional a lo largo de v no depende de la curva usada para calcular $(f \circ c)'(0)$, siempre que esta curva satisfaga $c(0) = p$, $c'(0) = v$.

Teorema de la función inversa

Teorema

Sea $F : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable donde $\mathcal{O}$ es un abierto. Si $\det DF(a) \neq 0$, entonces existen entornos A de a, B de $F(a)$, tal que $F(A) = B$, y $F|_a : A \to B$ es invertible con inversa diferenciable.

$F : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ es un difeomorfismo si es diferenciable, biyectiva, con inversa diferenciable.

F es un difeomorfismo local en $a \in A$ si existen entornos A de a, B de $F(a)$ tal que $F(A) = B$, y $F|_a : A \to B$ es invertible con inversa diferenciable.