Examen Parcial de Geometría III. **15 de Abril de 2010**

Profesor: Luis Guijarro Santamaría.

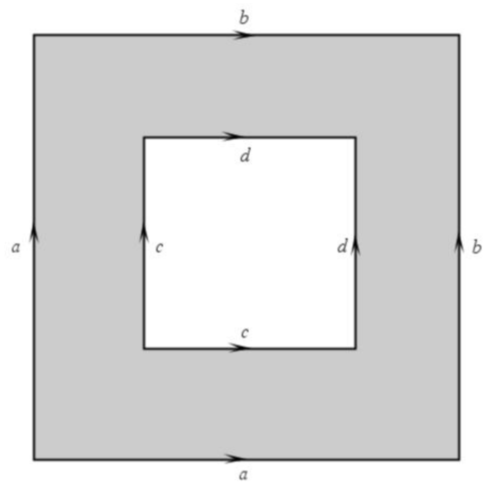
Instrucciones: Entregue la solución de cada problema en una hoja diferente.

---

1. (2 puntos) Sean S_1, S_2 superficies compactas tal que $S_1 \# S_2$ es homeomorfa al toro $\mathbb{T}$. Diga qué posibilidades hay para S_1 y S_2, y demuéstre que no hay otras.

---

2. (3 puntos) Construimos un espacio X realizando las identificaciones indicadas en el dibujo: lados con la misma letra se identifican entre sí a lo largo del sentido indicado por las flechas. (cuidado: el espacio X corresponde *sólo* a aquellos puntos procedentes de la región sombreada y de su borde)



Decida a qué superficie es homeomorfo X.

---

3. (3 puntos) Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = e^z\}$

1. Demuestre que S es subvariedad de $\mathbb{R}^3$.
2. Demuestre que $F : S \to S$ dada por $F(x, y, z) = (-x, -y, z)$ es un difeomorfismo .

---

4. (2 puntos) Sea M una variedad diferencial de dimensión n, $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Denotamos por $\mathbb{R}_2$ la variedad diferencial obtenida cuando consideramos en $\mathbb{R}$ el atlas $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, \phi(t) = t^3)\}$. Demuestre que la *aplicación (!!)* $F : M \to \mathbb{R}_2$ definida como $F(p) = (f(p))^{1/3}$ es diferenciable.

Soluciones:

1. Como el toro es orientable, S_1 y S_2 son ambas orientables. Además tampoco pueden tener borde porque el toro no lo tiene. Por el teorema de clasificación de superficies,

- S_1 puede ser o bien S^2 o bien $\mathbb{T}\#\ldots\#\mathbb{T}$ con g_1 sumandos,
- S_2 puede ser o bien S^2 o bien $\mathbb{T}\#\ldots\#\mathbb{T}$ con g_2 sumandos,

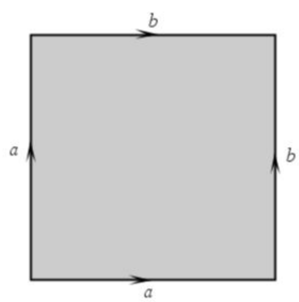
Pero $\chi(\mathbb{T}) = 0$, y $\chi(T) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$. Como $\chi(S_i) = 2 - 2g_i$, obtenemos

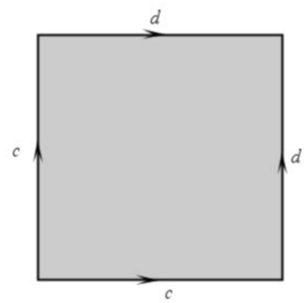
$$0 = 2 - 2g_1 + 2 - 2g_2 - 2, \quad 2 = 2(g_1 + g_2), \quad g_1 + g_2 = 1$$

Como $g_1, g_2 \geq 0$, solo tenemos las posibilidades $g_1 = 1, g_2 = 0$ (que corresponde a $S_1 \sim \mathbb{T}$, $S_2 \sim S^2$), o $g_1 = 0, g_2 = 1$ (que corresponde a $S_1 \sim S^2$, $S_2 \sim \mathbb{T}$).

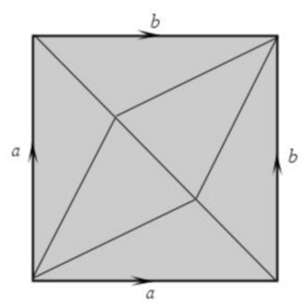
---

2. De clase sabemos que esta superficie corresponde a la suma conexa de las superficies





que son homeomorfas porque estamos realizando las mismas identificaciones en ambas. Calculamos su característica de Euler mediante la ttriangulación



aunque valen muchas otras. Tiene 6 triángulos, 9 aristas, y 5 vértices, lo que da $\chi = 2$. Por lo tanto la suma conexa es $(S^2\#S^2) \sim S^2$.

---

3. Para ver que S es subvariedad podemos hacer dos cosas:

1. darnos cuenta de que S es el grafo de la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \log x^2 + y^2$,
2. o definir $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - e^z$, ver que $F^{-1}(0) = S$, $F^{-1}(0) \neq \emptyset$ porque $F(1,0,0) = 0$, y

$$DF_p = \begin{bmatrix} 2x & 2y & e^z \end{bmatrix}, \quad \text{que tiene rango 1 en cualquier punto porque } e^z \neq 0$$

Para la segunda parte definimos $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ como $G(x, y, z) = (-x, -y, z)$. Es diferenciable en $\mathbb{R}^3$, y $G(S) \subset S$. Además $G\Big|_S = F$, por lo que de clase sabemos que F es a su vez diferenciable.

---

4. Para ver si una aplicación es diferenciable tenemos que escribir la expresión local de F en unas cartas adecuadas. Sea $p \in M$, (U, ψ) una carta de M en p, y en $F(p) \in \mathbb{R}_2$ tomamos la carta que define la estructura diferencial de $\mathbb{R}_2$, $(\mathbb{R}, \phi(t) = t^3)$. La expresión local de F en estas cartas es

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "F"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\phi"] \\ \psi(U) \arrow[u, "\psi^{-1}"] \arrow[r, "\bar{F}"] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \psi^{-1}(x_1, \dots, x_n) \arrow[r, "F"] & (f \circ \psi^{-1}(x_1, \dots, x_n))^{1/3} \arrow[d, "\phi"] \\ (x_1, \dots, x_n) \arrow[u, "\psi^{-1}"] \arrow[r, "\bar{F}"] & f \circ \psi^{-1}(x_1, \dots, x_n)) \end{tikzcd}$$

que es diferenciable en $(x_1, \dots, x_n)$ porque f era diferenciable en M (y por lo tanto su expresión local en (U, ψ), $f \circ \psi^{-1}$, es diferenciable en $\psi(U)$)