1. Conteste a los siguientes apartados:

- Si g es la métrica euclídea en $\mathbb{R}^3$, e $i : S^2 \to \mathbb{R}^3$ es la inclusión, escriba la métrica i^*g en la carta de S^2 cuya parametrización correspondiente es

$$\xi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to S^2, \quad \xi(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v).$$

- Repita lo anterior si ahora la métrica escogida en $\mathbb{R}^3$ es $g = e^x\, dx^2 + (z^2 + 1)\, dy^2 + dz^2$ y la carta es $(U, \phi(x, y, z) = (x, y)$, donde $U = \{\, (x, y, z) \,:\, z > 0\}$.

---

2. Consideremos el disco unidad abierto con la estructura de subvariedad de $\mathbb{R}^2$ (la identidad es la única carta en ambos casos). Se llama *disco hiperbólico* (o *disco de Poincaré*) a la variedad Riemanniana

$$\mathbb{D} = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \;:\; u^2 + v^2 < 1\right\}, \qquad g_{\mathbb{D}} = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2}\left((du)^2 + (dv)^2\right)$$

1. Si $\mathbb{H}$ es el plano hiperbólico, demuestra que la aplicación

$$f : \mathbb{H} \to \mathbb{D}, \quad f(x, y) = \left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (1 + y)^2}, \frac{-2y}{x^2 + (1 + y)^2}\right)$$

   es una isometría. (Para ver que es un difeomorfismo puede ser útil recordar, de los cursos de variable compleja, cómo actúa la transformación de Möbius $z \to \frac{z-i}{z+i}$).

2. Sea $\gamma : t \mapsto \gamma(t) = (e^t, t^2)$, $t \in (1, 5)$ una curva en $\mathbb{H}$. Calcula la norma de $\gamma'(2)$.

3. Si $\gamma_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$ y $\gamma_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$ son dos caminos suaves en $\mathbb{H}$ tales que $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = p$, demuestra que el ángulo que forman γ_1 y γ_2 en p es el mismo si se mide con la métrica Euclídea o si se mide con la métrica hiperbólica.

4. Calcula la longitud de un segmento vertical arbitrario en $\mathbb{H}$.

5. Si $f(x, y) = \log y$, calcula el campo de vectores $\nabla^g f$ gradiente de f respecto de la métrica $g_{\mathbb{H}}$. Determina si $|\nabla^g f|$ es acotado.

---

3. Conteste a los siguientes apartados:

1. Demuestre, usando coordenadas, que, con la métrica que recibe S^2 de $\mathbb{R}^3$, la aplicación antipodal $f : S^2 \to S^2$ es una isometría.

2. Use la definición de isometría para demostrar la siguiente generalización de lo anterior:

   Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad con la métrica i^*g, donde g es la métrica euclídea de $\mathbb{R}^n$ e $i : S \to \mathbb{R}^n$ es la inclusión. Supongamos que $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una isometría con $F(S) \subset S$. Entonces la restricción $G : S \to S$ (i.e, $G(p) = F(p)$, $p \in S$) es una isometría de S.

---

4. Sea S el subconjunto de $\mathbb{R}^4$ definido como

$$S = \{\, (x, y, z, t) \,:\, xy = zt = 1\,\}$$

con la métrica heredada de $\mathbb{R}^4$.

- Escriba la expresión local de la métrica en la parametrización de S definida por $\xi(u,v) = (u, 1/u, v, 1/v)$.
- Halle la curvatura Gaussiana de S.
- Si $f : S \to \mathbb{R}$ es la función $f(x,y,z,t) = xz$, escriba el gradiente $\nabla^g f$ en términos de la base coordenada asociada a la parametrización.
- Decida si la aplicación $F : S \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y,z,t) = (x,z)$ es una isometría.

---

5. Métrica en $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

1. Usando la acción de $\mathbb{Z}_2$ en S^2, ponga una métrica en $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = S^2/\mathbb{Z}_2$ para la cual la proyección $\pi : S^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sea una isometría local.
2. Calcule la longitud de la imagen del ecuador de $\mathbb{S}^2$ mediante π.

---

6. Campos de Killing: Sea (M,g) es una variedad Riemanniana; un campo de vectores X se llama de Killing si su flujo $\theta : \mathbb{R} \times M \to M$ cumple que $\theta_t : M \to M$ es una isometría para todo $t \in \mathbb{R}$.

1. Calcule el flujo del campo $-y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$ en $\mathbb{R}^2$, y deduce que es de Killing para la métrica euclídea $(dx)^2 + (dy)^2$.
2. Compruebe que para cualesquiera constantes $a, b \in \mathbb{R}$, los *movimientos helicoidales* de $\mathbb{R}^3$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \cos at & -\sin at & 0 \\ \sin at & \cos at & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ bt \end{bmatrix}$$
son isometrías de $\mathbb{R}^3$ con la métrica Euclídea.
3. Deduzca de lo anterior que los campos de vectores $-ay\dfrac{\partial}{\partial x} + ax\dfrac{\partial}{\partial y} + b\dfrac{\partial}{\partial z}$ son de Killing.

---

7. Conteste a los siguientes apartados:

- Calcule el flujo del campo $x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$ en el espacio hiperbólico, y deduzca que es de Killing.
- Calcule el flujo del campo $-y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$ en el disco de Poincaré, y deduzca que es de Killing.