

1. Sea $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ es el plano proyectivo con la estructura diferencial estudiada en clase.

- Si $\alpha : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ es la curva cuyo punto $\alpha(t)$ corresponde a la recta $\ell(t)$ de ecuaciones

$$\ell(t) = \begin{cases} (\cos t)x + (\sin t)y = 0, \\ y + z = 0 \end{cases}$$

demuestre que α es una curva diferenciable, y halle sus funciones coordenadas en la carta (U, ϕ) de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ definida como

$$U = \{[x, y, z] : z \neq 0\}, \quad \phi[x, y, z] = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right).$$

- Sea $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida como $f([x, y, z]) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Halle $\alpha'(0)(f)$.
- Escriba $\alpha'(0)$ en la base de vectores coordenados correspondiente a (U, ϕ) .

2. Sea M el conjunto de todas las circunferencias del plano \mathbb{R}^2 . Demuestre que M admite una estructura de variedad de dimensión 3 con un atlas de una sola carta. Para la estructura diferencial encontrada, conteste a las siguientes preguntas:

- La aplicación $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ que lleva una circunferencia a su centro es diferenciable.
- Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ la función que asigna a una circunferencia C el valor del área del círculo con frontera C . Decida si f es una función diferenciable.
- Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$ la curva donde $\alpha(t)$ es la circunferencia con centro (t, t^2) y radio t . Halle $\alpha'(t_0)(f)$.
- Si C_0 es la circunferencia unidad centrada en el origen, escriba la matriz de $d\pi_{C_0}$ en las bases de vectores coordenados de la carta global de M y la carta usual en \mathbb{R}^2 .

3. Sea S el hiperboloide de \mathbb{R}^3 de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

- Demuestre que $\xi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow S$ dada por $\xi(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, \sinh v)$ es una parametrización de la estructura diferencial de S .
- Haga lo mismo para $\chi : \{(\bar{u}, \bar{v}) : \bar{u}^2 + \bar{v}^2 > 1\} \rightarrow S$, $\chi(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v}, \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 - 1})$.
- Si $p = (0, \sqrt{2}, 1)$, halle la matriz de cambio de base de $\left\{ \frac{\partial}{\partial u} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial v} \Big|_p \right\}$ a $\left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial \bar{v}} \Big|_p \right\}$.

4. Sea $\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ una aplicación diferenciable. Supongamos que $\theta(0, p) = p$ para todo $p \in M$. Demuestre que

- para cada $p \in M$ la curva $c_p : \mathbb{R} \rightarrow M$ definida como $c_p(t) = \theta(t, p)$ es una curva suave;
- para cada $p \in M$, denotamos por X_p al vector $c'_p(0)$. Demuestre que X es un campo de vectores diferenciable en M .

5. Identificamos las matrices 2×2 con entradas reales con \mathbb{R}^4 (esto les da una estructura diferencial a partir de la estructura diferencial usual de \mathbb{R}^4). Sea M el subconjunto formado por aquellas matrices de rango 1.

1. Demuestre que M es una subvariedad de \mathbb{R}^4 de dimensión 3.

2. Si $C(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, definimos la aplicación

$$\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M, \quad \theta(t, A) = C(t) \cdot A$$

Compruebe que, efectivamente, $\theta(t, A) \in M$, y que θ es una aplicación suave. Por el problema 4, θ induce un campo de vectores X en M . Halle la función $X(f)$, donde $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es la función que asigna a cada matriz A su traza.

6. Sea S el subconjunto de \mathbb{R}^4 definido como

$$S = \{ (x, y, z, t) : xy = zt = 1 \}$$

■ Demuestre que S es una subvariedad de \mathbb{R}^4 ;

■ Si Z es el campo de vectores de \mathbb{R}^4 dado por

$$Z = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} - t \frac{\partial}{\partial t}$$

demuestre que el campo $X = Z|_S$ es un campo de vectores suave en S .

■ Si $\xi : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow S$ es la parametrización $\xi(u, v) = (u, \frac{1}{u}, v, \frac{1}{v})$, halle la expresión local de X con respecto a los vectores coordenados $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$.

■ Decida en qué puntos $p \in S$, la aplicación $F : S \rightarrow S$ definida como $F(x, y, z, t) = (x^2, y^2, z^2, t^2)$ es un difeomorfismo local.