---

1. Es una acción: denotando por $\{1, -1\}$ los elementos de $\mathbb{Z}_2$, donde la operación está dada por el producto, se tiene

$$\Theta(1,p) = 1 \cdot p = p \tag{1}$$

$$\Theta(a,\Theta(b,p)) = \Theta(a, b\cdot p) = a\cdot(b\cdot p) = ab\cdot p = \Theta(ab,p) \tag{2}$$

---

2. El cociente $\widetilde{M}$ es una variedad si la acción satisface las hipótesis del teorema visto en clase (ver libro, páginas 47 y 92). Las comprobamos una a una:

1. Para cada $a \in \mathbb{Z}_2$ $\Theta_a : S^2 \to S^2$ es diferenciable: esto se puede ver bien escribiendo la expresión local de Θ_a en un par de cartas, bien usando lo visto en clase para subvariedades: S^2 es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$, $\Theta_a(S^2) \subseteq S^2$ y la aplicación $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $p \to a \cdot p$ es diferenciable, con lo que $\Theta_a : S^2 \to S^2$ también.

2. Si $p \in S^2$, tenemos que encontrar un entorno U de p en S^2 tal que U y $(-1)\cdot U = -U$ son disjuntos. Hay muchas posibilidades para tal U: la única restricción es que U debe ser abierto y no contener ningún par de puntos antipodales entre sí. Por ejemplo, un hemisferio abierto conteniendo p funcionará. Más precisamente, si para tal U tuvieramos $q \in U \cap (-U)$, entonces $-q \in U$, ya que $q \in -U$. Por lo tanto $q, -q \in U$, lo que es una contradicción con la elección de U.

3. Si $p, q \in S^2$ con $q \neq p, -p$, entonces hay que encontrar entornos abiertos U de p, V de q, tal que $U \cap V = U \cap (-V) = \emptyset$; podríamos continuar razonando geométricamente, pero el siguiente argumento es útil cuando el grupo de la acción es *finito*:

   - empezamos tomando entornos U_1 de p, V_1 de q, V_2 de $-q$ con $U_1 \cap V_1 = U_1 \cap V_2 = \emptyset$; esto se puede hacer porque S^2 es Hausdorff, y los puntos p, q, (o p, $-q$) se pueden separar por abiertos.
   - como $-q \in V_2$, $q \in (-V_2)$, y por lo tanto $q \in V_1 \cap (-V_2) \neq \emptyset$;
   - tomamos $U = U_1$, $V = V_1 \cap (-V_2)$; está claro que $U \cap V \subseteq U \cap V_1 = \emptyset$;
   - finalmente observad que $U \cap (-V) \subseteq U \cap V_2 = \emptyset$.

   Sería bastante útil que pensarais como habría que modificar la construcción de V en este último apartado para un grupo G con más de dos elementos.

---

3. Recordando lo visto en clase, si U es un entorno de p tal que $U \cap gU = \emptyset$ para todo $g \neq e$, entonces $\pi : U \to \widetilde{U} = \pi(U)$ es un difeomorfismo local. Por lo tanto, si U era un entorno coordenado con aplicación coordenada ϕ, entonces $\widetilde{U}$ es un entorno coordenado para $\widetilde{M}$ con aplicación coordenada $\widetilde{\phi} = \phi \circ (\pi|_U)^{-1}$. En nuestro caso el punto $p = [\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$, y por lo tanto $U = S^2 \cap \{z > 0\}$, $\phi(x, y, z) = (x, y)$ valen. Nuestra carta en $\widetilde{M}$ es entonces $\widetilde{U} = \pi(U)$, $\widetilde{\phi} = \phi \circ (\pi|_U)^{-1}$. Como $(\pi|_U)^{-1}[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}] = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, tenemos que las coordenadas de p en esta carta son $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Es útil que penseis un momento cómo esto cambiaría si hubiera tomado otra elección para U. Por ejemplo, si U hubiese sido $S^2 \cap \{z < 0\}$, entonces $(\pi|_U)^{-1}[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}] = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, ya que hay que escoger el elemento en la clase de equivalencia $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ con $z < 0$.

---

4. Primero hay que comprobar que F está bien definida. Dado que un cálculo simple muestra que $F[x, y, z] \in S^2$, hay que comprobar que para cada elemento $g \in \mathbb{Z}_2$, $F(g \cdot p) = F(p)$. En este caso, sólo tenemos que ver que la expresión que define $F[x, y, z]$ es la misma si se sustituye x, y, z por $-x, -y, -z$, lo cual es obvio ya que en la fórmula de F sólo aparecen potencias pares de loas coordenadas x, y, z.

Finalmente, $F : \widetilde{M} \to S^2$ será suave si y sólamente si $\widetilde{F} = \pi \circ F : S^2 \to S^2$ lo es. Pero

$$\widetilde{F}(x, y, z) = \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^4 + y^4 + z^4}}, \frac{y^2}{\sqrt{x^4 + y^4 + z^4}}, \frac{z^2}{\sqrt{x^4 + y^4 + z^4}} \right)$$

y para ésta podemos una vez más o bien demostrar la diferenciablidad con la ayuda de cartas y expresiones locales, o bien usar que S^2 es subvariedad de $\mathbb{R}^3 - (0, 0, 0)$, $\widetilde{F}(S^2) \subseteq S^2$, y $\widetilde{F} : \mathbb{R}^3 - (0, 0, 0) \to \mathbb{R}^3 - (0, 0, 0)$ es diferenciable. Observad que $\widetilde{F}$ no se puede definir en $(0, 0, 0)$.