

Instrucciones: Tome las dos últimas cifras de su DNI o pasaporte y divídalas entre 4; el resto es el número del problema que deberá resolver. Redacte la solución tan claramente como le sea posible, y entréguela al inicio de la clase del día **10 de Diciembre**. Todo el trabajo debe realizarse de forma absolutamente individual.

1. Si M es el abierto de la variedad de rectas en el espacio afín definido como

$$M = \{ \ell, \text{ rectas en el plano afín de ecuación } Ax + By + C = 0 : \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} > 1 \},$$

y si $F : M \rightarrow S^1 \times (1, \infty)$ es la aplicación definida como

$$F(\ell) = \left(\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right), \text{dist}(\ell, 0) \right)$$

donde $\text{dist}(\ell, 0)$ es la distancia euclídea de la recta ℓ al origen de coordenadas,

- decida si F es diferenciable;
- decida si F es un difeomorfismo.

2. Sea C la variedad cuyos puntos son los planos en \mathbb{R}^3 que pasan por el origen, salvo por el plano $z = 0$, y D la variedad cuyos puntos son las rectas en \mathbb{R}^3 que pasan por el origen, salvo por el eje $0Z$. Ambas variedades tienen la estructura diferenciable indicada en la primera hoja de problemas. Si $F : C \rightarrow D$ es la aplicación que manda cada plano π a la recta normal al plano pasando por el origen, ¿es F diferenciable? ¿es F un difeomorfismo?

3. Sea M la esfera S^2 salvo por los polos norte y sur, y N la variedad de rectas en \mathbb{R}^3 que pasan por el origen, salvo por el eje $0Z$. N tiene la estructura de variedad diferencial inducida por el atlas construido en la primera hoja de problemas. Sea $F : M \rightarrow N$ la aplicación que lleva cada punto $v \in M$ a la recta por el origen generada por el vector v . Decida si F es diferenciable. Decida si F es un difeomorfismo local. ¿Puede ser un difeomorfismo?

4. Sea M la variedad de rectas en el plano afín, con la estructura diferenciable introducida en clase. Se define la aplicación $F : M \rightarrow M$ que manda cada recta ℓ a la recta imagen de ℓ mediante una simetría con respecto al eje $0X$. Demuestre que F es diferenciable, y decida si F es un difeomorfismo.