Geometría III, Problemas 3

Primer semestre, 2007/08.

Instrucciones: Tome las dos últimas cifras de su DNI o pasaporte y divídalas entre 4; el resto es el número del problema que deberá resolver. Redacte la solución tan claramente como le sea posible, y entréguela al inicio de la clase del día **22 de Noviembre**. Todo el trabajo debe realizarse de forma absolutamente individual.

Para cada problema debe contestar las mismas dos preguntas:

(a) Demuestre que (U, ϕ), (V, ψ) son un atlas diferencial de C. (Por favor, tenga cuidado con el cambio de coordenadas; ¿cuántas componentes conexas tiene $U \cap V$? ¿es la fórmula del cambio igual en ambas componentes?).

(b) Si $f : C \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$, escriba la expresión local de f en la carta (U, ϕ). Decida si f es diferenciable en los puntos de U.

---

1. Sea C el cilindro en $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Construimos dos cartas de C, (U, ϕ), (V, ψ) asociadas a las parametrizaciones $\phi^{-1} : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to C$, $\phi^{-1}(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, y $\psi^{-1} : (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \to C$, $\psi^{-1}(\bar{u}, \bar{v}) = (\cos \bar{u}, \sin \bar{u}, \bar{v})$.

---

2. Sea C el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ definido como

$$C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \in (-1, 1) \}$$

C es, en otras palabras, la esfera S^2 menos los polos norte y sur. Construimos dos cartas de C, (U, ϕ), (V, ψ) asociadas a las parametrizaciones $\phi^{-1} : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to C$, $\phi^{-1}(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$, y $\psi^{-1} : (-\pi, \pi) \times (0, \pi) \to C$, $\psi^{-1}(\bar{u}, \bar{v}) = (\cos \bar{u} \sin \bar{v}, \sin \bar{u} \sin \bar{v}, \cos \bar{v})$.

---

3. Sea C el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ definido como

$$C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z > 0, x^2 + y^2 - z^2 = 0 \}$$

C es la parte del cono recto con eje vertical que queda por encima del plano XY; no contiene al origen. Construimos dos cartas de C, (U, ϕ), (V, ψ) asociadas a las parametrizaciones $\phi^{-1} : (0, 2\pi) \times (0, \infty) \to C$, $\phi^{-1}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v)$, y $\psi^{-1} : (-\pi, \pi) \times (0, \infty) \to C$, $\psi^{-1}(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v} \cos \bar{u}, \bar{v} \sin \bar{u}, \bar{v})$.

---

4. Sea C el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ definido como

$$C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 - z^2 = 1 \}$$

C es un hiperboloide de una hoja. Construimos dos cartas de C, (U, ϕ), (V, ψ) asociadas a las parametrizaciones $\phi^{-1} : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to C$, $\phi^{-1}(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, \sinh v)$, $\psi^{-1} : (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \to C$, $\psi^{-1}(\bar{u}, \bar{v}) = (\cosh \bar{v} \cos \bar{u}, \cosh \bar{v} \sin \bar{u}, \sinh \bar{v})$.