
Instrucciones: Tome las dos últimas cifras de su DNI o pasaporte y divídalas entre 4; el resto es el número del problema que deberá resolver. Redacte la solución tan claramente como le sea posible, y entréguela al inicio de la clase del día **25 de Octubre**. Todo el trabajo debe realizarse de forma absolutamente individual.

En los problemas siguientes, X es un conjunto, $U, V \subset X$ son subconjuntos, $\phi : U \to \mathbb{R}^2$, $\psi : V \to \mathbb{R}^2$ son aplicaciones. En todos los problemas se pide demostrar que X es una variedad topológica mediante los siguientes pasos:

1. Compruebe que $X = U \cup V$.
2. Compruebe que $\phi(U)$, $\psi(V)$ son subconuntos abiertos de $\mathbb{R}^2$.
3. Compruebe que $\phi : U \to \phi(U)$, $\psi : V \to \psi(V)$ son biyectivas.
4. Calcule el dominio e imagen de la aplicación $\psi \circ \phi^{-1}$.
5. Demuestre que $\psi \circ \phi^{-1}$ es un homeomorfismo comprobando la continuidad de $\psi \circ \phi^{-1}$ y de $\phi \circ \psi^{-1}$.

---

1. X es el conjunto de rectas en $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen, salvo por la recta de ecuaciones $x = y = 0$ (el eje de las z's).

- U son aquellas rectas ℓ con ecuación de la forma $Ax + y = 0; Bx + z = 0,\ A, B \in \mathbb{R}$.
- V son las rectas ℓ con ecuación de la forma $x + \alpha y = 0, \beta y + z = 0,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $\phi(\ell) = (A, B); \quad \psi(\ell) = (\alpha, \beta)$

---

2. X es el conjunto de las funciones $f(x, y) = \frac{ay}{bx+c}$, donde $a > 0$, $b^2 + c^2 \neq 0$.

- U es el subconjunto de funciones donde $b \neq 0$.
- V el de funciones donde $c \neq 0$.
- ϕ, ψ están definidas como $\phi(f(x, y)) = \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{b}\right)$, $\qquad \psi(f(x, y)) = \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$

---

3. Sea X el conjunto de polinomios $p(x)$ con coeficientes reales, de grado menor o igual que dos y tal que $p(1) = 1$.

- U son los polinomios $p(x) = Ax^2 + Bx + C$ en X con $A > -1$.
- V son aquellos con $A < 1$.
- $\phi(p(x)) = (A, B)$, $\psi(p(x)) = (B, C)$.

---

4. X es el conjunto de planos en $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen, salvo por el plano xy, esto es, $z = 0$.

- U son los planos de ecuación $Ax + By + Cz = 0$, $A \neq 0$.
- V son los planos de ecuación $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ con $\beta \neq 0$.
- ϕ, ψ están definidas como

$$\phi(Ax + By + Cz = 0) = \left(\frac{B}{A}, \frac{C}{A}\right), \qquad \psi(\alpha x + \beta y + \gamma z = 0) = \left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\beta}\right)$$
