Universidad Autónoma de Madrid **Segundo cuatrimestre 2006–07**
GEOMETRÍA III

Hojas 2 y3 de problemas: Atlas y aplicaciones diferenciales

Instrucciones: Haz el ejercicio numerado con tu DNI módulo 3. El ejercicio consta de dos partes: una corresponde a un problema de atlas y cambio de coordenadas, el otro a un problema de diferenciabilidad de aplicaciones. Ambos problemas se calificarán independientemente. Fecha de entrega: 13 de Abril del 2007

1) (El espacio de cuadrados). Sea X el conjunto cuyos elementos son los cuadrados de lado unidad en el plano (los lados, no necesariamente paralelos a los ejes). Escribimos:

$Q(x, y) =$ el cuadrado de lado 1, centro (x, y) y lados paralelos a los ejes,

$Q(x, y, \theta) =$ el resultado de dar a $Q(x, y)$ un giro de θ radianes alrededor de (x, y).

Definimos asimismo $\Phi : A = \mathbb{R}^2 \times (0, \frac{\pi}{2}) \to X$ y $\Psi : B = \mathbb{R}^2 \times (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \to X$ como las correspondientes restricciones de la aplicación $(x, y, \theta) \mapsto Q(x, y, \theta)$.

- Demuestra que X tiene un atlas tridimensional suavemente compatible cuyas parametrizaciones asociadas son $\Phi : A \to \Phi(A) = U$ y $\Psi : B \to \Psi(B) = V$.
- Sea $f : X \to \mathbb{R}$ la función cuyo efecto sobre cada cuadrado Q es $f(Q) = \text{área}\,(Q \cap \mathbb{R}^2_+)$. ¿Es f continua? ¿Es suave?

2) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \exp z$. Definimos una relación de equivalencia en $\mathbb{C}$ como $z_1 \sim z_2$ si y sólo si $f(z_1) = f(z_2)$, y formamos el espacio cociente $X = \mathbb{C}/\sim$. Tomamos los abiertos de $\mathbb{C}$ definidos como $\tilde{U} = \{\, z \in \mathbb{C} \ : \ \text{Im} z \in (0, 2\pi) \,\}$, $\tilde{V} = \{\, z \in \mathbb{C} \ : \ \text{Im} z \in (-\pi, \pi) \,\}$. Si $\Pi : \mathbb{C} \to X$ es la proyección, denotamos por $U = \Pi(\tilde{U})$ y $V = \Pi(\tilde{V})$ sus imágenes en X.

- Demuestre que la aplicación $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\Phi(z) = (\text{Re} z, \text{Im} z)$ induce aplicaciones $\phi : U \to \mathbb{R}^2$, $\psi : V \to \mathbb{R}^2$. Demuestre que (U, ϕ),(V, ψ) forman un atlas suave de X.
- Sea C el cilindro $(0, \infty) \times S^1$, donde identificamos los puntos de S^1 como números complejos de módulo unidad. Demuestre que la aplicación $F : C \to X$ definida como $F(t, e^{i\theta}) = \Pi(\log t + i\theta)$ es un difeomorfismo.

3) Sea X el conjunto cuyos elementos son los subespacios vectoriales de dimensión 2 de $\mathbb{R}^3$ (esto es, los puntos de X son los planos pasando por el origen). En X consideramos los siguientes tres subconjuntos:

$$U_1 = \{\sigma \in X \ : \ \sigma \text{ tiene una base de la forma } (1, 0, a), (0, 1, b)\,\} \tag{1}$$
$$U_2 = \{\sigma \in X \ : \ \sigma \text{ tiene una base de la forma } (1, a, 0), (0, b, 1)\,\} \tag{2}$$
$$U_3 = \{\sigma \in X \ : \ \sigma \text{ tiene una base de la forma } (a, 1, 0), (b, 0, 1)\,\} \tag{3}$$

y en cada uno de ellos definimos la aplicación $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^2$ como $\phi_i(\sigma) = (a, b)$.

- Demuestre que $\{(U_i, \phi_i)\}$ es un atlas suave en X.
- En X definimos la aplicación $F : X \to \mathbb{RP}^2$ que manda cada σ a la recta normal a σ pasando por el origen. Demuestre que F es diferenciable cuando se considera la estructura diferencial usual en $\mathbb{RP}^2$. Decida si es un difeomorfismo.