Hoja 5

Derivadas de orden superior. Polinomios de Taylor. Máximos y mínimos

1.- Definamos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} y\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcular, cuando existan, las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

2.- Sea

$$f(x,y) = x\,y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad \text{si} \qquad (x,y) \neq (0,0), \qquad\qquad f(0,0) = 0\,.$$

Comprobar que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$. ¿Qué se puede decir acerca de la continuidad de las derivadas de orden segundo $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en el origen?

3.- El cambio de variable $x = u + v$, $y = u\,v^2$ transforma $f(x,y)$ en $g(u,v)$. Calcular el valor de $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$ en el punto en el que $u = 1$, $v = 1$, sabiendo que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

en dicho punto.

4.- Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $(0,0)$ de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = x\,e^{x+y}$. (b) $f(x,y) = \operatorname{sen} x\,y + \cos x\,y$. (c) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$.

5.- Hallar los posibles puntos de máximo, mínimo y de silla de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = (x+y)^2$. (b) $f(x,y) = x\,y\,e^{x-y}$.

(c) $f(x,y) = \log\,(2 + \operatorname{sen} x\,y)$. (d) $f(x,y) = x\log(x^2+y^2)$.

6.- Comprobar que la función $f(x,y) = e^x\,\cos y$ no tiene puntos críticos en $\mathbb{R}^2$.

7.- Hallar los puntos críticos y determinar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos silla:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2\,x\,y$. (b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + x\,y - 2\,x - 4\,y + 10$.

(c) $f(x,y) = x\,y$. (d) $f(x,y) = 3\,x^2 - 4\,y^2 + x\,y$.

(e) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$. (f) $f(x,y) = 3 - x^2 - y^2 - x^4y^2$.

(g) $f(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$. (h) $f(x,y) = e^{xy} + x^2$.

8.- Comprobar que la función $f(x,y) = x^2y^2$ tiene un mínimo absoluto en todos los puntos de los ejes x e y pero que, sin embargo, el criterio de la matriz Hessiana para los extremos locales no nos proporciona ninguna información en este caso.

9.- Considérese el polinomio $f(x,y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$ y la función $g(t) = f(t, c\,t)$ de $t \in \mathbb{R}$. Demuéstrese que $(0,0)$ es un punto crítico degenerado para f y que aunque g tiene un mínimo en $t = 0$, el punto $(0,0)$ no es un mínimo local de f.

10.- Demostrar que las medias aritmética y geométrica de tres números no negativos x, y y z satisfacen la desigualdad

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{x\,y\,z}$$

y que la igualdad se cumple si y sólo si $x = y = z$.

11.- Escribir un número dado $a > 0$ como producto de cuatro factores positivos, cuya suma sea mínima.

12.- Calcular la distancia mínima entre los puntos de la gráfica de $f(x,y) = \dfrac{1}{4\,x\,y}$ y el punto $(0,0,0)$.

13.- Encontrar los valores máximo y mínimo (absolutos) de $f(x,y) = x^3 + 3\,xy$, en la región

$$\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \leq y\big\}.$$

14.- Hallar los extremos de las siguientes funciones con las correspondientes restricciones:

$$\text{(a) } f(x,y) = x^2 + y^2,\ 2\,x^2 + y^2 \leq 4\,, \qquad \text{(b) } f(x,y) = x^2 - 3\,x\,y + y^2,\ x^2 + y^2 \leq 2\,.$$

15.- Queremos construir una caja de carton con volumen fijo V_0. Hallar las dimensiones que minimizan la cantidad de cartón utilizada. ¿Que tipo de caja obtenemos?

16.- Hallar las dimensiones de una caja de cartón que tenga superficie fija S_0 y que tenga volumen máximo.

17.- Se quiere construir una lata metálica con forma cilíndrica con una capacidad de 1 litro. ¿Cuales son las dimensiones que minimizan la cantidad de metal empleada?

18.- Se quiere construir una lata metálica con forma cilíndrica, sin la tapa superior y con una capacidad de 1 litro. ¿Cuales son las dimensiones que minimizan la cantidad de metal empleada?

19.- Se dispone de 12 decímetros cuadrados de metal para fabricar una lata cilíndrica con las dos tapas. ¿Qué dimensiones maximizan el volumen de dicha lata?