La regla de Ruffini dice que dado un polinomio

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

el resultado de dividirlo por el monomio $(x-a)$ tiene resto $p_n(a)$ y cociente $q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$, cuyos coeficientes b_r obedecen las fórmulas

$$\begin{aligned}
b_{n-1} &= a_n \\
b_{n-2} &= a_n a + a_{n-1} \\
\ldots & \\
b_r &= a_n a^{n-1-r} + a_{n-1}a^{n-2-r} + \cdots + a_{r+1} \\
\ldots & \\
b_0 &= a_n a^{n-1} + a_{n-1}a^{n-2} + \cdots + a_1
\end{aligned}$$

Es un poco más sencillo usar el subíndice $s = n - r$ en vez de r, así que en lo anterior tenemos

$$b_{n-s} = a_n a^{s-1} + a_{n-1}a^{s-2} + \cdots + a_{n-s+1}.$$

Observad que estas fórmulas obedecen la relación:

$$\begin{aligned}
b_{n-(s+1)} &= a_n a^s + a_{n-1}a^{s-1} + \cdots + a_{n-s} = \\
&= a \cdot \left(a_n a^{s-1} + a_{n-1}a^{s-2} + \cdots + a_{n-s+1}\right) + a_{n-s} = a \cdot b_{n-s} + a_{n-s}
\end{aligned} \tag{1}$$

Vamos a multiplicar $(x-a)$ por el polinomio $b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$; observad que el término en el producto correspondiente a x^{n-s} cuando $n - s > 0$ se obtiene sumando dos cosas:

- una de $x \cdot b_{n-(s+1)}x^{n-(s+1)}$;
- otra de $-a \cdot b_{n-s}x^{n-s}$.

Este término va a ser $b_{n-(s+1)} - ab_{n-s}$, que coincide con a_{n-s} por (2).

Finalmente cuando $n - s = 0$, lo que obtenemos es el término independiente. Éste proviene sólo de $(-a) \cdot b_0$, y coincide con

$$(-a) \cdot \left(a_n a^{n-1} + a_{n-1}a^{n-2} + \cdots + a_1\right) = -\left(a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_1 a\right) = -p_n(a) + a_0$$

En otras palabras,

$$\begin{aligned}
&(x-a)\left(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0\right) = \\
&\quad = a_n x^n + \cdots + a_1 x + (a_0 - p_n(a)) = p_n(x) - p_n(a)
\end{aligned}$$

que era lo que queríamos demostrar.