ALGEBRA LINEAL I. 1^0 Físicas.

2 Septiembre 2002. Curso 2001-02

1. Comprobar que el conjunto de las matrices cuadradas simétricas de orden 3×3 que conmutan con

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con las operaciones heredadas de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbf{R})$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbf{R})$

2. Dado un polinomio $p(x) \in \mathbf{P^3_R[x]}$, se representa por $p(a)$ el número obtenido sustituyendo x por a en $p(x)$. Se define

$f : \mathbf{P^3_R[x]} \to \mathbf{P^3_R[x]}$ por $f(p(x)) = p(1) + p(2)x + p(3)x^2 + p(4)x^3$

a) Encontrar la matriz de f en la base canónica de $\mathbf{P^3_R}[x]$.

b) Justificar que f es isomorfismo.

3. Sean

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ una aplicación lineal definida por

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x+y+z)u + (y+z)v + zw$$

a) Justificar que u, v, w es una base de $\mathbf{R^3}$.

b) Hallar la matriz de f en la base canónica de $\mathbf{R^3}$.

c) Hallar la matriz de f en la base u, v, w

4. Para cada matriz A_α de la forma

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}$$

donde $\alpha \in \mathbf{R}$ se define una aplicación $f_\alpha : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbf{R})$ por

$f_\alpha(X) = A_\alpha X - XA_\alpha$, donde $X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbf{R})$

a) Demostrar que f_α no es isomorfismo para ningún α.

b) Hallar $\dim \ker f_\alpha$ cualquiera que sea α

c) Averiguar si $\ker f_\alpha + \ \ Im\ f_\alpha = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbf{R})$ cuando $\alpha = -1$