ALGEBRA LINEAL I - PRIMER C. DE FISICAS. Examen Final.

1. Comprobar si son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbf{R})$
a) El conjunto de las matrices simétricas que conmutan con

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) El conjunto de las matrices no invertibles que comutan con

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Sean S_1, y S_2 los subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbf{R})$ dados por

$$S_1 = \left\{ A \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbf{R}) | A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \right\} \quad S_2 = \left\{ B \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbf{R}) | \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{B} = \mathbf{B} \right\}$$

Encontrar dimensiones y bases de $S_1, S_2, S_1 \cap S_2, S_1 + S_2$.

3. Para cada matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbf{R})$ se define una aplicación lineal $f_A : \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_{\mathbf{2}\times\mathbf{2}}(\mathbf{R}$ por $f_A(M) = AM$ donde $M \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbf{R})$.
a) Hallar la matriz de f_A en la base

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbf{R})$ en función de los elementos de A.
b) Hallar el determinante de la matriz anterior en función del determinante de A.

4. Para cada $\lambda \in \mathbf{R}$ se define $f_\lambda : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ por

$$f_\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & -\lambda \\ 2\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

a) Hallar λ para que f no sea isomorfismo.
b) Hallar una base de un subespacio complementario de $\mathrm{Im}(f_\lambda)$ cuando f_λ no es isomorfismo, es decir, un subespacio de $\mathbf{R^3}$ cuya suma directa con $\mathrm{Im}(f_\lambda)$ sea $\mathbf{R^3}$.