Combinación lineal de los vectores $v_1, \ldots, v_k$: un vector v con

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$$

para algunos $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathsf{K}$.

Subespacio generado por $\{v_1, \ldots, v_k\}$:

$$\mathcal{L}\{v_1, \ldots, v_k\} = \{\lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_k v_k \;:\; \lambda_1 \ldots, \lambda_k \in \mathsf{K}\}$$

Sistema generador de un subespacio S, $\{v_1, \ldots, v_k\}$ genera S:

$$S = \mathcal{L}\{v_1, \ldots, v_k\}$$

Dependencia, independencia lineal.

- v depende linealmente de $\{v_1, \ldots, v_k\}$ si existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ con $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$. Equivalente:

$$\mathcal{L}\{v, v_1, \ldots, v_k\} = \mathcal{L}\{v_1, \ldots, v_k\}$$

- $\{v_1, \ldots, v_k\}$ son linealmente dependientes si alguno depende linealmente de los otros. Equivalente: hay $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ NO TODOS CERO con $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0$.

- $\{v_1, \ldots, v_k\}$ son linealmente independientes si no son linealmente dependientes. Equivalente: la única solución de $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0$ es $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.

Base $\mathcal{B}$ de un espacio vectorial: $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V si

- $\{v_1, \ldots, v_n\}$ genera V;
- $\{v_1, \ldots, v_n\}$ son linealmente independientes.

Todas las bases de un espacio vectorial V tienen el mismo número de elementos: $\dim(V)$

La base, sistema de generadores, etc de un subespacio vectorial S se definen de la misma forma con S en vez de V.

En un (sub)espacio vectorial de dimensión n,

- de un sistema generador se puede sacar una base;
- todo conjunto de vectores linealmente independiente se puede completar a una base.

n vectores linealmente independientes en un (sub)espacio vectorial de dimensión n forman una base.

Bases de $\mathbb{R}^n$:

Los vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ en $\mathbb{R}^n$ son base si y sólo si

$$\det \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \ldots & v_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

donde $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{in}), i = 1, \ldots, n$. Como el determinante de una matriz es igual al de la traspuesta, podíamos haber puesto las coordenadas de los vectores en las columnas.

Coordenadas de un vector en una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$:
Si $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$, las COORDENADAS DE v EN $\mathcal{B}$ son $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Si $v = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $w = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $a \in$ K, entonces

- las coordenadas de $v + w$ son $(\lambda_1 + \alpha_1, \ldots, \lambda_n + \alpha_n)$;
- las coordenadas de $a \cdot v$ son $(a\lambda_1, \ldots, a\lambda_n)$.

Las coordenadas (en la base $\mathcal{B}$) de los vectores de la base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ son:

$$v_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)_{\mathcal{B}}, v_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)_{\mathcal{B}}, \ldots, v_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)_{\mathcal{B}}$$

Cambio de base:

$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$; $v \in V$ tiene coordenadas $(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$ en $\mathcal{B}$, y coordenadas $(x'_1, \dots, x'_n)$ en $\mathcal{B}'$.
Si cada vector en $\mathcal{B}'$ tiene coordenadas

$$
\begin{array}{rcl}
e'_1 & = & a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n \\
e'_2 & = & a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n \\
 & \cdots & \\
e'_n & = & a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n
\end{array}
$$

entonces la ecuación que relaciona $(x_1, \dots, x_n)$ y $(x'_1, \dots, x'_n)$ es

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}
$$

Dados $\{v_1, \ldots, v_m\}$, ¿cómo hallamos una base de vectores de $\mathcal{L}\{v_1, \ldots, v_m\}$?

Lo hacemos todo en coordenadas en una base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de V:

- Las coordenadas de cada vector son $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{in})$;
- las ponemos como filas de una matriz

$$A = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix}$$

- escalonamos la matriz; las filas no cero dan las coordenadas en $\mathcal{B}$ de una base de $\mathcal{L}\{v_1, \ldots, v_m\}$.

$$\boxed{\text{Observad que } \operatorname{rango}(A) = \dim(\mathcal{L}\{v_1, \ldots, v_m\})}$$

Dados $\{v_1, \ldots, v_m\}$, ¿cómo *extraemos* una base de $\mathcal{L}\{v_1, \ldots, v_k\}$ de entre los vectores en $\{v_1, \ldots, v_m\}$?

- Volvemos a escribir la matriz

$$A = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \ldots & v_{mn} \end{bmatrix}$$

- calculamos su rango (escalonando o mediante menores no nulos); supongamos que es r;
- las filas de un menor no nulo de ese orden son vectores de una base (son independientes, ya que si no el menor sería cero, y son tantos como la dimensión de $\mathcal{L}\{v_1, \ldots, v_m\}$)

¿Cómo hallo un menor que da el rango de una matriz sin tener que calcular todos ellos?

- Hallo un menor de orden 1 no nulo;
- busco un menor de orden dos que lo contenga y que no se anule;
- sigo ampliando el menor paso a paso intentando que no se anule hasta llegar a uno de tamaño el rango de la matriz..

Dados $\{v_1, \ldots, v_k\}$, ¿cómo hallamos las ecuaciones de $S = \mathcal{L}\{v_1, \ldots, v_k\}$ en una base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$?

- Pongo los vectores en coordenadas: $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{in})$ en $\mathcal{B}$;
- escribo la matriz

$$A = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \ldots & v_{mn} \end{bmatrix}$$

- añado una fila extra a la matriz de la forma $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
- en A busco un menor $r \times r$ que dé su rango; el resto de filas A se pueden ignorar (salvo por la añadida de x's;
- hallo los menores de orden $(r+1) \times (r+1)$ que contengan al anterior y formados con elementos de la fila extra $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y los igualo a 0;
- eso son $n - r$ ecuaciones que dan las ecuaciones de S.

El conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones lineal homogéneo con m ecuaciones y n incógnitas

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

es un espacio vectorial de dimensión $n - \text{rango}(A)$.

Dos subespacios S_1, S_2, son iguales si y sólo si $S_1 \subseteq S_2$ y $\dim(S_1) = \dim(S_2)$.

Si S_1 está dado en ecuaciones por $A_1 x = 0$, y S_2 por $A_2 x = 0$, entonces S_1 y S_2 coinciden si y sólo si $S_1 \subset S_2$ y $\text{rango}(A_1) = \text{rango}(A_2)$.

Si S está descrito en ecuaciones mediante $Ax = 0$, S está tambien descrito por $Bx = 0$, donde B es una matriz obtanida de A quitándole aquellas filas que no cambian el rango de A (i.e, B es algunas de las filas de A con $\text{rango}(B) = \text{rango}(A)$).

Suma de subespacios:
S_1, S_2 subespacios. La suma de S_1 y S_2 es el conjunto

$$S_1 + S_2 = \{v + w \,:\, v \in S_1, w \in S_2\}$$

- $S_1 + S_2$ es un subespacio lineal.

Fórmula de las dimensiones.

$$\boxed{\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2)}$$

Demostración de la fórmula de las dimensiones:

Tomamos una base de $S_1 \cap S_2$ y la completamos a bases de S_1 y S_2 respectivamente:

- $u_1, \ldots, u_k$ son base de $S_1 \cap S_2$, así que $\dim(S_1 \cap S_2) = k$;
- $u_1, \ldots, u_k$, $v_1, \ldots, v_m$ son base de S_1, así que $\dim(S_1) = k + m$;
- $u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_n$ son base de S_2, así que $\dim(S_2) = k + n$.

Como
$\dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2) = (k + m) + (k + n) - k = k + n + m$, basta ver que los vectores $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n$ son base de $S_1 + S_2$.

1. Los vectores $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n$ generan $S_1 + S_2$:
Si $x \in S_1 + S_2$, hay $v \in S_1$, $w \in S_2$ con $x = v + w$. Por lo tanto hay

- $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_n \in$ K con

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$$

- $\alpha'_1, \dots, \alpha'_k, \gamma_1, \dots, \gamma_m \in$ K con

$$w = \alpha'_1 u_1 + \cdots + \alpha'_k u_k + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_n w_n$$

Así que

$$x = v+w = (\alpha_1+\alpha'_1)u_1+\cdots+(\alpha_k+\alpha'_k)u_k+\beta_1 v_1+\cdots+\beta_n v_n+\gamma_1 w_1+\cdots+\gamma_n w_n$$

y x es combinación lineal de los vectores

$$u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n$$

2. Los vectores $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n$ son linealmente independientes:
Si alguna combinación lineal se anula,

$$\sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j + \sum_{r=1}^{m} c_r w_r = 0$$

entonces

$$-\sum_{r=1}^{m} c_r w_r = \sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

y por tanto $\sum_{r=1}^{m} c_r w_r \in S_1 \cap S_2$, así que debe haber $d_1, \ldots, d_k$ tal que

$$\sum_{r=1}^{m} c_r w_r = \sum_{s=1}^{k} d_s u_s$$

ya que los $u's$ eran base de $S_1 \cap S_2$. Pero $u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_n$ eran linealmente independientes, así que todos los coeficientes c_r, d_s son 0.
Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j = 0$$

y la independencia lineal de $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_n$ da $a_i = b_j = 0$.

Suma directa de subespacios.

- Si $S_1 \cap S_2 = 0$, la suma $S_1 + S_2$ se llama *suma directa*, y $S_1 + S_2$ se denota como $\boxed{S_1 \oplus S_2.}$
- *Subespacios complementarios*: S_1 y S_2 son *complementarios* si $S_1 \cap S_2 = 0$, y $S_1 + S_2 = V$.

Consecuencias:

1. Si $S_1 \cap S_2 = 0$, una base de $S_1 \oplus S_2$ se obtiene juntando una base de S_1 con otra de S_2.
2. Si S_1 y S_2 son complementarios, obtendremos una base de todo V por el procedimiento anterior.
3. Si $\{v_1, \ldots, v_k\}$ son una base de S_1, y los completamos a una base de V con vectores $v_{k+1}, \ldots, v_n$, entonces el subespacio $\mathcal{L}\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ es complementario a S_1.
4. Si $S_1 \cap S_2 = 0$, entonces S_1 y S_2 son complementarios si y sólo si $\dim(V) = \dim(S_1) + \dim(S_2)$.
5. Si $S_1 + S_2 = V$, entonces S_1 y S_2 son complementarios si y sólo si $\dim(V) = \dim(S_1) + \dim(S_2)$.