

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE
LA MECÁNICA DE FLUIDOS

POR

JUAN LUIS VÁZQUEZ

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

28049 MADRID, SPAIN

~ 2003 ~

Índice General

Prólogo	ix
Indicaciones de uso	xiii
Lista de símbolos	xvii
1 El medio continuo	1
1.1 Concepto y problema del medio continuo	1
1.2 Consideración física	2
1.3 Descripción matemática del movimiento	4
1.4 Cinemática	6
1.5 Formulación lagrangiana y euleriana	7
1.6 Trayectorias, líneas de corriente y líneas de emisión	9
1.7 Un repaso de cálculo. La derivada material	11
1.8 Coordenadas curvilíneas	13
1.9 Operadores diferenciales	19
LEYES FÍSICAS	25
2 La conservación de la masa	27
2.1 La ley de conservación	27
2.2 Incompresibilidad y homogeneidad	29
2.3 Un resultado de cálculo	30
2.4 Ecuación de continuidad. Versión euleriana	33
2.5 Versiones integrales y teorema del transporte	34
2.6 Ley modificada	37

2.7	El teorema de Gauss	37
2.8	Tubos de flujo	39
2.9	Coordenadas curvilíneas. La divergencia	40
3	Ley Dinámica. Conservación de la cantidad de movimiento	43
3.1	La cantidad de movimiento y el tensor de esfuerzos. Ley de Newton para los fluidos	44
3.2	Primera idea de los sistemas completos	48
3.3	Simetría del tensor de esfuerzos	49
3.4	Ejes no inerciales. Aceleración de Coriolis	50
4	La conservación de la energía. El calor y la temperatura	55
4.1	Variables termodinámicas. Concepto de energía interna	55
4.2	La ley de conservación	57
4.3	Transporte de calor en un medio en reposo	61
4.3.1	Ecuación del calor no lineal (de los medios porosos)	63
4.4	El tensor velocidad de deformación	64
4.5	El laplaciano en coordenadas curvilíneas	65
	CLASIFICACIÓN DE LOS FLUIDOS	69
5	Los fluidos perfectos. El caso incompresible	71
5.1	Medios continuos y fluidos	71
5.2	Problemas matemáticamente bien propuestos	72
5.3	Fluidos perfectos. Ecuación de Euler	73
5.4	Fluidos perfectos incompresibles	74
5.5	Fluidos ideales	76
5.6	Resultados de existencia y unicidad	77
5.7	Descomposición y análisis local de la velocidad. Concepto de vorticidad .	78
5.8	Flujos irrotacionales y potenciales	81
5.9	Fórmulas de Bernoulli	82
5.10	Problemas de frontera libre. Tensión superficial	86
5.11	Algunos ejemplos clásicos	88
5.12	Soluciones particulares y teoría general	91

6	Los fluidos viscosos	95
6.1	Fluidos newtonianos. Ecuación de Navier-Stokes	96
6.2	Idea de la demostración del teorema 6.1.1	98
6.3	Fluidos viscosos incompresibles	99
6.4	Escalas, cálculo adimensional y número de Reynolds	100
6.5	Comportamientos límite. Ecuación de Stokes	103
6.6	Ejemplos clásicos de Couette y de Poiseuille	104
6.7	Flujo de Poiseuille, inestabilidad y turbulencia	107
6.8	Viscosidad y difusión	108
6.9	Problemas con simetría polar. Flujo de Couette	110
6.10	Cálculo de la presión en fluidos incompresibles	113
6.11	Fluidos inmiscibles. Problemas de frontera libre	114
6.12	Primer apunte de la teoría matemática	115
6.13	Variación de la energía	116
6.14	Fluidos no newtonianos	118
7	Los fluidos perfectos compresibles	123
7.1	Fluidos perfectos compresibles	124
7.2	Gases ideales	125
7.3	Concepto de entropía. Funciones de estado	127
7.4	Gases reales	129
7.5	Flujos isentrópicos, isotermos y barotrópicos	130
7.6	Ondas de presión	132
7.7	El P -sistema. Ecuaciones de ondas no lineales	134
7.8	Teorema de Bernoulli para fluidos barotrópicos	135
7.9	Leyes de conservación. Ondas de choque	137
7.10	La ecuación de Burgers	137
7.11	Soluciones de entropía para leyes de conservación	139
7.12	Complementos sobre la termodinámica	140
7.13	El modelo más simple de la cinética de gases	142
8	Los fluidos viscosos compresibles	149
8.1	Sistema de ecuaciones	149
8.2	Fluidos barotrópicos	152

8.3	Gases ideales	153
8.4	La ecuación de Burgers viscosa	153
8.5	Sistemas de la combustión	155
8.6	El flujo convectivo	158
9	Estática de fluidos	163
9.1	Fluidos incompresibles	163
9.2	Fluidos no homogéneos	164
9.3	Principio de Arquímedes	165
9.4	Equilibrio gravitacional de una estrella	165
9.5	Estática de los fluidos viscosos	167
10	Fluidos en medios porosos	169
10.1	Introducción	169
10.2	Ley de Darcy	170
10.3	El experimento de Darcy	171
10.4	Revisión de las magnitudes y ecuaciones básicas	172
10.5	Significado de la permeabilidad	174
10.6	Flujo incompresible en un medio poroso	176
10.7	Filtración en un dique. Problema de frontera libre	176
10.8	Filtraciones en el suelo. Ecuación de Boussinesq	179
10.9	Fluido compresible en un medio poroso	181
10.10	Filtración de dos fluidos inmiscibles. Ecuaciones utilizadas en la extracción de petróleo	183
10.11	Ecuaciones del medio no saturado	186
10.12	Transporte de contaminantes	188
10.13	Sistemas con interacción flujo-energía	188
10.14	Límites de validez de la ley de Darcy	189
	SEGUNDA PARTE	195
11	Elementos de Análisis Funcional	197
11.1	Espacios funcionales	197
11.2	Teorema de Lax-Milgram. Principio variacional	204

11.3	Problema de Dirichlet Homogéneo para la ecuación de Laplace-Poisson . . .	205
11.4	Problema con condiciones de Dirichlet no nulas. El método variacional directo	208
11.5	Resolución del problema de Neumann	211
11.6	Espacios solenoidales	213
11.7	Descomposición de campos vectoriales	215
11.8	La proyección solenoidal	218

FLUIDOS IDEALES **223**

12 Flujos potenciales **225**

12.1	Flujos irrotacionales y potenciales. Circulación	225
12.2	Cálculo del potencial y teorema de equivalencia	227
12.3	Propiedad de mínimo para la energía cinética	229
12.4	Cálculo de la presión en general	230
12.5	Ejemplos clásicos de corrientes potenciales en tres dimensiones	230
12.6	Problemas de frontera libre. Ondas de superficie	235
12.7	Dominios múltiplemente conexos	239
12.8	Potenciales y formas diferenciales	240

13 Flujos potenciales en el plano **243**

13.1	Los métodos de variable compleja	243
13.2	Ejemplos clásicos de flujos potenciales planos	247
13.3	Técnicas especiales	252
13.4	Corrientes que encuentran un obstáculo	255
13.5	Teoría de la sustentación	260
13.6	Situación en 3D. Paradoja de D'Alembert	264

14 La vorticidad **267**

14.1	La vorticidad. Conceptos básicos	267
14.2	Movimientos circulares planos. Vórtices	269
14.3	Conservación de la circulación	273
14.4	Evolución de la vorticidad	276
14.5	Movimientos con ley de velocidad lineal	278

14.6	Transformación de integrales de superficie. Equivalencia de formulaciones .	280
14.7	El sistema de vorticidad-velocidad	281
14.8	Cálculo de la función de corriente en 2D	283
14.9	Cantidades conservadas	284
14.10	Flujos axisimétricos	286
14.11	Vorticidad de fluidos barotrópicos	290
14.12	Teorema del transporte para superficies	291
14.13	Vorticidad y viscosidad	292
ESTUDIO DE DIVERSOS FLUIDOS VISCOSOS		296
15	Teoría matemática de los fluidos viscosos	297
15.1	Existencia de soluciones para el problema de Stokes	297
15.2	Existencia de soluciones para el problema de Navier-Stokes	297
15.3	Aproximación de Lubricación	297
15.4	Problema de Hele-Shaw	297
16	Fluidos con muy pequeña viscosidad. El concepto de capa límite	301
16.1	El problema de la capa límite	302
16.2	El método de 3 etapas. Un ejemplo matemático.	303
16.3	Límite de Navier-Stokes con un obstáculo plano	309
16.4	Capa límite estacionaria. Solución de Blasius.	311
17	Estudio Matemático de las Ecuaciones del Calor	317
17.1	Programa de estudio de la ecuación del calor	317
17.2	Primeras ideas sobre la EMP	319
17.3	Ondas viajeras. Propiedad de propagación finita	320
17.4	Soluciones autosemejantes. Solución fundamental	323
17.5	Concepto de solución generalizada	326
17.6	La frontera libre	327
APENDICES		330
A	Números adimensionales	331

B Resumen de Fórmulas	333
B.1 Identidades vectoriales	333
B.2 Coordenadas curvilíneas	334
B.3 Ecuaciones de Navier-Stokes	338
C Soluciones a ejercicios seleccionados	343
D Reseña histórica	355
Premio Clay	363
Epílogo	364
Bibliografía general	367

Prólogo

El presente texto está basado en los cursos dictados por el autor en la Universidad Autónoma de Madrid desde el año 1995 a estudiantes de Matemáticas, con el objetivo de presentar una introducción al estudio de los fluidos que sea matemáticamente rigurosa y al tiempo refleje los aspectos empíricos que son importantes en la descripción de los fenómenos naturales. Pretende dar al lector una sólida comprensión de los conceptos, técnicas y resultados básicos que le ponga en disposición de comprender las múltiples aplicaciones de la Mecánica de Fluidos en la vida actual y le posibilite realizar estudios más profundos, sean estos de orientación teórica o aplicada. Por otra parte, el estudio le permitirá disfrutar de las matemáticas subyacentes, que tienen una enorme variedad, profundidad y belleza. Como complemento, el texto ofrece una somera visión de la simbiosis histórica de las Matemáticas y esta rama de la Física y sus fecundas consecuencias para ambas ciencias. En resumen, la Mecánica de Fluidos es una ciencia profundamente matemática y es posible y natural presentar su desarrollo conceptual *more geometrico*, como dirían los antiguos, deduciendo racional y rigurosamente las ecuaciones que rigen los procesos naturales a partir de los principios fundamentales, deducción que es obra por cierto de grandes matemáticos.

Los fluidos. El objetivo amplio de la obra es el de describir el comportamiento de las sustancias llamadas *fluidos*, cuyos más claros representantes son el agua y el aire. La primera es el modelo de las sustancias que fluyen de forma incompresible, sin cambiar de volumen, y con ella se clasifican los *líquidos*; el segundo de aquellas que lo hacen de forma compresible, y con él se engloban los *gases*. Nos interesa el estado sólido en cuanto por él transcurren gases y líquidos en los *medios porosos*, como el suelo. Evidentemente, interesan las diversas formas en que aparecen los líquidos y gases como los procesos de *combustión*. Y también el estado de agregación de la materia llamado *plasma*, que consiste en gases ionizados, y se da en forma natural en las estrellas y su entorno. No nos interesa la composición microscópica de estas sustancias sino que pretendemos describir sus formas de movimiento, así como los estados estacionarios, por medio de las variables adecuadas: velocidad, presión, densidad, temperatura,... entre las cuales se establecen las leyes que rigen la estabilidad o el cambio. Estas leyes son matemáticas.

Matemáticas y fluidos. Las Matemáticas juegan un papel fundamental en la Ciencia moderna, cuya otra base fundamental es, recordemos, la observación de la Naturaleza y la experimentación. Fue Galileo GALILEI quien más claramente señaló a principios del siglo XVII ese rumbo para las nascentes ciencias, y a él se debe la famosa cita de su obra “El Ensayador” (1623) que reproducimos por extenso: “*La filosofía está escrita en ese grandísimo libro que tenemos delante de los ojos, es decir, el Universo, pero no se puede*

entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres en que está escrita. Está escrita en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas..."

Cierto que las matemáticas tienen también sus propios intereses y han atravesado momentos de gran ensimismamiento, sin duda necesarios y fructíferos, asentando sus fundamentos. Pero esos momentos hacen que las matemáticas se perciban a veces como ajenas a los problemas de este mundo. Durante los últimos decenios hemos presenciado un retorno de los matemáticos a la consideración de los problemas del mundo natural y se detecta un saludable interés por comprender el papel fundamental que las matemáticas juegan en el desarrollo de las ciencias.

El estudio de los modelos matemáticos de la teoría de los fluidos, que incluye o introduce a los problemas relacionados con un gran número de ciencias, atrae en nuestro país afortunadamente el interés de un número creciente de investigadores. Al mismo tiempo, el desarrollo de los métodos de cálculo ha llevado a una más estrecha colaboración de matemáticos, físicos e ingenieros en el tratamiento de los problemas que las nuevas tecnologías proponen. Es un hecho notable que tales problemas suelen exigir un tratamiento matemático profundo, muy en contra del otrora *extendido prejuicio de que toda la Matemática Aplicada es más o menos trivial*. En realidad, la Mecánica nunca fue nada trivial matemáticamente; por poner un ejemplo histórico, si ARQUÍMEDES fue capaz de calcular la fuerza de sustentación de un fluido en el siglo III a.C., las ecuaciones que rigen el movimiento de los fluidos reales escaparon al genio de NEWTON o EULER y sólo fueron escritas por STOKES a mitad del siglo XIX, tras casi dos siglos de esfuerzos continuados de los mejores científicos, entre los que se cuentan los anteriormente citados y los BERNOULLI, LAGRANGE, CAUCHY, ...

Veamos una lista de importantes áreas de aplicación actual de la teoría matemática de los fluidos: la Aeronáutica y la Aeronáutica Espacial (en sus vertientes de aerodinámica y combustión); la Meteorología y la Climatología; la Glaciología; la Oceanografía; la Geofísica; la Hidrología terrestre o subterránea; la Industria Petrolífera; los procesos industriales a altas temperaturas (altos hornos); la Astrofísica. En otras áreas el interés es reciente pero no menos justificado, como las Ciencias Ambientales y la Ecología: problemas de contaminación y control de recursos y residuos; la Industria Automovilística, pues el móvil avanza contra la resistencia del aire, o la Biomedicina, pues la sangre es un fluido viscoso (se plantea el importante problema de interacción fluido-estructura).

Dado el carácter matemáticamente sofisticado de las aplicaciones es de sumo interés que los estudiantes de las ciencias aplicadas tengan a su alcance deducciones y argumentos matemáticos rigurosos, escritos en el lenguaje matemático actual. Esperamos que el presente texto sea de utilidad tanto para los investigadores matemáticos que buscan una referencia básica para sus cursos avanzados, como para los estudiantes de las ciencias físicas y la ingeniería sensibles al encanto y la potencia de la matemática.

Teoría y experimento, modelos y realidades. No ha de olvidarse que la mecánica

es una ciencia basada en la evidencia experimental y es en ella fundamental contemplar la interacción experimento-teoría, interacción que es la base de la ciencia moderna. La teoría matemática de los fluidos es, como todas las teorías, un modelo idealizado de la realidad y no pretende sustituir a la realidad misma, aunque a veces le llegue muy cerca.

Una parte importante de este texto estriba en presentar un ejemplo excelente del arte de la **modelización** matemática. Hemos pretendido en lo posible ser justos en la valoración del interés de cada método y de las diferencias con la realidad. Hace ya más de 60 años el gran científico Ludwig PRANDTL escribía en el prólogo de su libro *Fundamentals of Hydro- and Aeromechanics* (1934): “*For about thirty years there has been a certain trend to bring together again, as was the case in Euler’s days, the theoretical or mathematical hydrodynamics and the so-called hydraulics which is based almost entirely on experiments...*”

Tal tendencia ha tenido notable éxito en los años transcurridos, para mayor gloria de las matemáticas y de las aplicaciones, y se enfrenta en el momento presente a notables retos, como es la predicción de los fenómenos atmosféricos, por citar un ejemplo que interesa al gran público. La ciencia de los fluidos se basa en principios simples sobre los que se desarrolla un edificio de una enorme complejidad, reflejo sin duda de la complejidad del mundo que describe.

Contenido. Como hemos dicho, la obra presente está basada en la idea de que los actuales desarrollos de la mecánica de fluidos exigen una sólida comprensión matemática, sin preciosismos y sin lagunas. Por ello el autor ha tratado de dar el relieve debido a la cuidadosa derivación de las ecuaciones pertinentes y al correcto planteamiento matemático de los problemas. Por otra parte, se ha realizado una selección del material que se adapte al contenido posible de un curso introductorio, más las naturales extensiones que completan la exposición o preparan a ulteriores lecturas. En su recorrido por la teoría básica de los fluidos, el curso ofrece una progresión gradual a través de una amplia muestra de las ecuaciones clásicas de la física matemática, mostrando al tiempo en qué forma las ecuaciones “reales” difieren de las versiones simplificadas más al uso, y examinando cuál es el contexto en que se aplican. Por último, el autor espera haber sido capaz de mostrar cómo los fluidos nos llevan de un modo natural a descubrir y desarrollar las diversas ramas de las matemáticas, incluidas aquellas usualmente consideradas más puras: ecuaciones diferenciales, análisis clásico y análisis funcional, métodos de variable compleja, sistemas dinámicos, geometría diferencial, topología,... todo ello con sus vertientes numéricas, haciendo verdad el conocido lema de que sólo hay un tipo de matemáticas útiles, las buenas matemáticas.

Literatura. Tratándose de una ciencia de gran importancia práctica, obra de científicos ilustres, existen excelentes textos que desarrollan la mecánica de fluidos con diversas orientaciones y que el lector puede ver reflejados en la bibliografía. A nuestro entender, sin embargo, muchos de los textos más ejemplares siguen una aproximación fenomenológica, sin duda muy efectiva para el ingeniero, pero que priva al estudiante del placer y el

beneficio de la exposición más matemática, que es a nuestro entender muy natural y conveniente y cuyos requisitos son perfectamente compatibles con el nivel de los cursos de matemáticas de nuestras universidades. Es de señalar que los desarrollos matemáticos de los últimos decenios son de un gran interés práctico y es preciso que los nuevos textos los tengan en cuenta y motiven su estudio. En todo caso, nada sustituirá en un estudio profundo de la materia a la lectura de los clásicos, entre los cuales citaremos aparte del libro de PRANDTL ya mencionado, los textos de BATCHELOR (1967) Y LANDAU-LIFSHITZ (1959). Los lectores que busquen el rigor matemático disfrutarán con la lectura de la monografía de SERRIN (1959). El autor desea también expresar su deuda con algunos textos más recientes como el de CHORIN y MARSDEN (1980) y el de ACHESON (1990), cuya lectura complementará aspectos olvidados o menos tratados en el presente texto.

La obra presente tiene objetivos limitados. La mecánica de fluidos es hoy día un campo amplísimo que ofrece múltiples posibilidades de desarrollo matemático, que este texto en su brevedad no aspira a cubrir y para el que existe una amplia literatura, de la que damos una detallada selección al final de la obra y cuya lectura esperamos resulte más accesible gracias a estas lecciones. Los 2 volúmenes de P. L. LIONS (1986/88) constituyen una excelente obra de nivel avanzado en la que el lector puede seguir los recientes progresos de las matemáticas de los fluidos.

Agradecimientos. Para concluir, el autor desea agradecer el apoyo de todos los colegas y estudiantes que le han animado en la realización de este proyecto, que puede parecer extraño aún hoy día en nuestro país en un profesor e investigador matemático, por mucho que tenga su primera formación en la ingeniería. Especial gratitud guardo a mis alumnos de la U.A.M. que me han mostrado con su ejemplo que la licenciatura de matemáticas es un marco adecuado para el acceso al mundo de las aplicaciones. Deseo por último agradecer a D. KNUTH el regalo del TeX, que ha cambiado la vida de tantos autores científicos.

Madrid, mayo de 1997 / enero de 2003

Indicaciones de uso

Contenido. El presente texto contiene una introducción a la teoría matemática de los fluidos con especial atención a la derivación sistemática y rigurosa de los sistemas de ecuaciones que rigen el movimiento de los distintos tipos de fluidos reales.

Como preliminar a este estudio el volumen comienza con la presentación del concepto de medio continuo y la introducción de los conceptos cinemáticos útiles (capítulo 1). El estudio sistemático contiene un primer bloque temático en que se derivan las ecuaciones fundamentales de los medios continuos como leyes de conservación de la masa, la cantidad de movimiento y la energía. Este trabajo ocupa los capítulos 2 a 4 y en ellos se introducen gradualmente los útiles matemáticos necesarios. Hasta aquí la presentación es válida para un medio continuo cualquiera, de forma que se aplica tanto a la mecánica de fluidos como a la elasticidad. Con ello no hacemos sino seguir una tendencia moderna, hoy día bien establecida, de hacer que la presentación resalte los principios generales de la modelización matemática y permita al lector una más fácil adaptación a, o comparación con las teorías de diversas áreas afines que son estudiadas por su interés científico o tecnológico.

Se llega así al objetivo central del volumen, a saber, la clasificación de los distintos tipos de fluidos de mayor interés: se contemplan las dos grandes divisiones, la primera en fluidos perfectos o viscosos, la segunda en fluidos incompresibles o compresibles. Se formulan respectivamente las leyes dinámicas de EULER y NAVIER-STOKES, que son la cumbre de esta teoría. En los capítulos 5 a 8 se cumple el objetivo de presentar y realizar una discusión básica de los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales que se originan, se estudian los ejemplos de flujos más característicos y se aborda el problema de la resolución matemática general.

Ha de tenerse en cuenta que todos los tipos de fluidos así estudiados pueden verse como casos particulares de los fluidos compresibles viscosos, y así lo recoge la formulación matemática en forma de sistema de ecuaciones en derivadas parciales con los datos adicionales oportunos. Ahora bien, dado el estado aún en desarrollo de la teoría de los fluidos compresibles viscosos, que muestra una extraordinaria complejidad, el estudio en detalle de las “simplificaciones” cobra un enorme interés, como se refleja en el libro, que procede de lo más simple a lo más complejo. Nótese también que otras simplificaciones tiene lugar según el texto procede: flujo estacionario, flujo homogéneo, fluido ideal, flujo irrotacional, flujo potencial. En resumen, las “teorías parciales” son de gran interés matemático, pues es un hecho constatado de la matemática del siglo XX que *puede existir gran complejidad y profundidad en lo sencillo si uno sabe mirarlo bien.*

En el capítulo 9 se revisan las ecuaciones correspondientes a la estática de fluidos, que

pueden verse como un caso particular muy simple de la formulación dinámica, pero que tienen gran interés en sí mismas.

En el capítulo 10 se trata de los fluidos viscosos que fluyen a través de los medios porosos, cuyo estudio no entra en el esquema anterior y obedecen a la ley alternativa de DARCY. Estos fluidos se aplican a una amplia clase de problemas de filtración en el subsuelo y a la extracción petrolífera, con sus consecuencias ambientales e industriales. Con ello termina la exposición general de nuestro tema de estudio.

La segunda parte del texto está dedicada a estudios especializados. Cada uno de los cinco tipos principales de fluidos presentados ofrece múltiples posibilidades de desarrollo posterior que constituyen naturalmente el objeto de cursos autónomos, siendo natural que el autor y el lector se orienten por sus intereses personales.

Previamente a estos estudios dedicamos un capítulo a los elementos de Análisis Funcional necesarios para los estudios matemáticos avanzados. Tales nociones funcionales serán desarrolladas en capítulos posteriores.

El primer bloque temático que se aborda este volumen contiene los temas clásicos de los fluidos ideales, desarrollado en 3 capítulos: uno dedicado a los flujos potenciales (cap. 11), otro a los métodos bidimensionales de variable compleja (cap. 12) y un tercero a la teoría de la vorticidad (cap 13).

Un segundo bloque temático desarrolla algunos temas seleccionados de introducción al estudio avanzado de los fluidos viscosos. El capítulo 14 está dedicado a iluminar la transición viscoso-no viscoso mediante la teoría de la capa límite de PRANDTL, una idea matemática de gran originalidad, belleza y profundidad, con la que empezó el siglo XX y que fue motivada por el deseo de comprender el fundamento matemático del vuelo.

Por último dedicamos un capítulo a las ecuaciones del calor lineales y no lineales.

Fuera del marco del presente texto quedan algunos grandes temas de la investigación matemática actual que constituyen una continuación natural del curso: el estudio sistemático de los fluidos viscosos; el estudio de los fluidos compresibles, que incluye el estudio matemático de las ondas de rarefacción y de choque y tienen aplicaciones múltiples: aeronáutica, acústica, etc; múltiples temas más específicos, como la turbulencia y las inestabilidades, los procesos que involucran reacciones químicas, como la combustión, los procesos de cambio de fase y los problemas de frontera libre, la magnetohidrodinámica, los procesos de tipo convectivo, los procesos dispersivos, etc. Modelos fluidos se utilizan con éxito en la modelización de otras ciencias, como sucede en los semiconductores. Estos temas son el objeto de intenso estudio y merecen cursos propios. Por otra parte el curso presente no contiene los desarrollos numéricos que son parte fundamental de todo estudio más avanzado.

Prerrequisitos. El curso ha sido impartido a estudiantes de último año de estudios de licenciatura en matemáticas o primer curso de los estudios de posgrado. Presupone sólo los conocimientos básicos que se suponen adquiridos en los primeros años de los estudios de matemáticas, física o ingeniería. Los prerrequisitos imprescindibles incluyen cálculo

diferencial e integral, y en menor medida álgebra lineal, geometría diferencial y ecuaciones diferenciales. El contenido físico es fundamental para la justa comprensión del curso, pero no es un objetivo en sí mismo y la base necesaria no excede de lo que el estudiante sabe en el nivel de estudios mencionado. En todo momento se dan referencias para el estudio o repaso de los temas básicos. Así mismo, se dan indicaciones para la profundización en los temas más avanzados de matemáticas o física que surgen, cuyo desarrollo queda a criterio del profesor.

Ejercicios. Ejercitar lo aprendido es parte crucial del proceso de aprendizaje y gran parte de los ejercicios están destinados a motivar la participación del lector. Hemos seguido el plan de incluir la mayor parte de los ejercicios dentro del texto en el preciso lugar que los motiva. No todos los ejercicios son sin embargo necesarios en una primera lectura. Aquellos que nos han parecido importantes para la comprensión del texto que les sigue vienen marcados con un asterisco. Indicaciones para la resolución de un conjunto de ejercicios seleccionado vienen recogidas al final del volumen.

Selección de temas. El curso ha sido impartido en la UAM en un cuatrimestre, para lo cual es preciso realizar una selección de temas y evitar los múltiples detalles complementarios que figuran en las secciones finales de los capítulos. Se sugiere cubrir los bloques 1 (caps. 2 a 4) y 2 (caps. 5 a 9, con la posible excepción del cap. 8) y continuar luego con los temas que se desee. Es en ese sentido útil recordar que los capítulos de flujos potenciales (cap. 12) y variable compleja (cap. 13) son muy accesibles a los alumnos de matemáticas y de gran interés tanto por su matemática como por su aplicación aeronáutica. Los capítulos de fluidos viscosos son temas de lo más clásico en el estudio de los fluidos. El capítulo de fluidos en medios porosos interesará al público motivado por sus aplicaciones, como el control de recursos subterráneos, la extracción petrolífera, o la ecología. En un curso anual se pueden cubrir todos los temas y avanzar además introducir temas como la turbulencia, la combustión, la convección o las ondas de choque, aquí solo mencionados someramente.

Habrá quien desee dar preferencia al estudio completo de los fluidos perfectos antes de empezar con los fluidos viscosos. Esta selección, que es muy razonable y habitual en la literatura, no ha sido seguida en el presente curso introductorio por la gran importancia que tienen los fluidos viscosos en la investigación, en el cálculo científico y en la aplicación industrial. También resultaba contraria al énfasis que hoy día se da a los aspectos de modelización comparada.

Lista de símbolos más usados

Como regla general, utilizamos el tipo de letra itálica, por ejemplo t , para denotar las magnitudes escalares, letra negrita, \mathbf{u} , para las vectoriales y letra del tipo \mathbf{M} para las matrices.

- CINEMÁTICA

\mathbf{x} variable espacial

t tiempo

\mathbf{y} variable espacial de referencia

\mathbf{u} velocidad

$\vec{\omega}$ vorticidad

Φ_t aplicación de transformación del fluido

$\mathbf{M} = D\Phi_t$ matriz de la deformación

$\nabla\mathbf{u}$ matriz velocidad de deformación

$\mathbf{D} = (1/2)(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^\dagger)$ matriz velocidad de deformación simetrizada

$\mathbf{A} = (1/2)(\nabla\mathbf{u} - \nabla\mathbf{u}^\dagger)$ parte antisimétrica de la matriz velocidad de deformación

- DINÁMICA

\mathbf{S} tensor de esfuerzos

p presión

μ coeficiente de viscosidad dinámica

$\nu = \mu/\rho$ coeficiente de viscosidad cinemática

λ segundo coeficiente de viscosidad

κ coeficiente de tensión superficial

- TERMODINÁMICA

e densidad de energía interna

$E = 1/2\|\mathbf{u}\|^2 + e$ densidad de energía total

T temperatura

δQ intercambio de calor elemental

S	entropía (específica)
h	entalpía (específica)
W, W_1	disipación viscosa

• OPERACIONES Y OPERADORES

$\frac{d}{dt}$ derivada temporal material

$\frac{\partial}{\partial t}$ derivada parcial temporal euleriana

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ producto escalar de vectores

$\mathbf{A} : \mathbf{B}$ producto de contracción de matrices

$\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ módulo cuadrado de un vector

$\|\mathbf{A}\|^2 = \mathbf{A} : \mathbf{A}$ módulo cuadrado de una matriz

$D\Phi$ matriz jacobiana de una transformación Φ

∇ operador nabla

$\nabla f = \text{grad } f$ gradiente de un escalar

$\nabla \mathbf{u} = \text{grad } \mathbf{u}$ gradiente de un vector

$\nabla \cdot \mathbf{u} = \text{div } \mathbf{u}$ divergencia de un vector

$\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A}$ divergencia de una matriz

$\nabla \times \mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{u}$ rotacional de un vector

δ_{ij} tensor de Kronecker

ε_{ijk} tensor contador de paridad de permutaciones

$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ producto diádico de dos vectores

Capítulo 1

El medio continuo

“All the mathematical sciences are founded on the relations between physical laws and laws of numbers, so that the aim of exact science is to reduce the problems of Nature to the determination of quantities by operations of numbers”.

J. C. MAXWELL

“Everything should be as simple as possible, but not simpler”

A. EINSTEIN

En este capítulo inicial se introducen los primeros conceptos y las hipótesis cinemáticas relativas al movimiento de un medio continuo. Se introducen las notaciones pertinentes y se discute la dicotomía fundamental entre la formulación lagrangiana y la euleriana. Se estudian las curvas integrales. Por último se revisan los fundamentos del cálculo en coordenadas curvilíneas.

1.1 Concepto y problema del medio continuo

Comenzaremos nuestra andadura por el mundo de los **fluidos** con unas consideraciones preliminares de tipo intuitivo que nos servirán para enmarcar el estudio y sentar algunas ideas. Un fluido es un **medio continuo**, es decir un agregado que se mueve (se deforma) en forma continua (en el tiempo, t) y forma un todo continuo (en el espacio $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$). Pensamos en tal medio como compuesto de partículas puntuales. No hay en ello ninguna objeción de tipo matemático; en los últimos siglos las matemáticas se han inclinado frecuentemente por la consideración de magnitudes continuas frente a las discretas, y en tal hipótesis se basan la geometría diferencial, las ecuaciones diferenciales y una gran

parte de los procesos estocásticos. Aunque no el cálculo numérico, evidentemente.

Ahora bien, la mecánica es una ciencia física que pretende describir el comportamiento de los cuerpos (sólidos, líquidos, gases o plasmas) y apoya por tanto su formulación matemática en la **experiencia** y la **teoría**. A este respecto, el concepto fundamental de medio continuo es una abstracción que, estrictamente hablando, está en contra de una teoría incontestable y ampliamente verificada, la teoría atómica, que describe la realidad a niveles inferiores a los nanómetros (10^{-9}m ; por ejemplo, el radio del átomo más pequeño, el de hidrógeno, mide alrededor de medio angström, $0,5 \times 10^{-10}\text{m}$). Un matemático a la usanza clásica tiene tendencia a resolver tal situación rechazando de plano al candidato que tropieza con una tal contradicción. Pues bien, este curso se basa precisamente en la idea de que en absoluto haremos tal cosa. Ello merece una explicación, que es como sigue: nuestra tarea consiste en construir una teoría matemática que sirva de modelo a una parcela de la Realidad. Este modelo ha de ser juzgado desde el punto de vista *matemático*, en que se tiene en cuenta la belleza, extensión y profundidad de las matemáticas originadas; y desde el punto de vista *físico*, por su eficacia en reflejar y en permitirnos **conocer** la realidad subyacente y **explicar** su funcionamiento observado y **predecir** su evolución futura. Hoy día, en el período dorado de la ciencia **computacional**, añadiríamos como esencial la capacidad de **calcular** y **controlar** eficazmente en base a este modelo.

En estos dos últimos sentidos, si bien la hipótesis del continuo es rigurosamente falsa a niveles microscópicos, se revela como extraordinariamente eficaz y ajustada (diríamos exacta) cuando estudiamos fenómenos que ocurren a escalas llamadas *macro-* o *mesoscópicas*, para fijar ideas longitudes mayores que 10^{-5} cm. Así pues, haremos matemáticas exactas para describir con gran aproximación fenómenos que de otro modo escapan a la capacidad de descripción cuantitativa e incluso cualitativa. Hemos de hacer notar que la mecánica de fluidos no es la única rama de la mecánica basada en esta abstracción, también la **elasticidad** y la **plasticidad** se basan en tal hipótesis. Por otra parte, el **electromagnetismo** es también (y en un sentido más radical) una teoría del medio continuo, desarrollada matemáticamente un siglo más tarde y con sorprendentes coincidencias en sus matemáticas con la mecánica de fluidos. Lo cual es una prueba más de la universalidad de las ideas centrales de las matemáticas y del poder del pensamiento abstracto.

1.2 Consideración física

El objetivo del curso es mostrar ese poder en la **Teoría Matemática de los Fluidos**, que no vive aislada sino que forma con la **Mecánica de Fluidos Experimental** y la **Mecánica de Fluidos Computacional** el gran cuerpo de la Mecánica de Fluidos actual.

La aproximación del medio continuo resulta ser tan efectiva que se olvida con frecuencia de que se trata de un **modelo**. Es con todo importante tener en cuenta las hipótesis de partida. Así, la consideración del fluido como un medio continuo se basa en

que éste consiste en un agregado de partículas en movimiento caótico y que la distancia característica de este movimiento, que recibe el nombre técnico de “recorrido libre medio entre colisiones”, λ , es mucho menor que las longitudes experimentales, que tomamos típicamente como mayores de 10^{-5} cm, de forma que sólo percibimos un cierto promedio de los procesos individuales entre partículas. Ahora bien, en ocasiones (piénsese en los gases enrarecidos de la materia interestelar) el recorrido libre medio puede ser mucho mayor, la hipótesis del continuo cesa de ser válida y no quedará más remedio que recurrir a teorías “más detalladas” que tengan en cuenta los movimientos moleculares (como la teoría cinética de gases). Precisamente, una de las líneas más activas de la investigación matemática actual es la obtención de las leyes del medio continuo como límite de las teorías cinéticas.

Una vez establecido que trabajamos en escalas muy superiores al recorrido libre medio de las partículas podemos olvidar el fino detalle de su movimiento individual y ver en torno a cada punto del espacio \mathbf{x} y para cada instante t un **volumen elemental representativo**, δV , de tamaño *mesoscópico*¹, es decir mucho mayor que λ y mucho menor que las longitudes macroscópicas en las que deseamos trabajar. Este volumen elemental, que se denomina también **partícula fluida**, es considerado como un medio continuo y homogéneo; en él se define una velocidad media del movimiento de ese elemento, que será para nosotros la **velocidad** puntual en este punto e instante, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Para decirlo en forma más matemática, admitimos que existe un valor límite de los promedios cuando δV se hace muy pequeño en la escala intermedia, es decir es muy pequeño pero aún muy por encima de la escala atómica. Del mismo modo, se habla de las demás magnitudes macroscópicas, como la **densidad**, que es la masa por unidad de volumen en el sentido de límite antedicho, y la **presión**, que es la fuerza normal por unidad de área ejercida por el fluido sobre una superficie ideal inmersa en él o rodeándolo. Esta magnitud tiene una evidente explicación física, por ejemplo en un gas encerrado en un recipiente, como el efecto neto de las colisiones de las partículas individuales reales sobre la superficie de las paredes. A estas tres magnitudes básicas se unirán otras en el curso del estudio, como **temperatura, energía interna, entropía, viscosidad,...** y algunas más que no deben preocuparnos por ahora. La existencia de estos valores medios para las magnitudes fundamentales en cada partícula fluida es lo que constituye la hipótesis de continuidad del medio. Señalemos por último que en el texto presente no se tendrán en cuenta efectos relativistas, que son importantes en circunstancias especiales pero no en los fenómenos descritos por la teoría clásica.

Resumiendo lo anterior, diremos que las consideraciones con “partículas” en un medio continuo son consideraciones con *partículas puntuales ideales* que promedian las propiedades de cada volumen elemental. De acuerdo con ello, el tratamiento matemático consiste en olvidar la existencia de otra realidad a escalas inferiores y realizar estos pasos al límite cuando δV es un *volumen infinitesimal* en el sentido usual. El tratamiento de esta “realidad ideal” sigue unas leyes, las leyes de la rama de medios continuos que este-

¹del griego, *mesos*, medio, *skopein*, mirar; intermedio entre macroscópico y microscópico.

mos estudiando, aquí la mecánica de fluidos. De aquí surge una *dualidad* que está en la base de la disciplina, dualidad que es común a todas las teorías que aspiran a describir matemáticamente el mundo físico. Por una lado la mecánica de fluidos es una rama de la ciencia natural y sus líneas de investigación obedecen a la necesidad de describir y comprender la naturaleza y los resultados obtenidos se validan experimentalmente. Pero, al mismo tiempo, el estudio teórico se desarrolla según pautas estrictamente matemáticas, de forma autoconsistente, dando lugar a una teoría matemática perfectamente independiente y autónoma, que se relaciona como veremos con las ecuaciones diferenciales, el análisis, la geometría y la topología, cuyo desarrollo ha sido motivado por el estudio de los fluidos en algunas de sus partes más fundamentales.

Toda rama de las ciencias aspira a la racionalidad y la universalidad. En ese sentido, el ser consciente de la existencia de una realidad más compleja, como la estructura atómica a escalas inferiores, es fundamental para el investigador que pretende obtener las leyes idealizadas que describen correctamente el movimiento, operación llamada **modelización**, que es una parte fundamental de la ciencia aplicada. En conclusión, diremos que una cierta comprensión de la situación física, aunque no es imprescindible para el manejo de las ecuaciones, es muy conveniente para el estudio que proponemos e imprescindible para cualquier valoración crítica.

1.3 Descripción matemática del movimiento

La descripción matemática del movimiento en un medio continuo puede abordarse como sigue. Se da un dominio Ω_0 en \mathbb{R}^3 y una familia de transformaciones $\Phi_t : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$, donde los Ω_t son dominios de \mathbb{R}^3 , y $t \in I = [0, T]$.

Hipótesis de regularidad

(H₁) $\Phi : \Omega_0 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es diferenciable C^k , ($k = 1, 2$, ó 3)

Escribimos $\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_t(\mathbf{x})$. Atención pues a no confundir subíndices con derivadas².

(H₂) Para todo t , Φ_t es un difeomorfismo (aplicación uno-uno diferenciable con inversa diferenciable).

(H₃) Φ_0 es la identidad.

INTERPRETACIÓN: Ω_0 es la posición inicial del cuerpo continuo o *posición de referencia*, Ω_t es el dominio ocupado por el continuo en el tiempo t y Φ_t es la *aplicación deformación*.

Denotamos por $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ la posición de una partícula de fluido en el tiempo t y por $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ la posición de la misma en el tiempo $t = 0$, que como dijimos sirve de *referencia*. Tenemos $\mathbf{y} \in \Omega_0$, $\mathbf{x} \in \Omega_t$ y

²es preciso acostumbrarse cuanto antes a las pequeñas ambigüedades de la notación clásica, que no es prudente intentar abolir so pena de condenarse a no entender la literatura.

$$(1.1) \quad \mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y}, t).$$

En coordenadas $x_i = \Phi_i(y_j, t)$. Por abuso de notación escribimos también $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}, t)$. El desplazamiento viene definido como

$$(1.2) \quad \mathbf{z}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{y} = \Phi(\mathbf{y}, t) - \mathbf{y}.$$

Ésta es una variable fundamental cinemática en muchos estudios de medios continuos. Siguiendo la tendencia más usual en el estudio de los fluidos, el presente texto usará como variable fundamental la velocidad. Para t fijo podemos hallar la matriz jacobiana

$$(1.3) \quad \mathbf{M} = \frac{\partial(x_1 \ x_2 \ x_3)}{\partial(y_1 \ y_2 \ y_3)} = D(\Phi_t).$$

A esto se le llama *matriz de la deformación* (infinitesimal)³. Con las hipótesis de regularidad anteriores $D\Phi_t(\mathbf{y}, t)$ es diferenciable C^{k-1} . Por la regla de la cadena sabemos que

$$(1.4) \quad D(\Phi_t^{-1}) \circ D(\Phi_t) = \mathbf{I}.$$

(\mathbf{I} = es la matriz identidad, el círculo \circ indica composición de operadores). Se sigue que la transformación inversa que pasa de tiempo t a tiempo 0 tiene matriz

$$(1.5) \quad \mathbf{M}^{-1} = \frac{\partial(y_1 \ y_2 \ y_3)}{\partial(x_1 \ x_2 \ x_3)} = D(\Phi_t^{-1}).$$

La hipótesis (\mathbf{H}_2) dice que la matriz $D\Phi_t$ es no singular, por tanto, $J(\mathbf{y}, t) = \det(D\Phi_t) \neq 0$. Además para $t = 0$ se tiene $\det(D\Phi_0) = 1$. Se deduce que la matriz es siempre *positiva*, en otras palabras la orientación se conserva por las transformaciones.

OBSERVACIONES. 1. En muchos casos es posible prescindir de una o dos de las variables espaciales y considerar que los problemas se plantean para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ ó $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$. Se trata siempre de casos ideales: un tubo muy (infinitamente) delgado, un fluido sobre un plano infinitamente profundo,.... La simplificación de cálculo que ello entraña permite adquirir unos resultados y una intuición que compensan en general la deformación de la realidad. En otros casos la reducción de variables se realiza una vez formulado el problema en coordenadas curvilíneas, por ejemplo los problemas con simetría radial o esférica, cf. sección 1.8.

2. Resulta llamativo constatar, al consultar la literatura, la falta de acuerdo sobre cuestiones de notación, por ejemplo en cómo designar la referencia inicial. Es corriente usar las notaciones \mathbf{X} ó \mathbf{x}_0 ó ξ ó \mathbf{a} , en vez de \mathbf{y} . Este caos, tan molesto para los matemáticos, parece no preocupar a los autores y estudiosos físicos e ingenieros.

³más precisamente, matriz gradiente de la deformación. Nótese que $\mathbf{M} = D_{\mathbf{y}}\mathbf{z} + \mathbf{I}$.

PUNTO DE VISTA: ver la variable de referencia \mathbf{y} en la fórmula (1.1) como una etiqueta o marca⁴ que individualiza la partícula.

CONVENCIONES SOBRE NOTACIÓN. En general usaremos letras negritas para designar vectores y cursivas para los escalares, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ y $p \in \mathbb{R}$. En el caso de la posición debemos pues usar notación vectorial, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, si bien el lector hallará con frecuencia en la literatura la notación escalar por sencillez (dado que sale tanto) y con la excusa de que x designa a un punto y no a un vector (es decir, la sutil idea de distinguir el espacio afín del vectorial). Para hacer más fácil la identificación de las matrices las designamos con letras mayúsculas y distinto tipo de letra, por ejemplo $\mathbf{M} = (M_{ij})$ ó $\mathbf{M} = (M^{ij})$.

Para evitar confusiones renunciaremos como regla general a la convención usual de utilizar subíndices para denotar las derivadas parciales. Así, escribiremos $\partial u / \partial t$ en vez de u_t . Mantendremos en cambio la notación f' para las derivadas de funciones de una variable junto a df/dx , aunque pueda confundirse la derivación con los superíndices, utilizados con frecuencia en el texto en los cambios de escala.

1.4 Cinemática

La idea más sencilla que a un matemático se le ocurre es pensar en las partículas individuales y estudiar sus *trayectorias* (tras la huella de ISAAC NEWTON). Para ello fijamos $\mathbf{y} \in \Omega_0$ y estudiamos la curva $\mathbf{x}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{x}(t) = \Phi(\mathbf{y}, t)$. El vector **velocidad** se halla mediante la fórmula

$$(1.6) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{y}, t) = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}}, \quad \text{es decir, con } \mathbf{y} \text{ fijo}$$

(cf. un texto de cálculo o geometría diferencial). Hay varias notaciones usuales en la literatura para este vector, como $\mathbf{u}(\mathbf{y}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{y}, t)$ y $\mathbf{q}(\mathbf{a}, t)$. Preferimos la primera; la velocidad será pues \mathbf{u} en lo que sigue. También se tiene que $\mathbf{u} = d\mathbf{z}/dt$. El vector **aceleración** de la partícula viene dado por

$$(1.7) \quad \mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \left. \frac{d^2\Phi}{dt^2} \right|_{\mathbf{y}}$$

Recordemos ahora los conceptos cinemático-geométricos de *vector tangente* y *normal*. Escribimos

$$(1.8) \quad \mathbf{u} = |u| \cdot \mathbf{t},$$

donde se define el vector unitario $\mathbf{t} = \mathbf{u}/|u|$, llamado vector *tangente* a la trayectoria. La definición es válida sólo si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ (punto no singular. Para definir el vector normal derivamos \mathbf{u} de nuevo en t

$$(1.9) \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d|u|}{dt} \mathbf{t} + |u| \frac{d\mathbf{t}}{dt}.$$

⁴en inglés *label*.

Entonces

$$(1.10) \quad \mathbf{a} = a_t \mathbf{t} + a_n \mathbf{n},$$

donde $a_t = d|u|/dt$ es la *aceleración tangencial*, mientras que a_n es la *aceleración normal* y \mathbf{n} el vector unitario normal. Veamos el último término según la geometría diferencial: dado que $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$, derivando tenemos

$$(1.11) \quad 2\mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{dt} = 0,$$

es decir $\mathbf{t} \perp \frac{d\mathbf{t}}{dt}$. La dirección de $\frac{d\mathbf{t}}{dt}$ es \mathbf{n} . En cuanto al módulo se tiene

$$(1.12) \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = K\mathbf{n}, \quad \text{luego} \quad \frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = K|u|\mathbf{n},$$

donde s es el arco, definido por integración de su elemento, $ds = |u|dt$. Así pues,

$$(1.13) \quad a_n = K|u|^2 = \frac{|u|^2}{R},$$

siendo $R = 1/K$ el radio de curvatura. Esta es la fórmula bien conocida para la *aceleración centrífuga* (o *centrípeta*). Todo ello parece un buen comienzo pero va ser menos importante en el desarrollo matemático de la teoría de los fluidos de lo que promete.

1.5 Formulación lagrangiana y euleriana

La descripción del movimiento del fluido es completa si calculamos la función $\Phi(\mathbf{y}, t)$. Esta es la idea llamada *lagrangiana*, en honor de Joseph-Louis LAGRANGE. También se llama *formulación material* o de *partículas*. Es muy visual y geométrica, pero no es siempre útil trabajar en este marco. Las variables independientes son \mathbf{y} (la posición inicial) y t (el tiempo).

Una idea alternativa que es muy fructífera va asociada al nombre de Leonhard EULER y consiste en poner en el punto central de la mecánica de fluidos la función

$$(1.14) \quad \boxed{\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}$$

En realidad no es una “función”, sino un campo de vectores $\mathbf{u} = (u, v, w)$ tal que

$$(1.15) \quad u = u(x, y, z, t), \quad v = v(x, y, z, t), \quad w = w(x, y, z, t).$$

Detengámonos un segundo a examinar este enfoque desde un punto de vista experimental. Partiendo de la **masa** como concepto primario se determina la velocidad de un fluido \mathbf{u} en un punto del fluido \mathbf{x} y en un instante t como sigue: se toma un *elemento*

de superficie S , es decir una pequeña parte de la frontera de uno de los volúmenes elementales mencionados en la sección 1.2, con normal \mathbf{n} , y se calcula la cantidad de masa que atraviesa S por unidad de superficie y unidad de tiempo, siempre bajo la hipótesis de que existe un límite $j(\mathbf{n})$ cuando el volumen elemental se contrae hacia el punto \mathbf{x} . Esta cantidad dependerá obviamente de la dirección \mathbf{n} , además de \mathbf{x} y t . Entonces se determina \mathbf{u} a través de la relación

$$(1.16) \quad j(\mathbf{n}) = \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n},$$

donde ρ es la densidad, la segunda magnitud fundamental, que se mide como el límite de la relación masa / unidad de volumen en un volumen elemental en torno a \mathbf{x} . El vector $\mathbf{j} = \rho \mathbf{u}$ se llama **flujo de masa** y es función del punto \mathbf{x} y del instante t . Como vemos, subyace una cierta hipótesis, a saber la existencia de un vector \mathbf{j} tal que $j(\mathbf{n}) = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}$. Dejamos para el capítulo siguiente un estudio a fondo del flujo de masa y la completa explicación de estas ideas.

Volvamos ahora al problema cinemático. Si se conoce la expresión de \mathbf{u} como función de \mathbf{x} y t , es trivial hallar las *trayectorias*, ya que se reduce a “integrar”, es decir a resolver

$$(1.17) \quad \begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{y}, \end{cases}$$

que es el problema de valores iniciales para una ecuación diferencial ordinaria, que se estudia en los cursos elementales de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. También aparece repetidamente en los cursos de Geometría Diferencial como flujo de un campo de vectores; el lector revisará la literatura y enunciará el teorema de existencia y unicidad de un flujo local y su dependencia continua respecto a datos iniciales y parámetros: si \mathbf{u} es de clase C^1 se obtiene una única solución $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y}, t) = \Phi_{\mathbf{y}}(t)$, definida para un cierto intervalo de tiempo, es decir una solución *local* en el tiempo. Recordemos una vez más que \mathbf{y} es un parámetro que señala de qué trayectoria se trata.

EJERCICIO 1.1*. (a) Calcular las trayectorias del movimiento en 1D (una dimensión espacial) dado por el campo de velocidades estacionario $u = x^2$. Demostrar que a partir de la posición inicial $x(0) = y$ se llega a

$$(1.18) \quad x(t) = \frac{y}{1 - yt}.$$

(b) Calcular la transformación Φ_t en el ejercicio anterior para $0 \leq t \leq 1$. Describir con precisión el dominio de definición e imagen para cada t y representar la correspondencia $y \mapsto x = \Phi_t(y)$.

(c) Calcular la matriz de la deformación para $t = 1$ y la aceleración del movimiento en función de y, t (visión lagrangiana) y de x, t (visión euleriana).

COMENTARIOS. (1) El ejemplo muestra un fenómeno preocupante de explosión de la trayectoria, que se va a infinito en el tiempo $t = 1/y$ si $y > 0$. ¿Podemos evitar tal

fenómeno? Sí, a cambio de hacer una hipótesis suplementaria sobre el campo $u(x, t)$: si éste está dado por una función globalmente Lipschitziana hay prolongabilidad para todo $t \in \mathbb{R}$.

(2) La integración de campos de velocidades obtenidos en la teoría será uno de los temas auxiliares presentes a lo largo del curso. En el capítulo 5, sección 5.7, se estudiará en detalle el análisis local de un campo de velocidades y su descomposición en las componentes instantáneas de tipo traslacional, rotacional y de deformación, correspondientes a integrar campos de velocidades de tipo lineal:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{C} \mathbf{x},$$

donde \mathbf{C} es una matriz.

Resumen y conclusión. La idea de EULER de considerar el punto de vista (1.14) o *formulación euleriana* resultó ser una idea muy profunda. Mencionemos que el teorema de existencia de EDOs se llama Teorema de Euler-Cauchy-Peano, el método de las poligonales, base del cálculo numérico, es también de EULER. Las variables independientes en la formulación euleriana son \mathbf{x} y t . Podemos decir que la visión euleriana prescinde de la hipotética partícula y se concentra en lo que sucede en un punto \mathbf{x} , sea quien sea quien o lo que pase por allí. Imagínese la medición de la velocidad, presión o temperatura en un canal o en la atmósfera (a efectos de predicción meteorológica o para uso aeronáutico). Resumiendo, por EULER tenemos las derivadas parciales

$$(1.19) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t},$$

con $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, mientras que por LAGRANGE

$$(1.20) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.$$

con $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{y}, t)$. ¡Obsérvese que $\partial \mathbf{u} / \partial t$ significa cosas distintas en ambas líneas! Mostraremos la forma de evitar esta peligrosa ambigüedad en la sección 1.7.

1.6 Trayectorias, líneas de corriente y líneas de emisión

Hemos definido anteriormente las **trayectorias** del movimiento como las líneas integrales de la ecuación diferencial $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, es decir que en coordenadas se tiene

$$(1.21) \quad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = dt.$$

Estas líneas también reciben el nombre de **líneas materiales**. En general los valores de $\mathbf{u} = (u, v, w)$ varían con el tiempo, con lo que en tiempos distintos el campo de direcciones apunta en direcciones distintas. Es a veces oportuno visualizar las líneas que se obtienen de integrar el campo \mathbf{u} con valor “congelado” en un cierto instante $t = t_0$, es decir hallar las soluciones de la ecuación

$$(1.22) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0).$$

Al contrario que antes, este es un sistema autónomo, que refleja la dinámica existente en el tiempo $t = t_0$. Se llaman **líneas de corriente**⁵. En un lenguaje pintoresco utilizado con frecuencia se dice que las líneas de corriente representan un movimiento ideal correspondiente a unas condiciones dinámicas “congeladas” en $t = t_0$.

Una tercera opción son las llamadas **líneas de emisión**⁶, que son por ejemplo las columnas de humo que salen de una chimenea o bien la típica línea de color que se origina cuando se inyecta un colorante (*trazador*) en un punto determinado de un fluido para observar su movimiento. Se trata de las líneas formadas por todos los puntos que corresponden a partículas que en un momento anterior pasaron por un mismo punto \mathbf{y}_0 (Observación: en los ejemplos prácticos anteriores se trata en realidad de muchas líneas; sólo vistos de lejos podremos suponer justificadamente que la chimenea o el tintero emiten una sola línea). Las líneas vienen dadas por

$$(1.23) \quad l_e(\mathbf{y}_0; t) = \{\mathbf{x} = \Phi_t \circ \Phi_s^{-1}(\mathbf{y}_0) : 0 < s < t\}.$$

$\mathbf{x}(t) = \Phi_t(\Phi_s^{-1}(\mathbf{y}_0))$ es la trayectoria que pasó en el momento s por \mathbf{y}_0 ⁷.

Definición. Un fluido se llama **estacionario**, si la expresión euleriana de \mathbf{u} es independiente de t , $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$.

Obsérvese que la denominación de fluido estacionario no quiere decir en absoluto **ni** reposo **ni** movimiento uniforme. Significa que el campo de velocidades es invariante con el tiempo, como un río cuyas aguas fluyen siempre igual.

Para un fluido estacionario se da una gran simplificación: entonces $\Phi_t \circ \Phi_s^{-1} = \Phi_{t-s}$ y los tres tipos de líneas mencionados coinciden. En otras palabras se escribe

$$\Phi_{t+s} = \Phi \circ \Phi_s = \Phi_s \circ \Phi_t, \quad \forall t, s \geq 0,$$

que es la propiedad característica de los semigrupos (de transformaciones) conmutativos.

Nota. La ampliación de los conceptos y útiles prácticos de tipo geométrico y cinemático ligados a los campos de velocidades y sus trayectorias será realizada de manera gradual según el curso proceda. Para empezar, en los Complementos Matemáticos de este capítulo se repasarán los conceptos y fórmulas ligados a las coordenadas curvilíneas y a los ejes no inerciales.

⁵ *stream lines* en inglés.

⁶ *streak lines* en inglés.

⁷ sea \mathbf{z} la referencia inicial de la partícula tal que $\Phi(\mathbf{z}, s) = \mathbf{y}_0$. Entonces $\mathbf{x}(t) = \Phi(\mathbf{z}, t)$.

1.7 Un repaso de cálculo. La derivada material

1.7.I. El uso simultáneo de las dos formulaciones o puntos de vista, euleriano y lagrangiano, es absolutamente necesario para comprender los fenómenos de los fluidos. Dado que en cada una se tiene un conjunto de variables independientes distinto, es preciso prestar la mayor atención a no *confundir las derivadas parciales*, teniendo bien presente el cambio de variables entre las coordenadas dado por la transformación $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y}, t)$,

$$(1.24) \quad f(\mathbf{x}, t) = f(\Phi(\mathbf{y}, t), t) := F(\mathbf{y}, t)$$

La notación usual será euleriana. Así escribiremos para una función $f = f(\mathbf{x}, t)$

$$(1.25) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}},$$

$$(1.26) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{t, x_j} \quad (j \neq i), \quad \nabla_{\mathbf{x}} f = \nabla f = \text{gradiente espacial},$$

es decir la notación estándar. Mientras tanto, para las derivadas lagrangianas buscamos una notación alternativa que nos evite confusiones. La derivada temporal es la más peligrosa. Se tiene

$$(1.27) \quad \frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{t, x_j} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Llegamos así a la *fórmula fundamental* para pasar de unas coordenadas a otras

$$(1.28) \quad \boxed{\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f}$$

Observemos que

$$(1.29) \quad \frac{\partial f}{\partial t} \text{ es la llamada tasa de variación temporal a espacio fijo,}$$

mientras que

$$(1.30) \quad \frac{\partial F}{\partial t} \text{ es la llamada tasa de variación temporal a partícula fija.}$$

1.7.II. La derivada material. El uso de la doble notación f y F para una misma cantidad según el punto de vista, es decir según se vea como función de \mathbf{x} o como función compuesta de \mathbf{y} , es conveniente en matemáticas pero desaconsejable en física, donde las letras se usan en función de los conceptos que denominan. Para evitar la confusión en las derivadas temporales se introduce la siguiente notación para la derivada de Lagrange:

$$(1.31) \quad \frac{df}{dt} := \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Es decir, para funciones que dependen de las coordenadas espaciales y del tiempo d/dt es la derivación parcial con respecto a t para \mathbf{y} constante. Cuando, como es harto habitual, se derive temporalmente una función de \mathbf{x} y t se define el operador d/dt mediante la regla de la cadena como

$$(1.32) \quad \boxed{\frac{d}{dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}}$$

Esta derivada temporal se suele llamar **derivada material**, también a veces *derivada total* y aún *derivada sustancial*. Habría un nombre mejor, “derivada particular” (es decir, siguiendo a las partículas), si no fuera porque esta palabra no significa en el lenguaje corriente lo que nosotros queremos expresar (defecto común a los demás idiomas próximos). En ese sentido se designa a veces como *derivada siguiendo el fluido*. Para indicar más claramente este concepto especial se usa en algunos textos de mecánica una notación alternativa también cómoda, D/Dt , en vez de d/dt . El lector debe prestar particular atención a la fórmula (1.32) y tener presente que *la derivada material es uno de los útiles fundamentales del curso* y también que es *una derivada parcial*, contra lo que pueda sugerir la notación.

Recuerde el lector que la notación d/dt aparecerá también en el texto con su uso habitual para designar la derivada ordinaria de una función de una variable $f(t)$. Ello no debería entrañar dificultad alguna pues ambos usos son compatibles. En todo caso, la correcta comprensión del significado de d/dt es de fundamental importancia en los desarrollos matemáticos de este curso.

Recordemos al lector que la derivada material goza de todas las propiedades usuales de una derivada: así tenemos las leyes

$$\frac{d}{dt}(f + g) = \frac{df}{dt} + \frac{dg}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(f \cdot g) = g \frac{df}{dt} + f \frac{dg}{dt},$$

así como la regla de la cadena

$$\frac{d(g \circ f)}{dt} = (g' \circ f) \cdot \frac{df}{dt}.$$

Pero es preciso tener en cuenta que existen algunas propiedades menos estándar, ver ejercicio 1.11.

1.7.III. Término convectivo. El sumando $\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}$ de la derivada material es muy importante en los procesos en que es esencial tener en cuenta el movimiento de las partículas. Se le suele denominar *término convectivo*. En coordenadas (respecto a unos ejes rectangulares inerciales) se tiene

$$(1.33) \quad \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f = \sum_i u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Se trata en suma de la derivada direccional de f a lo largo del vector \mathbf{u} . Con notaciones usuales hoy día en matemáticas se escribiría como

$$(1.34) \quad \nabla f \cdot \mathbf{u} \quad \text{ó} \quad D_{\mathbf{u}} f.$$

1.7.IV. Terminemos este apartado con la relación entre las derivadas espaciales. Este es un cálculo interesante, pero de menor uso. Utilizando la regla de la cadena se tiene para el gradiente lagrangiano, que podríamos escribir (con abuso de notación) $\nabla_{\mathbf{y}}f$:

$$(1.35) \quad \nabla_{\mathbf{y}}F = \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} \right)_i = \left(\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i} \right)_i = \nabla_{\mathbf{x}}f \cdot D\Phi_t = \nabla_{\mathbf{x}}f \cdot \mathbf{M}.$$

donde $\nabla_{\mathbf{y}}F$ y $\nabla_{\mathbf{x}}f$ son vectores fila y la expresión a la derecha es un producto vector-matriz.

Complementos matemáticos

1.8 Coordenadas curvilíneas

1.8.1. TEORÍA GENERAL. A lo largo del texto la posición de una partícula fluida \mathbf{x} (ó \mathbf{y}) se refiere preferentemente a un sistema de coordenadas cartesianas dotado de vectores unitarios, ortogonales e invariantes en el tiempo, $\mathbf{e}_i = (\delta_{ij})_j$, $i, j = 1, 2, 3$. Aquí $\delta_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$ (tensor de KRONECKER). Escribimos

$$(1.36) \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = \sum_i x_i \mathbf{e}_i.$$

Existen sin embargo multitud de casos prácticos en que la geometría del problema (su simetría) aconseja el uso de coordenadas curvilíneas apropiadas. Las más frecuentes de estas coordenadas son las *cilíndricas* y las *esféricas*. En el plano las coordenadas cilíndricas se simplifican en las *polares*. Aunque el cálculo en estas coordenadas se aprende en los cursos de geometría diferencial, no estará de más recoger en este punto los principales hechos sobre tales coordenadas, que utilizaremos luego en el estudio de las ecuaciones de los fluidos.

Un sistema de coordenadas curvilíneas viene dado por un difeomorfismo

$$(1.37) \quad T : (x'_i) \mapsto (x_i)$$

entre abiertos Ω' y Ω de \mathbb{R}^3 , llamado *parametrización local*, que permite describir cada punto \mathbf{x} del espacio físico Ω mediante sus nuevas coordenadas, (x'_1, x'_2, x'_3) . A este nuevo sistema de referencia se asocian curvas coordenadas X'_i dadas por

$$(1.38) \quad X'_1 : \{T((s, 0, 0)) : (s, 0, 0) \in \Omega'\}, \dots,$$

con vectores tangentes en un punto de (nuevas) coordenadas (x'_i) dados por

$$(1.39) \quad \mathbf{t}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \mathbf{e}_j$$

(con derivadas calculadas en (x'_i)). Observe el lector que tanto los ejes X'_i como los vectores \mathbf{t}_i son elementos del espacio físico. Los vectores \mathbf{t}_i , una vez normalizados:

$$(1.40) \quad \mathbf{e}'_i = \frac{1}{l_i} \mathbf{t}_i, \quad l_i = \|\mathbf{t}_i\|,$$

constituyen una base normalizada del espacio (o, si se quiere ser preciso, del espacio tangente en \mathbf{x}). Los factores l_i se llaman *longitudes características* o *factores métricos*. En coordenadas se tiene

$$(1.41) \quad \mathbf{e}'_i = \sum_j a_{ij} \mathbf{e}_j, \quad a_{ij} = \frac{c_{ij}}{l_i}, \quad c_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}.$$

Con esto, el elemento de longitud, $d\mathbf{x} = \sum_i \mathbf{e}_i dx_i$ se expresa también como

$$(1.42) \quad d\mathbf{x} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x'_i} dx'_i = \sum_i l_i \mathbf{e}'_i dx'_i.$$

Recordando que $\mathbf{e}_j = \partial \mathbf{x} / \partial x_j$, y derivando \mathbf{x} como función de x_j a través de las variables x'_i , se tiene que

$$(1.43) \quad \mathbf{e}_j = \sum_i b_{ij} \mathbf{e}'_i, \quad b_{ij} = l_i \frac{\partial x'_i}{\partial x_j},$$

En la práctica se utilizan sistemas de coordenadas curvilíneas para los que esta base es siempre ortogonal, **sistemas de coordenadas ortogonales**. Tenemos pues que la matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$ es tal que $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^\dagger$ (donde \mathbf{A}^\dagger denota la matriz traspuesta de \mathbf{A}), por lo que

$$a_{ij} = b_{ij} = l_i \frac{\partial x'_i}{\partial x_j},$$

que complementa la fórmula $a_{ij} = c_{ij} / l_i$. El elemento de arco es entonces

$$(1.44) \quad ds^2 = \sum_i (dx_i)^2 = \sum_i l_i^2 (dx'_i)^2$$

y el elemento de volumen se transforma como

$$(1.45) \quad dx_1 dx_2 dx_3 = l_1 l_2 l_3 dx'_1 dx'_2 dx'_3.$$

Podemos prescindir por el momento de la transformación del elemento (orientado) de superficie, que es algo más complicada. Por último, es preciso señalar que los (campos de

vectores) \mathbf{e}'_i varían en el espacio y su variación es un importante factor de complicación de las fórmulas en coordenadas curvilíneas. Finalmente, señalemos que si los nuevos ejes no son ortogonales, las fórmulas hacen intervenir el primer tensor métrico g_{ij} y sus variantes.

Nosotros desarrollaremos a continuación todas estas ideas en los casos particulares de interés y referimos al lector a un curso de geometría diferencial o riemanniana para más detalles.

EJERCICIO 1.2*. Todo campo vectorial, por ejemplo la velocidad $\mathbf{u} = \sum_i u_i \mathbf{e}_i$, se puede expresar en las nuevas coordenadas en la forma

$$(1.46) \quad \mathbf{u} = \sum_i u'_i \mathbf{e}'_i,$$

con las relaciones $u_j = \sum_i a_{ij} u'_i$ y $u'_i = \sum_j a_{ij} u_j$, que se siguen de (1.41)-(1.43). Probar que en el caso de la velocidad se tiene (de la definición)

$$(1.47) \quad u'_i = l_i \frac{dx'_i(t)}{dt},$$

siendo $x'_i(t)$ la expresión de la trayectoria en función del tiempo (es decir, las componentes de la velocidad son derivadas materiales).

EJERCICIO 1.3*. Demostrar que el vector gradiente de una función (escalar) diferenciable, $\nabla f = \sum_i (\partial f / \partial x_i) \mathbf{e}_i$, toma en coordenadas curvilíneas ortogonales la forma

$$(1.48) \quad \boxed{\nabla f = \sum_i \frac{1}{l_i} \frac{\partial f}{\partial x'_i} \mathbf{e}'_i.}$$

1.8.2. COORDENADAS CILÍNDRICAS. Aparecen de forma natural en problemas con simetría alrededor de un eje. Están dadas por las fórmulas

$$(1.49) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad z = z,$$

que definen la transformación T , con inversa

$$(1.50) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg}(y/x), \quad z = z.$$

T está bien definida en el conjunto $\{(r, \theta, z) : r > 0, \theta \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R}\}$ con una singularidad en $r = 0$ (es decir $\mathbf{x} = (0, 0, z)$) y la obvia dificultad de la periodicidad en θ . El lector demostrará fácilmente que la matriz DT es

$$(1.51) \quad \begin{pmatrix} x_r & y_r & z_r \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_z & y_z & z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta & 0 \\ -r \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las longitudes características son $l_r = l_z = 1$, $l_\theta = r$, y los vectores unitarios

$$(1.52) \quad \begin{cases} \mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta, 0) = \frac{1}{r} (x, y, 0), \\ \mathbf{e}_\theta = \frac{\partial \mathbf{x}}{r \partial \theta} = (-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta, 0) = \frac{1}{r} (-y, x, 0), \\ \mathbf{e}_z = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} = (0, 0, 1), \end{cases}$$

que forman un sistema móvil de vectores de base ortogonales en el espacio. Más precisamente, en cada punto del espacio, salvo el eje Z, sistema $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ forma una base ortogonal del espacio tangente en ese punto que varía con el punto; observamos las siguientes derivadas direccionales de estos vectores de base

$$(1.53) \quad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r,$$

siendo todas las demás derivadas de la serie $\partial \mathbf{e}'_i / \partial x'_j$, $i, j = r, \theta, z$, nulas.

EJERCICIO 1.4*. En el sistema de coordenadas cilíndricas la velocidad se expresa como

$$(1.54) \quad \mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z,$$

donde

$$(1.55) \quad u_r = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_r = \frac{dr(t)}{dt}, \quad u_\theta = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\theta = r \frac{d\theta(t)}{dt}, \quad u_z = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z = \frac{dz(t)}{dt}.$$

Escribir las componentes u_r, u_θ, u_z en función de u_x, u_y, u_z . Escribir el cambio inverso.

EJERCICIO 1.5*. Hallar la fórmula para el gradiente de una función escalar en coordenadas cilíndricas:

$$(1.56) \quad \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial f}{r \partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z.$$

1.8.3. COORDENADAS POLARES. Se trata solamente de eliminar la coordenada z y restringirse a un movimiento en el plano XY con coordenadas (r, θ) . Las fórmulas se deducen inmediatamente de lo anterior. El lector comprobará por ejemplo que

$$(1.57) \quad u_r = u_x \cos \theta + u_y \operatorname{sen} \theta, \quad u_\theta = -u_x \operatorname{sen} \theta + u_y \cos \theta,$$

fórmula que es útil deducir directamente de la representación gráfica. Escribese el cambio inverso.

1.8.4. COORDENADAS ESFÉRICAS. Están dadas por las fórmulas

$$(1.58) \quad \begin{cases} x = r \cos \phi \operatorname{sen} \theta, \\ y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \\ z = r \cos \theta, \end{cases}$$

que definen la transformación T en el conjunto $\{(r, \phi, \theta) : r > 0, \phi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]\}$ con singularidades en el eje Z donde $r \sin\theta = 0$ y la obvia dificultad de la periodicidad en ϕ y θ . Las longitudes características son $l_r = 1$, $l_\theta = r$ y $l_\phi = r \sin\theta$. El cambio de base viene dado por

$$(1.59) \quad \begin{cases} \mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta), \\ \mathbf{e}_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0), \\ \mathbf{e}_\theta = \frac{\partial \mathbf{x}}{r \partial \theta} = (\cos \phi \cos \theta, \sin \phi \cos \theta, -\sin \theta). \end{cases}$$

Es útil visualizar geoméricamente los vectores de base y las nuevas líneas coordenadas, que son radios, meridianos y paralelos.

EJERCICIO 1.6. Hallar las fórmulas para el vector velocidad y el gradiente de estas coordenadas.

1.8.5. EJES MÓVILES Y EJES NO INERCIALES. En principio en el libro se supondrá como en los ejemplos anteriores que la posición relativa de los ejes coordenados es fija en el tiempo. Nada impide sin embargo considerar sistemas de ejes móviles, tales que la transformación T y con ella la matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$ dependen del tiempo. En ese caso las ecuaciones de la mecánica pueden tener o no la misma forma en diversos ejes (ello se llama indiferencia al cambio de ejes⁸). En particular, tendrán la misma forma si los ejes se mueven con velocidad relativa constante, *ejes inerciales*. El lector puede pensar que los sistemas de coordenadas no inerciales son un horror evitable, pero no es así: la Tierra no se mueve en el espacio con movimiento uniforme, de modo que la consideración de ejes no inerciales es fundamental en Meteorología, Oceanografía y disciplinas afines.

Consideremos pues un cambio de coordenadas ortogonal móvil no necesariamente inercial, dado por las ecuaciones

$$(1.60) \quad x_i = X_i(x'_1, \dots, x'_n, t).$$

La velocidad relativa del nuevo retículo coordenado móvil es entonces

$$(1.61) \quad v_i(\mathbf{x}', t) = \left. \frac{\partial X_i}{\partial t} \right|_{x'_j = \text{const}}.$$

Veamos las reglas de cálculo en los nuevos ejes. Es claro que la derivada material de una función escalar $f(\mathbf{x}, t)$ no cambia con la transformación, pues tiene idéntico significado. Así, si definimos $f'(\mathbf{x}', t) = f(\mathbf{x}, t)$, entonces

$$(1.62) \quad \frac{df'}{dt} = \left. \frac{\partial f'}{\partial t} \right|_{\mathbf{y} = \text{const}} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\mathbf{y} = \text{const}} = \frac{df}{dt}.$$

⁸frame indifference en inglés.

EJERCICIO 1.7. Demostrar que en un cambio de coordenadas dado por las ecuaciones (1.60), la derivada parcial temporal cambia de acuerdo con la fórmula

$$(1.63) \quad \frac{\partial f'}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f,$$

donde \mathbf{v} es la velocidad relativa definida en (1.61), $\mathbf{v} = \sum v_i \mathbf{e}_i$.

Veamos ahora la fórmula de transformación de ejes. Para t fijo podemos utilizar las fórmulas y notaciones precedentes, (1.41)-(1.43), y escribir

$$\mathbf{e}_i = \sum_j a_{ji} \mathbf{e}'_j, \quad \mathbf{e}'_i = \sum_j a_{ij} \mathbf{e}_j, \quad a_{ij} = \frac{1}{l_i} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i},$$

es decir a_{ij} es la matriz de cambio de ejes normalizada definida para t fijo. Consideramos a continuación la transformación de velocidades. Partimos de que el vector de posición que une un punto al origen, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, se representa en los nuevos ejes por el punto $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$. Con el significado habitual de una derivada material se tiene entonces que

$$(1.64) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial X_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial X_i}{\partial x'_j} \frac{dx'_j}{dt} = v_i + \sum_j c_{ji} \frac{dx'_j}{dt},$$

luego las componentes cartesianas de la velocidad u_i están relacionadas con las componentes u'_j de la velocidad relativa a los ejes móviles, dadas por

$$(1.65) \quad u'_j = l_j \frac{dx'_j(t)}{dt}$$

(ver Ejercicio 1.2), mediante la fórmula

$$(1.66) \quad u_i = v_i + \sum_j u'_j a_{ji}.$$

Dado que el último término es precisamente la expresión del vector \mathbf{u}' en las nuevas coordenadas en el caso estacionario, la diferencia introducida por los ejes móviles reside en el término de velocidad relativa. Poniendo pues $\mathbf{u}' = (\sum_j u'_j a_{ji})_i$, se escribe en resumen

$$(1.67) \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{u}', \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d'\mathbf{x}'}{dt} + \mathbf{v},$$

donde d'/dt indica derivación en tiempo en las nuevas coordenadas y posterior transformación mediante el cambio de coordenadas. Esta fórmula se generaliza en la regla para derivación material de vectores (tangentes)

$$(1.68) \quad \frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} + \mathbf{v}.$$

Ejemplo 1.1 El ejemplo típico de un cambio de ejes no inercial es el dado por

$$(1.69) \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}',$$

en que la matriz $\mathbf{A}(t)$ representa un giro de ejes. Supongamos que el eje de giro viene dado por el vector $\boldsymbol{\Omega}(t)$ y la velocidad angular por su módulo, $|\boldsymbol{\Omega}(t)|$; tal giro se representa por la fórmula

$$(d/dt)\mathbf{A}(t)\mathbf{x}' = \boldsymbol{\Omega}(t) \times (\mathbf{A}(t)\mathbf{x}'),$$

donde \times denota producto vectorial. La velocidad relativa es entonces

$$(1.70) \quad \mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}.$$

En este caso se tiene

$$(1.71) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d'\mathbf{x}'}{dt} + \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{x}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} + \boldsymbol{\Omega}(t) \times .$$

Un movimiento inercial más complicado se plantea cuando se realiza a la vez una traslación del origen de vector $\mathbf{a}(t)$ y un giro de los ejes de matriz $\mathbf{A}(t)$,

$$(1.72) \quad \mathbf{x} = \mathbf{a}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{x}'.$$

La velocidad relativa es entonces

$$(1.73) \quad \mathbf{v} = \mathbf{a}'(t) + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Estas fórmulas serán retomadas al escribir las ecuaciones dinámicas en ejes rotatorios, sección 3.4, cuya aplicación se encuentra por ejemplo en la descripción de la dinámica sobre la superficie terrestre.

1.9 Operadores diferenciales

Todo curso de física del continuo ha de tratar con campos vectoriales diferenciables, lo que origina una multitud de expresiones diferenciales. Algunas de ellas son de una gran importancia para el análisis y se estudian en los cursos de cálculo. Los ejemplos indispensables son los cuatro operadores clásicos: gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano, que están relacionados con teoremas fundamentales del cálculo integral (teoremas de Green, Stokes y Gauss-Ostrogradski). Todos ellos son operadores en las variables espaciales.

Ya hemos visto el gradiente de un escalar, así como su expresión en diversas coordenadas. También hemos observado que aparece el gradiente de un campo vectorial, que coincide con el concepto de matriz jacobiana, $\text{grad } \mathbf{u} = D\mathbf{u}$, escrita habitualmente en mecánica de fluidos como $\nabla \mathbf{u}$, en coordenadas

$$(1.74) \quad (\nabla \mathbf{u})_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

La divergencia opera sobre un vector $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ para dar un escalar. En coordenadas cartesianas se expresa de la forma

$$(1.75) \quad \operatorname{div}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{Traza}(\nabla \mathbf{u}),$$

donde, como acabamos de decir, $\nabla \mathbf{u}$ designa la matriz jacobiana de \mathbf{u} respecto a \mathbf{x} (jacobiana espacial). En el capítulo 2 introduciremos la divergencia de una matriz, cf. Teorema 2.7.2 relacionándola con el teorema de Gauss. El concepto de divergencia y su expresión en coordenadas curvilíneas se estudian en la sección 2.9.

El operador laplaciano transforma un campo escalar $f(\mathbf{x})$ en otro. Su expresión en coordenadas cartesianas es

$$(1.76) \quad \Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Este operador se aplicará también a vectores, lo que se hace componente a componente en coordenadas cartesianas. La expresión del laplaciano en coordenadas curvilíneas se aborda en la sección 4.5.

El rotacional opera sobre un vector $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u, v, w)$ para dar un vector. En coordenadas cartesianas toma la forma

$$(1.77) \quad \operatorname{rot}(\mathbf{u}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

Es a veces cómodo escribir el rotacional a partir de la fórmula sumatoria del producto vectorial:

$$(1.78) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i a_j b_k,$$

donde ε_{ijk} el tensor cuyas componentes valen 0 si algún índice se repite, 1 si la permutación ijk es par, y -1 si es impar (se puede ver ε_{ijk} como un contador). Entonces

$$(1.79) \quad \operatorname{rot}(\mathbf{u}) = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \frac{\partial u_k}{\partial x_j}.$$

Es de observar que tanto el gradiente como la divergencia y el laplaciano se generalizan inmediatamente a dimensión cualquiera, no así el rotacional. La expresión del rotacional en coordenadas curvilíneas se pospone al capítulo 14, cf. fórmula (14.21), con ocasión del estudio de la vorticidad de los fluidos perfectos.

Los libros de física e ingeniería adoran la notación con nabra, ∇ , para los operadores diferenciales clásicos (que es realmente estética). Así, el gradiente se escribe como acción del “vector nabra” sobre un escalar

$$(1.80) \quad \operatorname{grad}(f) = \nabla f,$$

la divergencia se escribe como un producto escalar simbólico:

$$(1.81) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \cdot (u_1, \dots, u_n) = \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

y el rotacional como un producto vectorial simbólico:

$$(1.82) \quad \text{rot}(\mathbf{u}) = \nabla \times \mathbf{u}.$$

Finalmente se tiene $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ (producto escalar simbólico).

Todos estos operadores tienen un significado intrínseco, independiente de los ejes coordenados en que vienen expresados, tal como explican los cursos de geometría. Así, el gradiente es un vector cuya dirección señala la máxima variación de la función y cuyo módulo es precisamente la tasa de variación, de forma que

$$(1.83) \quad \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})}{|\mathbf{h}|} = \nabla f \cdot \mathbf{h}.$$

Más detalles sobre los operadores diferenciales se verán según aparezcan. Una lista de identidades usuales se recoge en el Apéndice I. La utilización de una notación matemática sofisticada es un útil de una potencia notable pero puede llevar al lector no acostumbrado a confusión sobre qué quieren realmente decir las largas fórmulas que aparecen ante sus ojos. Un recurso casi infalible es escribir lo que sea en todo detalle en coordenadas. Para ello es conveniente manejar bien los sumatorios y sus convenios.

Otros ejercicios del capítulo

EJERCICIO 1.8. Calcular las trayectorias correspondientes a los campos de velocidades (u, v, w) tal que

$$(1.84) \quad u = ax, \quad v = -ay, \quad w = 0,$$

$$(1.85) \quad u = -ay, \quad v = ax, \quad w = 0.$$

Explicar el resultado gráficamente. Hacer también los cálculos en coordenadas polares. Calcular el valor de $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ en ambos casos.

EJERCICIO 1.9. Trazar trayectorias, líneas de corriente y líneas de emisión para el campo de velocidades plano no estacionario (u, v)

$$(1.86) \quad u = a, \quad v = bt.$$

EJERCICIO 1.10. Dado el campo de velocidades anterior calcular las derivadas $\partial f/\partial t$ y df/dt para las siguientes funciones

$$(1.87) \quad f(t, x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, \quad f(t, x_1, x_2) = 3 + bt^2 - 2x_2.$$

EJERCICIO 1.11. Es bien sabido que para funciones regulares las derivadas parciales usuales conmutan, en particular

$$(1.88) \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Ello no es cierto para d/dt y $\partial/\partial x_i$. Probar que el conmutador, que actúa sobre una función lisa como

$$(1.89) \quad \left[\frac{d}{dt}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right] f = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{df}{dt} \right),$$

satisface

$$(1.90) \quad \left[\frac{d}{dt}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right] = -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}.$$

Este ejercicio es importante para evitar uno de los errores más frecuentes de cálculo, el *falso teorema de las derivadas cruzadas*.

EJERCICIO 1.12. Demostrar que si $\mathbf{M} = D\Phi_t$ es la matriz de la deformación, entonces

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{M},$$

un producto de matrices.

EJERCICIO 1.13. Comprobar que en un sistema de coordenadas curvilíneas (no necesariamente inercial) y con las notaciones y definiciones anteriores, si $f = f(x_i, t) = f'(x'_i, t)$ es una magnitud escalar se tiene

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f'}{\partial t} + \sum_i u'_i \frac{\partial f'}{\partial x'_i}.$$

EJERCICIO 1.14. Comprobar que si $\mathbf{A}(t)$ es la matriz de un giro alrededor del origen de coordenadas con eje \mathbf{n} y velocidad angular $\Omega(t)$, entonces

$$(1.91) \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \mathbf{x}) = \Omega \mathbf{n} \times (\mathbf{A} \mathbf{x}).$$

Algunas referencias útiles

- SOBRE LOS FUNDAMENTOS FÍSICOS

[B] G.K. BATCHELOR, “An Introduction to Fluid Dynamics”, Cambridge Univ. Press, 1967.

[LL] L.D. LANDAU, E.M. LIFSHITZ, “Mecánica de Fluidos”, Reverté, Barcelona, 1991.

- SOBRE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

[CL] E.A. CODDINGTON, N. LEVINSON, “Theory of Ordinary Differential Equations”, McGraw-Hill, 1955.

[HS] M.W. HIRSCH, S. SMALE, “Ecuaciones diferenciales ordinarias, sistemas dinámicos y álgebra lineal”, Alianza Ed., Madrid, 1983.

[Si] G.F. SIMMONS, “Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas”, McGraw-Hill, Madrid, 1993.

- SOBRE LA GEOMETRÍA DIFERENCIAL

[dC1] M. DO CARMO, “Differential Geometry of Curves and Surfaces”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

[St] D. STRUIK, “Lectures on Classical Differential Geometry”, Addison-Wesley Pub. Co., Reading, Mass., 1957.

- SOBRE LOS OPERADORES DIFERENCIALES Y EL CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES

[MT] J.E. MARSDEN, A.J. TROMBA, “Cálculo vectorial”, Addison-Wesley Iberoamericana, Argentina, 1991.

LEYES FÍSICAS

En los tres capítulos que siguen se derivan las leyes de conservación que forman el esqueleto del estudio matemático de los medios continuos: conservación de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía. Se introducen el concepto de incompresibilidad, el tensor de esfuerzos y la energía interna. A partir de estas leyes se obtendrán después las ecuaciones del movimiento.

Capítulo 2

La conservación de la masa

“Doy por supuesto que la materia es inalterable, es decir, siempre la misma, es evidente que de ella pueden deducirse demostraciones no menos que de las puras demostraciones matemáticas”

G. GALILEI, “Consideraciones ... sobre dos nuevas ciencias”

2.1 La ley de conservación

Esta primera ley fundamental de la Mecánica de Medios Continuos expresa el siguiente principio básico: *“la materia no se crea ni se destruye”*. Hemos de examinar el significado de la frase y de los conceptos utilizados: por materia entendemos la sustancia de que se compone el fluido, la afirmación viene a decir que es posible medir la cantidad de materia contenida de una cierta región del espacio en un momento dado y concluir que no varía con el flujo.

Expresada en un lenguaje matemático moderno, esta ley se traduce en la hipótesis de que existe una familia de medidas $m_t \geq 0$ en $\Omega_t = \Phi_t(\Omega_0)$ (medidas en el sentido de Borel) tales que para todo $D_0 \subset \Omega_0$ medible y $D_t = \Phi_t(D_0)$ se tiene

$$(2.1) \quad \boxed{m_t(D_t) = m_0(D_0).}$$

Denominaremos a esta versión (CM1). Equivale a escribir (en notación funcional moderna) que $m_t \circ \Phi_t = m_0$. Esta ley se llama **ley de conservación de masa**, pues $m_t(D_t)$ expresa la masa contenida en D_t en el tiempo t .

No hay ninguna objeción de principio a establecer una *teoría matemática* basada en esta u otra ley. Pero la validez de una tal teoría en la descripción de los fluidos es consecuencia de la *evidencia experimental*, que confirma históricamente la validez de la ley presente en condiciones muy generales.

Veamos cómo presentar esta ley en forma más manejable para el análisis y el cálculo. Haremos para ello una **Hipótesis Adicional** Oportuna, a saber, la existencia de función llamada **densidad** (de masa) tal que se cumple la condición (\mathbf{H}_4):

$$(2.2) \quad dm_t = \rho(\mathbf{x}, t) dx_1 dx_2 dx_3.$$

En el Análisis Matemático se dice entonces que m_t es *absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue* y ρ es el *multiplicador de Radon-Nikodým*. Se tiene que

$$\rho(\cdot, t) \in L^1(\Omega_t).$$

Puestos a pedir condiciones agradables de trabajo, supondremos en general que $\rho(\mathbf{x}, t)$ es continua y diferenciable. Ésta, que se podría llamar “hipótesis de regularidad fuerte”, es una hipótesis hecha en todos los tratados clásicos en los que todo lo más se admiten “singularidades” en ciertos puntos, curvas o superficies aisladas (para tener en cuenta fenómenos importantes sin los que la teoría puede tirarse por la ventana a efectos prácticos). En nuestro siglo, una vez desarrollada la teoría de la integración y de la medida, la Mecánica de Fluidos rebaja las hipótesis en forma de condiciones de integrabilidad. Pero todo ello depende del problema y es aconsejable una cierta cautela, no sea que la excesiva preocupación por el análisis nos impida ver los fluidos. *Éste no es un curso de Análisis Matemático.*

Observamos ahora que en muchos razonamientos a lo largo del texto tomaremos un dominio (o conjunto medible) $D \subset \Omega_0$ y consideraremos la familia $\{D_t = \Phi_t(D_0)\}_t$, que se denomina en la literatura un *volumen material*, *sistema material* o *volumen que se desplaza con el fluido* y corresponde al punto de vista lagrangiano, que ve el proceso como una materia o sistema de partículas que se mueve. Así, tal punto de vista es útil al derivar las ecuaciones en este capítulo. Sin embargo, recordamos que es cómodo y usual referir experimentos y conclusiones a lo que sucede en un *dominio fijo* (en el tiempo), siguiendo el modo euleriano.

Pasamos ya a derivar diversas formas de la ecuación de continuidad, pues ello nos permitirá introducir o repasar conceptos y cálculos de gran interés en la teoría. Empecemos haciendo notar que en términos de ρ la ley se escribe:

$$(2.3) \quad \int_{D_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{D_0} \rho(\mathbf{y}, 0) d\mathbf{y}.$$

Ahora bien

$$\int_{D_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{D_0} \rho(\Phi(\mathbf{y}, t), t) \cdot J \cdot d\mathbf{y},$$

con $J(\mathbf{y}, t) = \det(D\Phi_t) = \det \mathbf{M}(t)$. Igualando se tiene que para todo $D_0 \subset \Omega_0$

$$(2.4) \quad \int_{D_0} \rho(\Phi_t(\mathbf{y}), t) J(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} = \int_{D_0} \rho(\mathbf{y}, 0) d\mathbf{y}.$$

Como el dominio al que se aplica lo anterior es arbitrario, se deduce la versión (CM2):

$$(2.5) \quad \boxed{\rho(\Phi_t(\mathbf{y}), t)J(\mathbf{y}, t) = \rho(\mathbf{y}, 0).}$$

Esta es la ley de conservación de masa según LAGRANGE. También se puede escribir en forma diferencial como

$$(2.6) \quad \frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0.$$

que lleva a la versión (CM2'):

$$(2.7) \quad \boxed{\frac{d}{dt}(\rho J) = 0.}$$

Esta última fórmula admite una interpretación clara: según la conocida fórmula del cambio de variables, el factor J es precisamente la medida de la *expansión de volumen* a lo largo de una trayectoria. Como la masa se conserva, (CM2') simplemente dice que densidad \times volumen = constante. La ley de conservación de masa recibe frecuentemente en la literatura el nombre de **ecuación de continuidad**.

Una observación sobre la notación: dado que ρJ es una función de las variables t e \mathbf{y} , la derivada total d/dt tiene el sentido explicado en la sección 1.7 de derivada material o lagrangiana, que coincide con la derivada parcial respecto a t para \mathbf{y} fijo. Podríamos haber escrito pues $\partial(\rho J)/\partial t$, pero ello puede crear confusión pues hemos convenido que las derivadas parciales temporales se interpretan por defecto como derivadas para \mathbf{x} fijo.

2.2 Incompresibilidad y homogeneidad

Veamos ahora una clase especial de movimientos o flujos que por su sencillez y propiedades matemáticas aparecen con gran frecuencia.

Definición 2.2.1 *Un movimiento en un medio continuo se llama **incompresible** si la transformación Φ_t conserva los volúmenes (es decir la medida de Lebesgue) para todo tiempo t .*¹

Dado entonces un volumen arbitrario $D_0 \in \Omega_0$ se tiene

$$\text{Vol}(D_t) = \int_{D_t} d\mathbf{x}, \quad \text{Vol}(D_0) = \int_{D_0} d\mathbf{x}.$$

La incompresibilidad significa que $\text{Vol}(D_t) = \text{Vol}(D_0)$. Debido a la fórmula del cambio de variables esto es equivalente a decir que

$$(2.8) \quad \boxed{J(\mathbf{y}, t) = 1 \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega_0, t \geq 0}$$

¹Ayuda lingüística: compresible es afín a comprimir, viene del verbo latino *comprimo*, -ere, -essi, *essum*.

Recordemos que siempre se tiene $J(\mathbf{y}, 0) = 1$. La condición de incompresibilidad se puede escribir también en la forma diferencial

$$\frac{dJ}{dt} = 0.$$

Por otra parte se deduce de aquí y de la ley de conservación de masa (CM2) que la incompresibilidad es equivalente a que la densidad se conserve a lo largo de las trayectorias

$$(2.9) \quad \mathbf{x} = \Phi_t(\mathbf{y}, t) \Rightarrow \rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{y}, 0),$$

o bien que

$$(2.10) \quad \boxed{d\rho/dt = 0.}$$

Son fluidos incompresibles típicamente los líquidos y compresibles los gases. La distinción es de gran importancia pues, como tendremos ocasión de ver, la teoría de los fluidos compresibles es mucho más sencilla que la teoría general. Por ello es interesante señalar que en muchas consideraciones incluso los gases se comportan aproximadamente como fluidos incompresibles. Así, en los estudios aeronáuticos o del clima se supone incompresible el aire en situaciones que implican velocidades de hasta 0,4 Mach (1 Mach = la velocidad del sonido). Por el contrario, al acercarse a la velocidad del sonido toda la complicación de la dinámica compresible aparece, en particular las famosas *ondas de choque*, que estudiaremos en el capítulo 7.

Otra restricción sobre el movimiento de los fluidos que es de gran utilidad práctica es la homogeneidad. Un fluido **homogéneo** es aquel en que la densidad ρ es constante en el espacio. En fórmulas,

$$(2.11) \quad \nabla_{\mathbf{x}}\rho = 0 \quad \text{ó} \quad \rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}_0, t) \quad \text{ó} \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

EJERCICIO 2.1*. (a) Mostrar que un fluido incompresible que es inicialmente homogéneo lo es para todo tiempo, pues $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{y}, 0)$. (b) Mostrar que para un fluido homogéneo ser incompresible es equivalente a tener densidad constante también en el tiempo (densidad estacionaria), $\partial\rho/\partial t = 0$.

La incompresibilidad y la homogeneidad son condiciones que restringen la generalidad de los movimientos permitidos al fluido. Así, un fluido de naturaleza compresible es susceptible de realizar movimientos compresibles o no, dependiendo de las circunstancias adicionales (condiciones iniciales y de contorno), mientras que un fluido de naturaleza incompresible satisfará siempre (2.9), (2.10). Por otra parte, señalamos que un fluido incompresible es normalmente homogéneo (es decir, lo es frecuentemente).

2.3 Un resultado de cálculo

Necesitamos evaluar la derivada temporal del determinante jacobiano J para utilizar la expresión (CM2') de la ley de conservación de masa o bien para investigar la forma (2.2)

de la incompresibilidad. Este trabajo se lo debemos a L. EULER, 1770.

Lema 2.3.1

$$(2.12) \quad \boxed{\frac{dJ}{dt} = J \cdot (\text{div } \mathbf{u})}$$

Demostración. Se tiene que

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_3} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix}.$$

Un determinante se puede derivar por columnas:

$$\frac{dJ}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_1} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial x_1}{\partial y_3} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} + \dots =$$

donde hemos escrito la derivada de la 1ª columna y existe otro sumando con la derivada de la segunda columna y otro con la derivada de la tercera. Seguimos calculando

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{dx_1}{dt} & \dots \\ \frac{\partial}{\partial y_2} \frac{dx_1}{dt} & \dots \\ \frac{\partial}{\partial y_3} \frac{dx_1}{dt} & \dots \end{vmatrix} + \dots = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial y_1} & \dots \\ \frac{\partial u_1}{\partial y_2} & \dots \\ \frac{\partial u_1}{\partial y_3} & \dots \end{vmatrix} + \dots$$

Ahora observamos que

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial y_i} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial y_i} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial y_i}.$$

Con esto el primer sumando que hemos escrito de la derivada de J se transforma a su vez en tres sumandos:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_3} & \dots \end{vmatrix} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dots \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \dots \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_3} & \dots \end{vmatrix} + \dots$$

pero los determinantes de todos los sumandos menos el primero son cero por tener dos columnas iguales. Nos queda pues este primer término que da

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} J.$$

Un razonamiento análogo se aplica a los otros dos sumandos de la derivada de J (el cálculo ha de ser simétrico en los índices i). Concluimos que

$$\frac{dJ}{dt} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) J,$$

como queríamos demostrar. \square

NOTAS. 1) Este cálculo se generaliza sin más a n dimensiones. La forma un tanto ruda del cálculo anterior disgustará sin duda a algunos lectores. He aquí una versión para “lectores formalmente exigentes”: en virtud de la teoría de determinantes se puede escribir

$$J = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \right) = \sum_{\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} A_{i\alpha},$$

fórmula de desarrollo por columnas que es válida para todo i . $A_{i\alpha}$ denota el cofactor de $\partial x_i / \partial y_\alpha$. Aplicando la regla de derivación de determinantes por columnas se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \sum_i \sum_{\alpha} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \right) A_{i\alpha} = \sum_{i,\alpha} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \left(\frac{dx_i}{dt} \right) A_{i\alpha} = \sum_{i,\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial y_\alpha} A_{i\alpha} = \\ &= \sum_{i,\alpha,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_\alpha} A_{i\alpha} = \sum_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta_{ij} J = \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} J, \end{aligned}$$

lo que termina la demostración. Al final hemos utilizado la fórmula de desarrollo de una columna por los cofactores de otra:

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} A_{j\alpha} = \delta_{ij} J,$$

siendo $\delta_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$ (matriz unidad o tensor de KRONECKER).

2) Ha hecho su aparición un operador diferencial clásico, la **divergencia**, que opera sobre un vector $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ de la forma

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \operatorname{Traza}(\nabla \mathbf{u}).$$

Con esto podemos derivar el primer miembro de (2.3), (2.4).

Corolario 2.3.2 *Se tiene*

$$(2.13) \quad \frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{D_t} \left(\frac{d\rho}{dt}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) d\mathbf{x}.$$

Estamos ahora en condiciones de caracterizar la incompresibilidad en términos del campo de velocidades (términos eulerianos). Utilizando (2.6), (2.10) y (2.13) se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.3.3 *Un fluido es incompresible si y sólo si*

$$(2.14) \quad \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0.$$

Los campos con divergencia nula se llaman oficialmente *solenoidales*, terminología heredada del electromagnetismo. En lengua inglesa, siempre tan directa, se llaman simplemente *divergence-free*.

2.4 Ecuación de continuidad. Versión euleriana

En un artículo fundamental titulado “Principes généraux du mouvement des fluides” y publicado en 1755 en la revista de la Akademie de Berlin, don Leonardo EULER tradujo la ley de conservación de masa (CM2), o sea (2.6), a la formulación que llamamos euleriana. En virtud del Lema 2.3.1, de la ecuación lagrangiana se deduce que

$$(2.15) \quad \frac{d}{dt}(\rho J) = \frac{d\rho}{dt} J + \rho J(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0.$$

Como $J \neq 0$ se tiene (para $\rho \neq 0$) la versión (CM3)

$$(2.16) \quad \boxed{\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.}$$

Además, como

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla,$$

se llega a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0,$$

que finalmente da otra forma de la misma ley, (CM3')

$$(2.17) \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,}$$

ley de conservación euleriana. Es una ecuación en derivadas parciales de 1^{er} orden con variables independientes (x, y, z, t) e incógnitas ρ, \mathbf{u} . Tenemos pues por el momento 1 ecuación con 4 (en general $n + 1$) incógnitas. Se ve que nos encaminamos a un planteamiento consistente en obtener un **sistema de ecuaciones en derivadas parciales**, al menos $n + 1$ ecuaciones para $n + 1$ incógnitas. Quien conozca el contenido de los estudios oficiales de Matemáticas coincidirá con nosotros en que tal dirección implica un nivel matemático muy avanzado. Para acabar de complicarlo, la ley es no lineal, aunque sea lineal por separado en ρ y \mathbf{u} . Veamos qué aspecto tiene en coordenadas: sean

$$\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}, \quad \mathbf{x} = (x, y, z).$$

La ley de conservación euleriana se escribe entonces como

$$(2.18) \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0}$$

EJERCICIO 2.2*. Comprobar la identidad:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = (\nabla \rho) \cdot \mathbf{u} + \rho(\nabla \mathbf{u}) = \text{grad } \rho \cdot \mathbf{u} + \rho(\text{div } \mathbf{u}).$$

EJERCICIO 2.3*. Demostrar que para toda magnitud escalar diferenciable f se tiene la identidad

$$(2.19) \quad \rho \frac{df}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho f) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} f),$$

como consecuencia de la ley de conservación de masa.

2.5 Versiones integrales y teorema del transporte

2.5.I. Teorema del transporte de Reynolds. Hemos deducido la ley de conservación en las versiones euleriana y lagrangiana. Es importante no perder de vista el hecho de que la ley proviene de un cálculo con integrales. En efecto, la ley de conservación de masa se reducía a probar que

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0.$$

En lo que sigue aparecerán diversas derivadas en el tiempo de expresiones integrales. Para manipular tales expresiones necesitamos algunos complementos de cálculo diferencial y para ello recurrimos al matemático inglés O. REYNOLDS.

Teorema 2.5.1 *Consideremos un fluido de densidad ρ . Sea D_t un volumen material. Entonces se tiene que para toda función diferenciable $F(\mathbf{x}, t)$*

$$(2.20) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho F d\mathbf{x} = \int_{D_t} \rho \frac{dF}{dt} d\mathbf{x}.}$$

F puede ser escalar o vector. Si es vector la expresión se toma componente a componente.

DEMOSTRACIÓN. Recuérdese que la expresión dF/dt en el integrando del segundo miembro es la derivada temporal material o lagrangiana, es decir la derivada con respecto a t para \mathbf{y} fijo. Sea I la integral

$$I = \iiint_{D_t} \rho F \, d\mathbf{x}.$$

Por el cambio de variables dado por $\mathbf{x} = \Phi_t(\mathbf{y})$ se tiene que

$$I = \iiint_{D_0} \rho F J \, dy_1 dy_2 dy_3.$$

Estamos en un dominio fijo luego

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \iiint_{D_0} \frac{\partial}{\partial t}(\rho F J) \, d\mathbf{y} = \iiint_{D_0} \frac{\partial F}{\partial t} \rho J \, d\mathbf{y} \\ &\quad + \iiint_{D_0} F \frac{\partial}{\partial t}(\rho J) \, d\mathbf{y} = \iiint_{D_t} \rho \frac{dF}{dt} \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Cuando el segundo miembro está expresado en función de t e \mathbf{y} , las derivadas parciales $\partial/\partial t$ son derivadas temporales a \mathbf{y} fijo (que también solemos escribir d/dt). Hemos usado la ley de conservación de masa en la forma (CM2')².

IDEA INTUITIVA. Sabemos que $\rho \, d\mathbf{x} = dm$ es invariante en t :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{D_t} F \, dm = \iiint_{D_t} \frac{dF}{dt} \, dm$$

EJERCICIO 2.4. Demostrar el teorema de Reynolds en la versión siguiente:

$$(2.21) \quad \frac{d}{dt} \int_{D_t} F \, d\mathbf{x} = \int_{D_t} \frac{dF}{dt} \, d\mathbf{x} + \int_{D_t} F(\nabla \cdot \mathbf{u}) \, d\mathbf{x}.$$

Obtener de aquí la ley (2.13). Demostrar también que

$$(2.22) \quad \frac{d}{dt} \int_{D_t} F \, d\mathbf{x} = \int_{D_t} \frac{\partial F}{\partial t} \, d\mathbf{x} + \int_{D_t} \operatorname{div}(F \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} = \int_{D_t} \frac{\partial F}{\partial t} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial D_t} F \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

La última igualdad proviene del teorema de Gauss-Ostrogradskii.

2.5.II. Versión en un dominio fijo. En los cálculos anteriores hemos considerado un dominio material D_t que “se mueve con el fluido”, es decir que es variable con t y $D_t = \Phi_t(D_0)$. Es también instructivo realizar el cálculo anterior considerando la integral sobre un subdominio fijo D en que el flujo está definido por un cierto intervalo de tiempo y que tiene como frontera una superficie fija Γ .

²Nótese que en dI/dt se usa la notación d/dt como derivada de una función de una variable. Ello no implica ninguna posibilidad de confusión.

Teorema 2.5.2 Sea D un dominio espacial de frontera Γ regular en que el flujo está definido por un cierto intervalo de tiempo I . Sea F una función diferenciable en $\overline{D} \times I$. Entonces

$$(2.23) \quad \frac{d}{dt} \int_D \rho F \, d\mathbf{x} = \int_D \rho \frac{dF}{dt} \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} \rho F (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS,$$

donde \mathbf{n} es el vector normal exterior a Γ .

En comparación con (2.20) se descubre que la derivada contiene un término extra de flujo a través del borde. Este fenómeno se repetirá en sucesivos cálculos a dominio fijo. Para la demostración el lector observará que

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho F \, d\mathbf{x} = \int_D \rho \frac{\partial F}{\partial t} \, d\mathbf{x} + \int_D \frac{\partial \rho}{\partial t} F \, d\mathbf{x}$$

y utilizará (CM3') para evaluar $\partial \rho / \partial t$. Se llega a

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho F \, d\mathbf{x} = \int_D \rho \frac{dF}{dt} \, d\mathbf{x} - \int_D \nabla \cdot (\rho F \mathbf{u}) \, d\mathbf{x}.$$

Utilizamos ahora el teorema de Gauss-Ostrogradskii para transformar la última integral en una integral sobre la superficie Γ . En particular, para $F = 1$ tenemos la versión (CM4)

$$(2.24) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \int_D \rho \, d\mathbf{x} = - \int_{\Gamma} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS.}$$

El segundo miembro de esta expresión se denomina **flujo de masa saliente** a través de la superficie Γ . Es una función de t y Γ . La cantidad $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ es la velocidad normal a la superficie Γ . La cantidad ρu_n es pues la densidad de masa saliente por cm^2 y por segundo. Como dijimos en la sección 1.5, en la visión euleriana se considera este flujo como una cantidad básica, que puede ser directamente medida en principio, y por ello los libros de física fundan la ley de conservación de masa sobre la formulación (CM4). Sin embargo, el camino seguido nos ha parecido más adecuado para comprender los fundamentos matemáticos. En todo caso, cuando se formula en estos términos la ley de conservación de masa se enuncia como sigue: “la variación de la masa contenida en un dominio fijo por unidad de tiempo es precisamente el flujo saliente de masa a través de la frontera de ese dominio”.

EJERCICIO 2.5. Probar que en un dominio fijo se tiene

$$(2.25) \quad \frac{d}{dt} \int_D F \, d\mathbf{x} = \int_D \frac{\partial F}{\partial t} \, d\mathbf{x} = \int_D \left(\frac{dF}{dt} - \mathbf{u} \cdot \nabla F \right) \, d\mathbf{x},$$

en vez de (2.21).

2.6 Ley modificada

Aunque la ley de conservación de masa es un principio muy general de la física, existen circunstancias que la invalidan, como los procesos en que se dan reacciones químicas o nucleares. En esos casos la ley básica admite (en formulación euleriana) la variante

$$(2.26) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = r,$$

que tiene en cuenta la existencia de fuentes o sumideros de fluido distribuidos de intensidad $r = r(\mathbf{x}, t)$, que se puede medir en gramos por cm^3 y por segundo.

Complementos matemáticos

Dedicamos el resto del capítulo a diversos temas matemáticos complementarios que nos serán de gran utilidad en adelante.

2.7 El teorema de Gauss

Pasamos ahora a revisar un resultado básico de cálculo que utilizaremos repetidamente.

Teorema 2.7.1 (Teorema de Gauss-Ostrogradskii. *Bajo hipótesis oportunas de regularidad sobre el dominio D de frontera Γ y la función \mathbf{f} se tiene que*

$$(2.27) \quad \iint_{\Gamma} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) dS = \iiint_D (\nabla \cdot \mathbf{f}) d\mathbf{x},$$

donde $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ es el vector normal exterior a Γ en $\mathbf{x} \in \Gamma$.

La fórmula (2.27) permite dar una definición intrínseca de divergencia, independiente de las coordenadas: el valor de $\nabla \mathbf{f} = \text{div}(\mathbf{f})$ en un punto \mathbf{x} es el flujo de \mathbf{f} por unidad de volumen, tomando un pequeño volumen V en torno a \mathbf{x} y el flujo a través de la superficie frontera de V . Precisamente,

$$\text{div} \mathbf{f} = \lim_{|V| \rightarrow 0} \frac{1}{|V|} \iint_{\partial V} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

Cuando \mathbf{f} es continua, tal afirmación se cumple para todo punto, cuando es sólo integrable se cumple casi para todo punto (teorema de diferenciación de integrales, debido a LEBESGUE).

Necesitaremos una extensión del resultado clásico recién enunciado. En él \mathbf{f} es en principio una función vectorial. En el próximo capítulo aparece la misma situación aplicada

no a un campo vectorial \mathbf{f} sino a un campo matricial. En ese caso sustituimos en (2.27) $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$ por $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$, notación que indica la actuación de la matriz $\mathbf{T} = (T^{ij})$ sobre el vector \mathbf{n} . Recordamos que en física se suele denominar **tensor** a la aplicación lineal representada por una matriz en una base (es decir al objeto invariante que hay detrás de la matriz).

Teorema 2.7.2 Versión matricial. *Bajo las hipótesis oportunas anteriores, si $\mathbf{T} = (T^{ij})$ es un tensor diferenciable se tiene*

$$(2.28) \quad \iint_{\Gamma} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) dS = \iiint_D (\nabla \cdot \mathbf{T}) d\mathbf{x},$$

donde la divergencia de \mathbf{T} es un vector que se **define** en componentes como “divergencia por filas”:

$$(2.29) \quad (\nabla \cdot \mathbf{T})_i = \sum_j \frac{\partial T^{ij}}{\partial x_j}.$$

DEMOSTRACIÓN. Todas estas versiones son consecuencia de la versión más elemental del teorema que se escribe así: Si f es una función diferenciable y $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ entonces

$$(2.30) \quad \int_D \frac{\partial f}{\partial x_i} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} f n_i dS.$$

EJERCICIO 2.6*. Demostrar el siguiente teorema: si f es una función escalar diferenciable

$$(2.31) \quad \int_{\Gamma} f \mathbf{n} dS = \int_D \text{grad } f d\mathbf{x}.$$

EJERCICIO 2.7. A la hora de aplicar el teorema de Gauss nos podemos encontrar con la divergencia de un vector de la forma $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}$ (ver capítulo 4). Deducir la siguiente identidad vectorial que expresa la divergencia del producto matriz-vector

$$(2.32) \quad \nabla \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}) = (\nabla \cdot \mathbf{A}^\dagger) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{A}^\dagger : \nabla \mathbf{u},$$

donde $\nabla \cdot$ indica divergencia, \mathbf{A}^\dagger es el transpuesto de la matriz \mathbf{A} y el último sumando es el llamado (producto de) **contracción** de dos matrices

$$(2.33) \quad \mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_{ij} A_{ij} B_{ij}.$$

(b) Demostrar que el producto de contracción es un producto interno en el conjunto de las matrices 3×3 (ó $n \times n$) que define una norma

$$(2.34) \quad \|\mathbf{A}\|^2 = \mathbf{A} : \mathbf{A}.$$

Atención a no confundir $\mathbf{A} : \mathbf{A}$, un escalar, con $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, producto usual de matrices.

EL FLUJO. CUESTIÓN LINGÜÍSTICA. Usamos en español la palabra *flujo* en dos acepciones diferentes, una para designar el movimiento Φ_t (uso estándar en geometría al referirse al flujo generado por un campo de vectores, aquí \mathbf{u}) y en un sentido totalmente diferente para designar el flujo de un campo de vectores sobre una porción de superficie orientada (como en el teorema de GAUSS). Corresponde en inglés a dos palabras distintas, *flow* y *flux* respectivamente. Se puede evitar la confusión llamando al flow *movimiento* o *corriente*, lo que haremos con frecuencia, pero el lector ha de ser consciente de que la palabra flujo es de uso habitual en ambas acepciones.

2.8 Tubos de flujo

El teorema de Gauss se suele aplicar a fluidos **estacionarios**, en que ρ y \mathbf{u} no son función explícitamente del tiempo de modo que las trayectorias no cambian con el tiempo. Se toma como dominio un **tubo de flujo**, que es una figura formada por un haz de trayectorias que se apoyan en una curva cerrada γ y forman una especie de tubo S que se completa mediante dos bases o tapas transversales al tubo S_1 y S_2 . La ley de conservación de masa, que ahora se reduce a $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$, implica entonces que

$$(2.35) \quad \int_{S_1} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS,$$

dado que no existe flujo de masa a través de la pared lateral S . Compruébese.

He aquí una manera de aplicar el teorema de Gauss a fluidos no necesariamente estacionarios en $3 + 1$ variables. Se toma un dominio de referencia $D \subset \mathbb{R}^3$ con frontera regular en el que el movimiento Φ_t está definido para $t = 0$ y para $t_1 \leq t \leq t_2$ se considera el dominio

$$(2.36) \quad \{(\mathbf{x}, t) : t_1 \leq t \leq t_2, \mathbf{x} \in D_t\}.$$

tal conjunto se llama un tubo de flujo, \mathcal{T} . Los conjuntos $D_{t_1} \times \{t_1\}$ y $D_{t_2} \times \{t_2\}$ se llaman bases y $\mathcal{S} = \{(\mathbf{x}, t) : \mathbf{x} \in \partial D_t\}$ es la *frontera lateral*.

La propiedad interesante de un tubo de flujo es que el vector $(\mathbf{u}, 1)$ es tangente a la frontera lateral. Ello hace que si tomamos el campo en $3 + 1$ dimensiones $\mathbf{V} = (\rho \mathbf{u}, \rho)$ e integramos en \mathcal{T} se tenga que

$$(2.37) \quad \int \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{n}} d\tilde{S} = \iint \tilde{\text{div}} \mathbf{V} d\mathbf{x} dt,$$

donde el primer miembro está integrado en $\partial \mathcal{T}$ que es la unión de \mathcal{S} y las dos bases y las tildes se usan para designar operadores o elementos en \mathbb{R}^4 . La ley (CM3) dice exactamente que $\tilde{\text{div}} \mathbf{V} = 0$, y el primer miembro da

$$(2.38) \quad \int_{D_{t_2}} \rho d\mathbf{x} - \int_{D_{t_1}} \rho d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{S}} \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{n}} d\tilde{S}.$$

Puesto que \mathbf{V} es paralelo a \mathcal{S} , se sigue la ley de conservación de masa integral

$$(2.39) \quad \int_{D_{t_2}} \rho d\mathbf{x} = \int_{D_{t_1}} \rho d\mathbf{x}.$$

Obsérvese que la idea del cálculo se puede aplicar en principio a cualquier clase de tubo, en particular un tubo con dominio espacial fijo $\mathcal{T} = D \times [t_1, t_2]$ y se obtiene la versión integral al final del apartado 2.5.

2.9 Coordenadas curvilíneas. La divergencia

Continuando con la teoría presentada en la sección 1.8, deseamos escribir el operador divergencia introducido en (2.12) en un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales (x'_i) . Podemos intentar un cambio de coordenadas usando la *fuerza bruta*, lo que resultará sin duda engorroso y decepcionante para el lector. La idea correcta es más bien utilizar como definición de divergencia el teorema de Gauss y escribir que $g = \nabla \cdot \mathbf{f}$ si

$$(2.40) \quad \iiint_D g d\mathbf{x} = \iint_{\Gamma} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

Tomamos ahora un dominio conveniente, que será el transformado por el cambio de coordenadas T de un cubo $Q = \{(x'_i) : |x'_i| \leq a\}$. La primera integral de (2.40) da

$$(2.41) \quad \iiint_Q (g \circ T) l_1 l_2 l_3 dx'_1 dx'_2 dx'_3,$$

donde $g \circ T$ indica función de función, es decir $g(T(\mathbf{x}'))$. En cuanto a la integral de superficie tiene 6 sumandos correspondientes a las 6 caras. De acuerdo con la teoría de integrales de superficie las dos caras orientadas perpendicularmente al eje x'_1 contribuyen

$$(2.42) \quad \iint (\mathbf{f} \circ T) \cdot l_2 l_3 (\pm \mathbf{e}'_2 \times \mathbf{e}'_3) dx'_2 dx'_3 = \iint l_2 l_3 (\mathbf{f} \circ T) \cdot (\pm \mathbf{e}'_1) dx'_2 dx'_3.$$

Expresando el integrando para x'_2, x'_3 fijo como integral en x'_1 de su derivada, haciendo lo mismo con las integrales en $dx'_1 dx'_2$ y $dx'_1 dx'_3$, sumando e igualando a (2.41) se tiene

$$(2.43) \quad \operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{1}{l_1 l_2 l_3} \left[\frac{\partial}{\partial x'_1} (l_2 l_3 f'_1) + \frac{\partial}{\partial x'_2} (l_1 l_3 f'_2) + \frac{\partial}{\partial x'_3} (l_1 l_2 f'_3) \right],$$

donde escribimos $\mathbf{f} = \sum_i f'_i \mathbf{e}'_i$, luego $f'_i = \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}'_i$.

EJERCICIO 2.8. Hallar las expresiones de la divergencia en coordenadas cilíndricas y esféricas. Escribir la ley de conservación de masa.

SOLUCIÓN. Se tiene

$$(2.44) \quad \operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r f_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} f_\theta + \frac{\partial}{\partial z} f_z,$$

$$(2.45) \quad \operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(f_\theta \operatorname{sen} \theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(f_\phi),$$

en cilíndricas y esféricas respectivamente. Con ello la ley (2.18) queda en coordenadas cilíndricas

$$(2.46) \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0,}$$

y en coordenadas esféricas

$$(2.47) \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \rho u_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta \operatorname{sen} \theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho u_\phi) = 0.}$$

EJERCICIO 2.9*. Escribir la condición de incompresibilidad para un fluido plano que (a) fluye en dirección radial, (b) gira en torno al origen.

Comentario avanzado. La ecuación de continuidad es *frame indifferent*, es decir invariante ante el cambio de coordenadas. De hecho la versión lagrangiana es exactamente la versión euleriana referida a unos ejes que se mueven (paralelamente) con el flujo (compruébelo el lector).

Veremos en la lección siguiente que la ecuación de conservación del impulso no tiene esta propiedad, apareciendo nuevos términos cuando se expresa en coordenadas no inerciales.

Resumen

- Variables introducidas:

densidad de masa: ρ , medida en gr/cm^3 o kg/m^3 .

velocidad: $\mathbf{u} = (u, v, w)$, medida en cm/sg o m/sg .

- Cuadro de formas que reviste la ley de conservación de masa:

$$\begin{aligned}
 m_t(D_t) &= m_0(D_0), & \int_{D_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} &= \int_{D_0} \rho(\mathbf{y}, 0) d\mathbf{y}, \\
 \rho(\Phi_t(\mathbf{y}), t) J(\mathbf{y}, t) &= \rho(\mathbf{y}, 0), & \frac{d}{dt}(\rho J) &= 0, \\
 \frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) &= 0, & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\
 \frac{d}{dt} \int_D \rho d\mathbf{x} &= - \int_{\Gamma} \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS.
 \end{aligned}$$

Para fluidos estacionarios en un tubo de flujo

$$\int_{S_1} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS.$$

- Condición de incompresibilidad:

$$J(\mathbf{y}, t) = 1, \quad \frac{dJ}{dt} = 0, \quad \rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{y}, 0), \quad \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

- Condición de homogeneidad:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}_0, t), \quad \nabla_{\mathbf{x}} \rho = 0.$$

- El flujo de masa saliente por unidad de superficie a través de una superficie de normal exterior \mathbf{n} es

$$\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}.$$

Capítulo 3

Ley Dinámica. Conservación de la cantidad de movimiento

“Ofrezco esta obra como principios matemáticos de la filosofía natural, pues toda la dificultad de la filosofía parece consistir en pasar del movimiento a la investigación de las fuerzas de la Naturaleza, y luego demostrar los otros fenómenos a partir de esas fuerzas.”

I. NEWTON, “Principia”, prefacio

Para cumplir el objetivo de formular el problema de describir el movimiento de los fluidos, o más en general de los medios continuos, mediante un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, el siguiente paso consiste en hallar las ecuaciones a que obedece la velocidad ¹. El principio físico del que se derivan es la conservación de la cantidad de movimiento (o impulso). A ello se añade la conservación del momento de la cantidad de movimiento, que tiene consecuencias adicionales relativamente menores. Nos espera pues otro trocito de física, toda ella muy accesible por suerte. Como pago a nuestro trabajo llegaremos al concepto de **tensor de esfuerzos**, pilar fundamental de la mecánica de medios continuos.

¹Recuérdese además que al sistema de ecuaciones le deben acompañar las correspondientes condiciones adicionales iniciales y/o de contorno

3.1 La cantidad de movimiento y el tensor de esfuerzos. Ley de Newton para los fluidos

Es justo empezar la investigación de la **dinámica** de los medios continuos con la famosa *segunda ley de Newton*, que dice que

$$(3.1) \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{u}),$$

en su versión para una partícula, cf. “Principia”, 1687². En el caso de un continuo escribimos con EULER (1752) una ley global en términos de $I(D_t)$, el impulso contenido en un trozo de fluido que ocupa el volumen D_t en el tiempo t , y de la suma de las fuerzas aplicadas en D_t , que son de dos tipos, externas y superficiales. Tenemos

$$(3.2) \quad \frac{d}{dt}I(D_t) = F_{\text{total}}(D_t) = F_{\text{ext}}(D_t) + F_{\text{sup}}(D_t).$$

Hemos de usar ahora nuestros conocimientos físicos para expresar en concreto estas cantidades globales. De acuerdo con la definición de impulso, se tiene en el caso continuo

$$(3.3) \quad I(D_t) = \int_{D_t} \mathbf{u} dm_t = \int_{D_t} \mathbf{u} \rho d\mathbf{x}.$$

Por otra parte, las *fuerzas externas* se suponen asociadas a una densidad de fuerza por unidad de volumen \mathbf{f} de modo que

$$(3.4) \quad F_{\text{ext}}(D_t) = \int_{D_t} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

También se denominan *fuerzas de volumen*. Es a veces más natural escribirlas en la forma $\mathbf{f} = \rho \mathbf{f}_m$, donde \mathbf{f}_m es la *densidad de fuerza por unidad de masa*, es decir, una aceleración. Suponemos en este texto que estas fuerzas son conocidas³. La más usual es la gravedad, $\mathbf{f} = -\rho g \mathbf{k}$. Pueden también provenir de efectos de fricción, electromagnéticos, nucleares, químicos, etc.

Las fuerzas **superficiales** o **de contacto** son una de las más importantes características de los fluidos (o medios continuos en general) y explican la influencia relativa de capas de fluido contiguas. Se distinguen de las anteriores en que son fuerzas de *corto alcance*. ¡Los distintos tipos de estas fuerzas es lo que separa unas clases de fluidos de otras, como veremos a partir del capítulo 5! Para empezar, y siguiendo a Agustín Luis CAUCHY (1822)⁴ nuestra modelización de la realidad física supone que existe una **densidad superficial de fuerza**, Π , de modo que si $\Gamma_t = \partial D_t$ es la frontera (espacial) de D_t ,

²“Philosophiae Naturalis Principia Mathematica”, Pepys, London, 1687. En castellano: “Principios matemáticos de la Filosofía Natural”, Alianza Ed., Madrid, 1987.

³pues caso contrario se plantea un problema matemático de complejidad superior.

⁴Augustin Louis Cauchy, 1798 (París)-1857.

que se supone una superficie lisa, y si $dS = dS_t$ es la medida de superficie, se tiene

$$(3.5) \quad F_{\text{sup}}(D_t) = \int_{\Gamma_t} \Pi(\mathbf{x}, t) dS.$$

El segundo punto importante es que Π depende no sólo del punto (\mathbf{x}, t) de Γ_t sino también de la dirección \mathbf{n} de la normal a la superficie Γ_t en este punto. Todo lo anterior conduce a la siguiente *expresión integral de la conservación de la cantidad de movimiento*, (CI1):

$$(3.6) \quad \frac{d}{dt} \iiint_{D_t} \rho \mathbf{u} d\mathbf{x} = \iiint_{D_t} \mathbf{f} d\mathbf{x} + \iint_{\Gamma_t} \Pi dS.$$

Aún no hemos terminado, esta forma integral es demasiado general e impracticable. Don Agustín Luis probó el siguiente gran teorema en 1827:

Teorema 3.1.1 (Cauchy) *La densidad de fuerza superficial Π ha de ser una función lineal del vector normal \mathbf{n} . Es decir, existe un tensor $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ tal que*

$$(3.7) \quad \Pi(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}.$$

Definición 3.1.1 *\mathbf{S} se llama tensor de esfuerzos⁵. En coordenadas, la expresión $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$ indica el producto usual de una matriz por un vector columna.*

DEMOSTRACIÓN. Vamos a demostrar que para todo vector unitario $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ se tiene que

$$\Pi(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = n_1 \Pi(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_1) + n_2 \Pi(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_2) + n_3 \Pi(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_3).$$

Las hipótesis necesarias son suponer que las aceleraciones y fuerzas externas son acotadas y que Π es continuo en \mathbf{x} .

(I) Como primer paso consideramos un volumen dentro del medio formado por un tetraedro de vértices A, B, C y D , tal que el vector AB lleva la dirección \mathbf{e}_1 y tiene longitud a_1 , AC la dirección de \mathbf{e}_2 y longitud a_2 y AD la dirección de \mathbf{e}_3 y longitud a_3 . El tetraedro tiene cuatro caras, que denominaremos $\Gamma_1 = ACD$, $\Gamma_2 = ABD$, $\Gamma_3 = ABC$ y finalmente $\Gamma = BCD$, con normales respectivas $-\mathbf{e}_1$, $-\mathbf{e}_2$, $-\mathbf{e}_3$ y $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, donde las $n_i = \cos \gamma_i$ son los cosenos directores, proporcionales a $1/a_i$. Tenemos $n_i > 0$ para todo i . Las áreas están relacionadas por $|\Gamma_i| = |\Gamma| n_i = |\Gamma| \cos \gamma_i$ (teorema de la proyección de áreas). Aplicando al tetraedro la ley de fuerzas (CI1) se tiene

$$\int_{\Gamma} \Pi(\mathbf{n}) dS + \int_{\Gamma_1} \Pi(-\mathbf{e}_1) dS + \int_{\Gamma_2} \Pi(-\mathbf{e}_2) dS + \int_{\Gamma_3} \Pi(-\mathbf{e}_3) dS = -F_{\text{ext}} + \frac{dI}{dt},$$

donde hemos olvidado por un momento la dependencia de Π en \mathbf{x} y t . I es el término de inercia, primer miembro de (CI1). El segundo miembro de nuestra fórmula se puede

⁵o tensor de esfuerzos de Cauchy, en inglés *stress tensor*.

acotar por $V(\|\mathbf{f}\|_\infty + \|\rho\mathbf{a}\|_\infty)$, donde V es el volumen del tetraedro. Las normas L^∞ están tomadas en un entorno de A que contiene al tetraedro. Dividiendo la fórmula por $|\Gamma|$ se tiene

$$\left| \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma \Pi(\mathbf{n})dS + n_1 \frac{1}{|\Gamma_1|} \int_{\Gamma_1} \Pi(-\mathbf{e}_1)dS + n_2 \frac{1}{|\Gamma_2|} \int_{\Gamma_2} \Pi(-\mathbf{e}_2)dS + n_3 \frac{1}{|\Gamma_3|} \int_{\Gamma_3} \Pi(-\mathbf{e}_3)dS \right| \leq \frac{V}{|\Gamma|} (\|\mathbf{f}\|_\infty + \|\rho\mathbf{a}\|_\infty).$$

A continuación consideramos este cálculo para un tetraedro homotético a escala $\varepsilon > 0$, teniendo pues lados εa_i , volúmen $V_\varepsilon = \varepsilon^3 V$ y áreas laterales $|\Gamma_i^\varepsilon| = \varepsilon^2 |\Gamma_i|$. En el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ observamos que el segundo miembro de anula y que se cumple la regla de derivación de una integral

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Gamma^\varepsilon|} \int \int_{\Gamma^\varepsilon} \Pi(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})dS = \Pi(A, t, \mathbf{n}),$$

y fórmulas similares en las otras caras. Se tiene así que

$$(3.8) \quad \Pi(A, t, \mathbf{n}) + n_1 \Pi(A, t, -\mathbf{e}_1) + n_2 \Pi(A, t, -\mathbf{e}_2) + n_3 \Pi(A, t, -\mathbf{e}_3) = 0.$$

Hemos obtenido esta relación para $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ con $n_i > 0$. La misma igualdad con cambio de signo de algún n_i se obtiene cambiando la orientación del tetraedro. En caso de que algún n_i se anule basta con repetir el razonamiento tras girar los ejes (también se puede tomar una figura de paralelepípedo en vez del tetraedro). Con ello concluimos que (3.8) es cierto para todo vector unitario \mathbf{n} . El razonamiento anterior puede resumirse así: dado el distinto rango de las fuerzas de contacto y de las externas, *existe equilibrio local de las fuerzas de contacto*, reflejado en (3.8).

(II) En un segundo paso consideramos el efecto del cambio de orientación en el vector normal. Tomemos una bola B de radio ε centro \mathbf{x}_0 y dividámosla mediante un plano de normal \mathbf{e}_1 en dos semiesferas B_1 y B_2 con superficies exteriores Γ_1 y Γ_2 y sea Γ la superficie plana común a las dos semiesferas, orientada con normal exterior \mathbf{e}_1 en B_1 y $-\mathbf{e}_1$ en B_2 . Razonando como antes, se llega a

$$\begin{aligned} \int \int_{\Gamma_1} \Pi dS + \int \int_{\Gamma_2} \Pi dS &= O(\varepsilon^3), \\ \int \int_{\Gamma_1} \Pi dS + \int \int_\Gamma \Pi(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_1) dS &= O(\varepsilon^3), \\ \int \int_{\Gamma_2} \Pi dS + \int \int_\Gamma \Pi(\mathbf{x}, t, -\mathbf{e}_1) dS &= O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

correspondiendo a la ley de conservación aplicada a B , a B_1 y a B_2 respectivamente. Restando, dividiendo por ε^2 y haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ se tiene

$$(3.9) \quad \Pi(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_1) + \Pi(\mathbf{x}, t, -\mathbf{e}_1) = 0.$$

La misma igualdad se obtiene en cualquier otra dirección. Este paso se puede resumir como la *igualdad de las fuerzas de acción y reacción*.

A partir de (3.8) y (3.9) se obtiene la igualdad deseada para $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$. \square

En una base determinada \mathbf{S} viene descrita por una matriz $\mathbf{S} = (S^{ij})$, de forma que si

$$\Pi = (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3), \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3),$$

y entonces

$$\Pi_i = \sum_j S^{ij} n_j.$$

Definición 3.1.2 *Los esfuerzos normales S^{ii} (colineales con \mathbf{n}) se denominan esfuerzos de tensión si $S^{ii} > 0$, de compresión si $S^{ii} < 0$. Los esfuerzos no diagonales, como S^{12} , se denominan esfuerzos cortantes o de cizalladura⁶.*

Nótese que cada una de las componentes es una fuerza por unidad de superficie: así, S^{12} mide la fuerza paralela al eje \mathbf{e}_1 actuando en una superficie de área unidad y normal \mathbf{e}_2 .

VERSIÓN DIFERENCIAL. Deseamos llegar a una versión de la ley (CI1) sin integrales. Para ello hemos de transformar la integral de superficie en integral de volumen y también hemos de derivar bajo el signo de integración. Los resultados de la lección anterior resuelven ambos problemas. Así, a partir de (CI1) y el teorema de Cauchy se tiene:

$$(3.10) \quad \frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_{D_t} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} \, d\mathbf{x} = \int_{D_t} (\mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{S}) \, d\mathbf{x}, \quad \forall D_t \subset \Omega.$$

Debido a la arbitrariedad de D concluimos la versión (CI2), que expresa el equilibrio de fuerzas a nivel puntual:

$$(3.11) \quad \boxed{\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{S}.}$$

El primer miembro es el *término de inercia*, masa por aceleración. El segundo se descompone en dos sumandos, uno de las *fuerzas externas*, que es común con la mecánica clásica, y el otro de las *fuerzas de contacto*, que caracteriza la dinámica del medio continuo (fluido). Es la ley fundamental que describe la dinámica del fluido y es de gran utilidad visualizar la ecuación (3.11) como *el equilibrio de fuerzas que actúan sobre una partícula fluida ideal*.

En capítulos sucesivos esta ley tomará las formas clásicas de Euler y Navier-Stokes cuando derivemos expresiones adecuadas para el tensor \mathbf{S} que tengan en cuenta las propiedades del tipo de fluido que queremos describir en cada caso. Equivalentemente se escribe (CI2') como:

$$(3.12) \quad \boxed{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{S}.}$$

⁶ *shear stress* en inglés.

OBSERVACIÓN. En el tratamiento matemático es preciso prestar gran atención al significado del término convectivo $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$, que proviene de la regla de derivación material en t , pues es un término no lineal. En coordenadas significa

$$((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u})_i = \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Recordemos que en notación usual hoy día en las matemáticas este tipo de operador se escribiría como derivada direccional, $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = D_{\mathbf{u}}\mathbf{u}$, o aún como

$$(\nabla\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = (D\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u},$$

producto de la matriz jacobiana de \mathbf{u} por el vector \mathbf{u} . El signo de producto \cdot entre matriz y vector es opcional.

EJERCICIO 3.1. Deducir las formas del operador $\mathbf{u} \cdot \nabla$ en coordenadas cilíndricas y esféricas:

$$(3.13) \quad \mathbf{u} \cdot \nabla = u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial}{\partial z},$$

$$(3.14) \quad \mathbf{u} \cdot \nabla = u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

3.2 Primera idea de los sistemas completos

Veamos ahora algunos casos de aplicación de las leyes obtenidas.

3.2.1. Comenzamos por **una dimensión de espacio**. Entonces S es un escalar, que podemos denotar $S = -p(\mathbf{x}, t)$ sin pérdida de generalidad. Este es un caso muy simple y no completamente artificial pues lo podemos pensar como el flujo de agua en un canal lineal. Es un buen ejemplo para empezar.

EJERCICIO 3.2. (a) Escribir el sistema (CM)-(CI) en una dimensión espacial.

(b) Suponer además que la densidad es constante y la fuerza cero. Hallar la solución general.

(c) En el caso anterior identificar la solución única mediante condiciones iniciales para u y de contorno para p . ¿Han de cumplir alguna restricción? Enunciar precisamente el teorema y escribir en detalle la fórmula de u y p .

(d) ¿Qué sucede cuando ρ no es constante? ¿Y cuándo la fuerza es la de la gravedad, siendo x la coordenada vertical?

Desarrollaremos este ejemplo con más detalle en el capítulo 5, ejemplo 5.4.

3.2.2. Pasamos ahora a los flujos **multidimensionales**. Nos centraremos aquí en los modelos más sencillos, los **fluidos perfectos**, que son aquellos en que \mathbf{S} es una matriz isótropa, en notación usual

$$\mathbf{S} = -p(\mathbf{x}, t) \mathbf{I}.$$

Entonces se tiene $\operatorname{div} \mathbf{S} = -\nabla p$, luego

$$(3.15) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p.$$

Estos fluidos fueron introducidos por Euler en 1755, mucho antes pues del análisis de Cauchy. El modelo matemático de los fluidos perfectos contiene efectos de tensión o *empuje*, pero no los cortantes o de *arrastre*.

EJERCICIO 3.3*. (a) Escribir el sistema de leyes (CM)-(CI) en coordenadas en tres dimensiones. Utilizar las notaciones usuales $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{u} = (u, v, w)$.

(b) Escribir el sistema de los fluidos perfectos en el caso incompresible.

Estudiaremos con detalle este importante tipo de fluidos (perfectos incompresibles, lo que se adapta al comportamiento de los líquidos) en el capítulo 5. Los gases, que son esencialmente compresibles, pueden ser perfectos. La teoría de los gases compresibles perfectos se desarrolla en el capítulo 7.

(c) Hacer la hipótesis adicional (ya contemplada por Euler como modelo de la *elasticidad del fluido*) de que p es una función creciente conocida de ρ , que no se supone constante, y escribir en 1D el sistema de los gases compresibles (típico por ejemplo de la acústica).

Veremos este sistema con detalle en el capítulo 7, ver sección 7.6.

El estudio de los fluidos perfectos, tanto incompresibles como compresibles, ha sido el objeto preferente de la Hidrodinámica teórica y ha motivado muy importantes desarrollos matemáticos, notablemente en análisis, variable compleja, geometría y topología. Pero en algunos aspectos prácticos de interés el acuerdo con la realidad es muy pobre, lo cual ya fue observado por los científicos del siglo XVIII y motivó la búsqueda de modelos más sofisticados, búsqueda que ocupó el siglo XIX y que en un sentido aún continúa.

3.3 Simetría del tensor de esfuerzos

Para una masa puntual la ley (3.2) es suficiente para describir la dinámica. Para un cuerpo extenso, aparte de la ley de conservación del impulso o cantidad de movimiento ya examinada, se tiene una ley adicional de conservación del momento angular (o momento de esta cantidad de movimiento). Veremos que se reduce casi a la misma ley anterior, con una consecuencia adicional, que el tensor de esfuerzos ha de ser simétrico. Para demostrarlo procedemos como sigue: en nuestra situación la ley de conservación del momento se escribe

$$(3.16) \quad \frac{d}{dt} \iiint_{D_t} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} = \iiint_{D_t} (\mathbf{x} \times \mathbf{f}) \, d\mathbf{x} + \iint_{\Gamma_t} (\mathbf{x} \times \Pi) \, dS,$$

donde $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ denota producto vectorial de dos vectores, que se puede también describir como

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i a_j b_k,$$

siendo ε_{ijk} el tensor cuyas componentes valen 0 si algún índice se repite, 1 si la permutación ijk es par, y -1 si es impar (ver sección 1.9). Tenemos

$$(3.17) \quad \iiint_{D_t} \rho \mathbf{x} \times \left(\frac{d}{dt} \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \mathbf{f} \right) d\mathbf{x} = \iint_{\Gamma_t} \mathbf{x} \times (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

Hemos de evaluar el último factor. Utilizando la convención de sumación de índices repetidos se tiene para todo i

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma_t} (\mathbf{x} \times \mathbf{S} \cdot \mathbf{n})_i dS &= \iint_{\Gamma_t} \varepsilon_{ijk} x_j S^{kl} n_l dS = \iiint_{D_t} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l} (x_j S^{kl}) d\mathbf{x} = \\ &= \iiint_{D_t} \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_l} (S^{kl}) d\mathbf{x} + \iiint_{D_t} \varepsilon_{ijk} \delta_{jl} S^{kl} d\mathbf{x} = \\ &= \iiint_{D_t} (\mathbf{x} \times \operatorname{div} \mathbf{S})_i d\mathbf{x} + \iiint_{D_t} \varepsilon_{ilk} S^{kl} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, 0 en caso contrario). Introduciendo esto en (3.17) y teniendo en cuenta la ley (CI2') nos queda que para todo dominio D_t

$$\sum_{i,k,l} \mathbf{e}_i \iiint_{D_t} \varepsilon_{ilk} S^{kl} d\mathbf{x} = 0.$$

Teniendo en cuenta el significado de ε_{ilk} se deduce que el integrando que acompaña por ejemplo a \mathbf{e}_1 es $S^{32} - S^{23}$, que ha de ser cero. En general se deduce que $S^{kl} - S^{lk} = 0$ para todo l y k .

Direcciones principales

Debido a la propiedad de simetría, el tensor de esfuerzos está representado por una matriz simétrica con respecto a cualquier sistema de ejes ortogonales. Por consiguiente, existe una base del espacio respecto a la cual el tensor está representado por una matriz diagonal. Con respecto a esos ejes no existen pues esfuerzos tangenciales. Las direcciones de esos ejes se llaman *direcciones principales de esfuerzos*. Obsérvese que pueden variar de punto a punto.

3.4 Ejes no inerciales. Aceleración de Coriolis

La ecuación del impulso *no* es indiferente al cambio de ejes inerciales. Escrita respecto a ejes no inerciales, la expresión de la ley cambia para incluir nuevos términos, que se visualizan como *fuerzas ficticias*. Este es un tema bien conocido en la mecánica clásica. Veamos

el cálculo en el caso de ejes rotatorios que se mueven según el cambio de coordenadas introducido en la subsección 1.8.5:

$$(3.18) \quad \mathbf{x} = \mathbf{R}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{x}',$$

con $(d/dt)\mathbf{A} = \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{A}$, eje de giro $\boldsymbol{\Omega}(t)$ y velocidad angular $|\boldsymbol{\Omega}(t)|$. Pongamos para más sencillez $\mathbf{R} = \mathbf{0}$. Hemos visto que la velocidad respecto a unos ejes fijos en el espacio se descompone entonces como

$$(3.19) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x},$$

donde \mathbf{u}' es la velocidad tal como la percibe el observador que se mueve con los ejes rotatorios. Aplicando a (3.19) la regla

$$\frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} + \boldsymbol{\Omega}(t) \times,$$

obtenemos para la aceleración $d\mathbf{u}/dt = d^2\mathbf{x}/dt^2$ referida a los ejes fijos la descomposición

$$(3.20) \quad \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{x}'}{dt^2} + 2\boldsymbol{\Omega}(t) \times \frac{d\mathbf{x}'}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{x}' + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}').$$

Vemos que la aceleración tal como se ve en los ejes móviles viene acompañada de tres términos. Pasando éstos al segundo miembro podemos escribir la ecuación dinámica $\rho(d\mathbf{u}/dt) = -\nabla p + \mathbf{f}$ respecto a los ejes móviles, es decir en función de \mathbf{x}' y t , en la forma

$$(3.21) \quad \rho' \frac{d^2\mathbf{x}'}{dt^2} = -\nabla_{\mathbf{x}'} p' + \mathbf{f}' + \mathbf{f}'_f,$$

donde \mathbf{f}' es el vector de fuerza externa, expresado en los nuevos ejes mediante el cambio de coordenadas usual, y la fuerza ficticia está dada por

$$(3.22) \quad \boxed{\mathbf{f}'_f = -2\rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}' - \rho \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}') - \rho \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{x}' .}$$

El primer término es la famosa *fuerza de Coriolis*,⁷ que es perpendicular a \mathbf{u}' y $\boldsymbol{\Omega}$. El término $\rho \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}')$ es la *fuerza centrípeta*. El último término no tiene un nombre usual y desaparece cuando la rotación es uniforme. Una vez referido todo a los ejes móviles podemos suprimir las primas en las fórmulas. La consideración de estas fuerzas, en particular la fuerza de Coriolis, es fundamental en el estudio de los fenómenos atmosféricos referidos a ejes fijos sobre la Tierra. En efecto, en ese caso $\boldsymbol{\Omega}$ se supone constante, la aceleración centrípeta no es importante y la aceleración $d^2\mathbf{R}(t)/dt^2$ de la Tierra respecto a las estrellas tampoco.

EJERCICIO 3.4 (a) Demostrar la fórmula de las aceleraciones (3.21) usando coordenadas.

⁷El matemático francés G. Coriolis, 1792-1843, fue el primero en estudiar la influencia de la rotación de la Tierra sobre las ecuaciones del movimiento escritas respecto a ejes fijos sobre la misma en 1835.

(b) Demostrar que si tenemos un término de traslación del origen $\mathbf{R}(t)$ la fuerza ficticia tiene un término suplementario $-\rho d^2\mathbf{R}(t)/dt^2$. Éste se interpreta como la fuerza aparente que compensa por el movimiento traslacional acelerado de los ejes móviles.

Otros ejercicios del capítulo

EJERCICIO 3.5*. Escribir la ley de conservación (CI2) en la forma equivalente (CI3):

$$(3.23) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\mathbf{u}) = \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{S},$$

donde $\mathbf{u}\mathbf{u} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ es la matriz *producto diádico*. Se define: $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = (a_{ij})$ con $a_{ij} = u_i v_j$. Concluir que en un dominio fijo

$$(3.24) \quad \frac{d}{dt} \int_D \rho \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_D \mathbf{f} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial D} \mathbf{S} \mathbf{n} \, dS - \int_{\partial D} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS.$$

Los dos últimos términos se escriben en coordenadas

$$\sum_j \int_{\partial D} S^{ij} n_j \, dS - \sum_j \int_{\partial D} \rho u_i u_j n_j \, dS.$$

Resumen

- Nuevas variables:

presión : $p(\mathbf{x}, t)$, con unidades: la *baria*= 1 dina/cm²=, el *pascal*= 1 newton/m²= 10 barías. Para las unidades usadas en climatología ver cap. 9.

tensor de esfuerzos: $\mathbf{S} = (S^{ij})$, mismas unidades.

- He aquí el cuadro de formas que reviste la ley de conservación de la cantidad de movimiento

$$\frac{d}{dt} \iiint_{D_t} \rho \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \iiint_{D_t} \mathbf{f} \, d\mathbf{x} + \iint_{\Gamma_t} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{S}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{S},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{S}.$$

- Para fluidos perfectos

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = -\nabla p.$$

- El flujo de impulso saliente a través de una superficie de normal exterior \mathbf{n} es

$$\rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{S} \mathbf{n}$$

por unidad de superficie.

Capítulo 4

La conservación de la energía. El calor y la temperatura

Se introduce en este capítulo la última de las leyes de conservación básicas, que afirma la conservación de la energía total. Se introduce la energía interna, se deduce para ella la ecuación de conservación de Neumann y se analiza el término de interacción hidrodinámica-termodinámica. Se deduce a continuación la ecuación del calor bajo varios supuestos.

4.1 Variables termodinámicas. Concepto de energía interna

La ley de conservación de masa (CM3) y la ley de conservación de la cantidad de movimiento (CI2) constituyen (en el espacio tridimensional) un sistema de 4 ecuaciones involucrando $3+1+6$ incógnitas escalares, a saber: \mathbf{u} , ρ , y \mathbf{S} . Se sigue de ello que, en la situación más general, la descripción del movimiento de un medio continuo exige nuevas leyes. Éstas son de dos tipos. Por un lado, una nueva ley general del tipo de las anteriormente vistas, la *ley de conservación de la energía*, con que completamos el elenco de leyes de conservación; por otro, leyes específicas de los fluidos llamadas *leyes constitutivas*, a las que dedicamos los capítulos siguientes y que explican qué forma tiene el tensor \mathbf{S} .

El estudio de la energía, el calor y la temperatura es natural en la Mecánica de Fluidos como parte de la Física, pues es bien sabido que el calor y la temperatura juegan un papel en el comportamiento de muchos fluidos, por ejemplo en la atmósfera. La teoría física sobre el calor no se desarrolló hasta mediados del siglo XIX cuando se pudo disipar el mito del *calórico* y se comprendió que el calor es una forma de energía. La primera formulación de un principio general se debe al médico alemán J. R. MAYER, que en 1842 enunció (en

términos aún vagos) la Ley de Conservación para la Energía Total de un sistema. Los trabajos de J. JOULE¹ y H. HELMHOLTZ establecieron la equivalencia calor-trabajo y el hecho de que *los cambios de energía de un sistema material equivalen a la cantidad de calor suministrada al sistema más el trabajo realizado por las fuerzas exteriores sobre el sistema*. Así se resume el **Primer Principio de la Termodinámica**. La energía puede pues transformarse de la forma mecánica a la calorífica, representada en la energía interna, y viceversa.

Para comprender intuitivamente la aparición de esta energía en el estudio de los fluidos hemos de regresar a la modelización. Según hemos dicho en el capítulo 1, la realidad de un fluido físico se imagina sustituida por un medio continuo formado por “partículas fluidas” de volumen muy pequeño V , dotadas de una velocidad media \mathbf{u} y una masa ρV . Al describir la evolución de tales partículas observamos primero que se deforman con el movimiento. Según la Mecánica clásica obedecen a una ecuación dinámica, que hemos examinado en el capítulo precedente, y cuya estructura de fuerzas aún no hemos terminado de precisar.

Para continuar observamos que las partículas tienen una energía cinética de traslación de valor $(1/2)\rho\mathbf{u}^2$, exactamente como si fuesen masas puntuales. Pero dado que no lo son, también tendrán una energía de rotación e incluso una energía de vibración. Cuando consideramos conjuntos enormes de tales partículas, a escala microscópica, estas últimas energías dan origen a una magnitud global, la *energía interna*, que se percibe experimentalmente como *calor* y cuya intensidad da origen al concepto de *temperatura*. La Mecánica Estadística explica racionalmente cómo estas magnitudes macroscópicas se originan a partir de las energías individuales de las moléculas, que son los componentes reales que existen bajo la fachada ideal de los fluidos: la energía interna y la temperatura son cantidades macroscópicas que representan un promedio estadístico de fenómenos microscópicos, como las rotaciones y vibraciones moleculares y los potenciales intermoleculares. Afortunadamente, el desarrollo de una teoría de los fluidos no necesita de un estudio detallado de estos fenómenos estadísticos.

El estudio sistemático de los intercambios de energía a nivel macroscópico, y la relación con el calor y el trabajo es el objeto de la **Termodinámica**. Se trata de una ciencia nada trivial de la que nosotros cubriremos en su momento los detalles que nos son esenciales y que son relativamente accesibles. Punto de partida es admitir la existencia de una serie de magnitudes llamadas *variables de estado* (termodinámicas) que describen el estado (energético) del sistema en un momento dado sin tener que recurrir a su historia pasada. Una de ellas es la **densidad** ρ (o su inversa, el **volumen específico** v). En este momento necesitamos postular la existencia de una nueva magnitud escalar e , llamada **energía interna específica**², que unida a la energía cinética, de densidad $(1/2)\mathbf{u}^2$, constituyen la energía total, de densidad E . Además, la energía interna está íntimamente relacionada

¹en su honor el julio es una unidad de trabajo.

²específica quiere decir por unidad de masa. En los libros de Termodinámica se designa la energía interna por U , lo que no hacemos aquí por temor a la confusión con la velocidad.

con otra variable termodinámica, la **temperatura**, que es la magnitud más comúnmente usada en la vida práctica.

En su mayor generalidad las variables dinámicas, como la velocidad, y las termodinámicas recién mencionadas vienen regidas por leyes que las relacionan entre sí, es decir por sistemas de ecuaciones diferenciales acoplados. Pero en casos afortunados, el sistema *se desacopla* y podemos estudiar la dinámica sin tener que preocuparnos de los procesos térmicos y al revés. El desacoplamiento de la dinámica ocurre en los procesos incompresibles que estudian en los capítulos 5 y 6, por lo que el alumno interesado en ellos puede prescindir en una primera lectura de este capítulo.

4.2 La ley de conservación

Se postula una ley de conservación para la energía total de un sistema contenida en el volumen móvil D_t ,

$$(4.1) \quad \mathcal{E}(D_t) = \int_{D_t} \rho E(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad E = \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + e,$$

de acuerdo con el Primer Principio, en este dominio material los cambios de energía sólo se deben a la cantidad de calor suministrada al sistema más el trabajo realizado por las fuerzas exteriores. En concreto la transformación sucede de forma que si el calor es extraído del sistema, o el trabajo realizado por el sistema, estas contribuciones serán negativas. Ello se traduce en la expresión general (que el lector comparará con la ley de conservación de la cantidad de movimiento):

$$(4.2) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E}(D_t) = P_{ext}(D_t) + P_{sup}(\Gamma_t) + Q(D_t) - \Phi(\Gamma_t),$$

donde P_{ext} denota el trabajo por unidad de tiempo, es decir, la potencia realizada por las fuerzas exteriores:

$$P_{ext}(D_t) = \int_{D_t} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x},$$

P_{sup} es la potencia de las fuerzas superficiales:

$$P_{sup}(\Gamma_t) = \int_{\Gamma_t} \Pi \cdot \mathbf{u} dS,$$

Q designa el aporte o pérdida de calor (fuentes o sumideros de calor distribuidos) con una densidad de q , proveniente de efectos de reacción química, radiación u otros³:

$$Q(D_t) = \int_{D_t} q d\mathbf{x},$$

³se mide en calorías por cm^3 y segundo.

y finalmente, Φ es el flujo de energía calorífica saliente a través de Γ_t , debido a fenómenos de conducción y radiación. Usualmente la parte de conducción de calor es la más importante. Haremos también la hipótesis de que Φ admite una densidad \mathbf{J} :

$$\Phi(D_t) = \int_{\Gamma_t} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Con todo ello obtenemos en concreto la siguiente versión de la ley:

$$(4.3) \quad \int_{D_t} \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + e \right) d\mathbf{x} = \int_{D_t} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + q) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_t} (\Pi \cdot \mathbf{u} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

Nos interesa ahora aislar de aquí la evolución de la energía interna, dado que ya conocemos la ley de evolución de \mathbf{u} . En efecto, a partir de las secciones precedentes podemos calcular la variación de la energía cinética

$$(4.4) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\text{cin}}(D_t) = \frac{d}{dt} \int_{D_t} \frac{\rho}{2} \mathbf{u}^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{D_t} \rho \frac{d}{dt} \mathbf{u}^2 d\mathbf{x} = \int_{D_t} \rho \mathbf{u} \frac{d\mathbf{u}}{dt} d\mathbf{x}.$$

De acuerdo con la ley de conservación del impulso tenemos entonces

$$(4.5) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\text{cin}}(D_t) = \int_{D_t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} + \int_{D_t} \mathbf{u} \cdot \text{div} \mathbf{S} d\mathbf{x}.$$

Por otra parte, la potencia de las fuerzas de contacto se divide en dos componentes al aplicar el teorema de Gauss.

Lema 4.2.1 *Se tiene la siguiente descomposición:*

$$(4.6) \quad \int_{\Gamma_t} \Pi \cdot \mathbf{u} dS = \int_{D_t} \mathbf{u} \cdot \text{div} \mathbf{S} d\mathbf{x} + \int_{D_t} \mathbf{S} : \mathbf{D} d\mathbf{x}.$$

donde \mathbf{D} es la parte simétrica del tensor $\nabla \mathbf{u}$:

$$(4.7) \quad \boxed{D^{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)},$$

denominada matriz de las velocidades de deformación (*rate of strain* en inglés).

DEMOSTRACIÓN. Poniendo todo en coordenadas y aplicando Gauss se tiene

$$(4.8) \quad \int_{\Gamma_t} (\Pi \cdot \mathbf{u}) dS = \sum_{i,j} \int_{\Gamma_t} u_i S^{ij} n_j dS = \int_{D_t} \mathbf{u} \cdot \text{div} \mathbf{S} d\mathbf{x} + \sum_{i,j} \int_{D_t} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} S^{ij} d\mathbf{x}.$$

Algunos lectores preferirán realizar este cálculo en forma más sintética. He aquí la forma: el integrando de la expresión a la izquierda es $\langle \mathbf{u}, \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle$ dado que \mathbf{S} es simétrica.

Denotamos por \langle , \rangle el producto escalar para mayor visibilidad. De acuerdo con el ejercicio 2.7 se tiene que

$$\operatorname{div}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}) = \operatorname{div} \mathbf{S} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{S} : \nabla \mathbf{u}.$$

Dado que \mathbf{S} es una matriz simétrica, es fácil ver que se puede sustituir en la expresión última $\nabla \mathbf{u}$ por $\nabla \mathbf{u}^\dagger$, o bien por la parte simétrica $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\dagger)$:

$$(4.9) \quad \sum_{i,j} S^{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_{i,j} S^{ij} D^{ij} = \mathbf{S} : \mathbf{D},$$

Como dijimos en el capítulo 2, la nueva operación entre matrices cuadradas, $(:)$, llamada **contracción**, produce un escalar mediante la fórmula

$$(4.10) \quad \mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_{ij} A_{ij} B_{ij} = \operatorname{Traza}(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{B}).$$

La contracción es una generalización del producto escalar de vectores a matrices (se extiende en general a tensores de orden superior). Recordamos que no se debe confundir la contracción de dos matrices con su producto usual (o producto de composición). \square

Al sustituir la expresión (4.6) en la ley de conservación (4.3) se ve que la primera integral de (4.6) es absorbida por la variación de la energía cinética (4.5), mientras que la segunda:

$$(4.11) \quad W = \int_{D_t} \mathbf{S} : \mathbf{D} \, d\mathbf{x}$$

contribuye a la variación de la energía interna. Este término refleja un *trabajo* realizado por unidad de tiempo (es decir, una potencia desarrollada) por el fluido al deformarse. Una parte de esta potencia es recuperable, pero otra se disipa irremediabilmente en forma de calor (proceso irreversible), como veremos al estudiar los fluidos viscosos. Tenemos pues,

$$(4.12) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\text{cin}}(D_t) = \int_{D_t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_t} (\Pi \cdot \mathbf{u}) \, dS - \int_{D_t} (\mathbf{S} : \mathbf{D}) \, d\mathbf{x}.$$

Descontando de la fórmula (4.3) el valor de la variación de la energía cinética, (4.12), se obtiene la ley de la energía interna (CE1):

$$(4.13) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\text{int}}(D_t) = \int_{D_t} \rho \frac{de}{dt} \, d\mathbf{x} = \int_{D_t} (q + \mathbf{S} : \mathbf{D} - \operatorname{div} \mathbf{J}) \, d\mathbf{x},$$

que da la fórmula puntual (CE2):

$$(4.14) \quad \boxed{\rho \frac{de}{dt} = \mathbf{S} : \mathbf{D} + q - \operatorname{div} \mathbf{J}.}$$

Esta ecuación es atribuida a C. NEUMANN (y también a KIRCHHOFF y MAXWELL). Relaciona los incrementos de energía interna (primer miembro), el trabajo por unidad de

tiempo ($\mathbf{S} : \mathbf{D}$) y el aporte de calor ($q - \operatorname{div} \mathbf{J}$). Esta es pues una expresión concreta del famoso *Primer Principio de la Termodinámica* antes aludido.

El término $\mathbf{S} : \mathbf{D}$ es el término de acoplamiento entre las ecuaciones del movimiento (ecuaciones hidrodinámicas) y la ecuación energética.

Comentarios

1) La **Termodinámica** es la ciencia que se ocupa de las transformaciones de calor en trabajo mecánico y viceversa. Los trabajos de JOULE, CARNOT y MAYER entre 1824 y 1842 permitieron reconocer que el calor es una forma de energía y establecer las leyes de transformación de las que (CE2) es expresión. Nos ocuparemos con algún detalle de las ideas y terminología termodinámicas en el estudio de los fluidos compresibles, Capítulo 7.

2) Hemos avanzado en el proyecto de obtener un sistema completo de ecuaciones que rijan la evolución de los fluidos mediante una nueva ecuación de conservación, que hemos de añadir a las (CM3) y (CI2). Sin embargo ello se ha hecho a costa de introducir una serie de nuevas incógnitas, e , q y \mathbf{J} , con lo que las cuentas parecen ir de mal en peor. Y a todo esto, aún no ha aparecido una magnitud importante, la temperatura absoluta T . El lector se preguntará cómo salir del embrollo. Pues bien, a partir de aquí entran en juego las llamadas *leyes constitutivas*, que permiten relacionar estas magnitudes haciendo intervenir las propiedades físicas concretas del material considerado. Se pasa así del estudio completamente general a uno más concreto, y ello nos permitirá **cerrar el problema**.

3) Es preciso señalar que una parte apreciable de la mecánica de fluidos no hará uso de la ley de conservación de la energía (CE2), pues podremos prescindir totalmente de la energía interna (caso incompresible), o hacer hipótesis que relacionen directamente p y ρ en el caso compresible (gases barotrópicos). Todo ello se verá con detalle en los próximos capítulos.

EJERCICIO 4.1. Si en el estudio de la energía suponemos que \mathbf{f} deriva de un potencial estacionario, más precisamente si $\mathbf{f} = -\rho \nabla U(\mathbf{x})$, tenemos que

$$P_{ext} = - \int_{D_t} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla U \, d\mathbf{x} = - \int_{D_t} \rho \frac{d}{dt} U(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho U(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

dado que $dU/dt = \mathbf{u} \cdot \nabla U$, y la ley de conservación de la energía es equivalente a

$$(4.15) \quad \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{u})^2 + e + U \right) = \operatorname{div} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}) + q - \operatorname{div} \mathbf{J}.$$

Ésta es una ley de conservación para la suma de las 3 densidades de energía: cinética, interna y potencial. Cuando la fuerza es la gravedad se tiene $\mathbf{f} = -\rho g \mathbf{k}$ y $U = gz$ (con $\mathbf{x} = (x, y, z)$). Recordemos que existen en la práctica fuerzas no conservativas, como las de fricción, que provocan disipación irreversible de energía.

EJERCICIO 4.2. (a) Demostrar que para los fluidos perfectos en que $\mathbf{S} = -p(\mathbf{x}; t) \mathbf{I}$, el término de trabajo de deformación, (4.11), toma la forma

$$(4.16) \quad \mathbf{S} : \mathbf{D} = -p(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \frac{p d\rho}{\rho dt}.$$

Concluir qué relación existe entre contracción de un fluido perfecto ($d\rho/dt > 0$) y aumento de energía interna. Este tema se tratará en detalle en el Capítulo 7 al estudiar los fluidos perfectos compresibles.

(b) Demostrar que el término $\operatorname{div}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{u})$ que aparece en (4.15) toma la forma

$$(4.17) \quad \operatorname{div}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}) = -\nabla p \cdot \mathbf{u} - p(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \frac{\partial p}{\partial t} - \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right).$$

EJERCICIO 4.3. (a) Demostrar que cuando se toma un volumen fijo D en el fluido la fórmula de variación de la energía es

$$(4.18) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\text{cin}}(D) = \int_D \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} (\Pi \cdot \mathbf{u}) dS - \int_D (\mathbf{S} : \mathbf{D}) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} \frac{1}{2} \rho (\mathbf{u})^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

Comparar con la fórmula para un dominio material. El nuevo término que aparece en un dominio fijo se denomina *flujo de energía cinética a través de $\Gamma = \partial D$* .

(b) Escribir la fórmula correspondiente para la energía total.

4.3 Transporte de calor en un medio en reposo

Podemos adelantar el espíritu del estudio pendiente con una aplicación clásica de la ley (CE2). Es típico que se suponga con gran aproximación que $e = CT$, siendo T la **temperatura absoluta** y C una constante positiva, característica del cuerpo, llamada el calor específico. Además se supone la ley de transporte del calor de FOURIER:

$$\mathbf{J} = -k\nabla T,$$

(ley del transporte por conducción, donde k es una constante llamada conductividad térmica; se desprecia el aporte por radiación). Estos son ejemplos de relaciones constitutivas. Veamos qué sucede con la ley (CE2) bajo estas hipótesis en el caso límite en que suponemos que el fluido está en reposo, $\mathbf{u} = 0$. Entonces $\rho(x, t) = \rho(x)$ y $d/dt = \partial/\partial t$ por lo que nos queda

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = q - \operatorname{div} \mathbf{J}.$$

Con las hipótesis anteriores y suponiendo q dada se llega así a

$$(4.19) \quad \boxed{C\rho \frac{\partial T}{\partial t} = k\Delta T + q,}$$

que es la **ecuación del calor** clásica, de la que (CE2) es una generalización que permite describir intercambios de energía en medios móviles, apareciendo entonces el acoplamiento con la hidrodinámica.

En condiciones estacionarias ($\partial T/\partial t = 0$) se obtiene a partir de (4.15) la ecuación de LAPLACE-POISSON,

$$(4.20) \quad \boxed{\Delta T = f},$$

donde $f = -q/k$. Esta ecuación, que encontraremos de nuevo en los fluidos potenciales, es uno de los modelos matemáticos que más influencia ha tenido en el desarrollo de las matemáticas en los dos últimos siglos. Los capítulos 10 y 11 estarán dedicados a su estudio.

Obsérvese que la ecuación (4.20) no controla los estados estacionarios térmicos si el medio no está en reposo.

EJERCICIO 4.4*. **Ecuación con convección.** (a) Corregir la fórmula (4.19) para que describa la propagación del calor en un medio en movimiento uniforme, $\mathbf{u} = \mathbf{a}$ (con lo que $\nabla \mathbf{u} = \mathbf{D} = 0$ y no hay acoplamiento con la hidrodinámica). Obtener la fórmula

$$(4.21) \quad C\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla T \right) = k\Delta T + q.$$

(b) Demostrar que esta ecuación se reduce a (4.19) mediante el cambio $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{a}t$.

PROGRAMA DE ESTUDIO DE LA ECUACIÓN DEL CALOR

He aquí las principales etapas de un estudio matemático de la ecuación del calor.

1. Elección del problema considerado: tipo de dominio (acotado, no acotado, el espacio entero, un semiespacio,...), de datos de contorno (Dirichlet, Neumann, mixtos; homogéneos o no), de datos iniciales. A ello se añade la posible modificación de la ecuación para incluir coeficientes variables, términos de convección, términos fuente especiales,...
2. Teoría de existencia y unicidad. Teoría de regularidad. Esta es la parte más abstracta que utiliza las herramientas del Análisis Funcional.
3. Construcción de soluciones especiales. Síntesis de soluciones generales a partir de las especiales. Esta etapa es en sí misma una base para la anterior y por lo tanto la suele preceder en el estudio práctico. Véase el ejercicio 4.6.
4. Cálculo numérico. Es otra posible vía de acceso a la construcción de una teoría de existencia. El cálculo de errores está íntimamente ligado a la dependencia continua de las soluciones respecto a los datos y a la cuestión de estabilidad, de importancia fundamental en las aplicaciones.
5. Desarrollos particulares, en especial comportamiento asintótico cuando bien t , bien $|x|$ tiende a infinito. Desarrollos asintóticos.
6. Módulo de aplicación. Problemas de cálculo efectivo. Problemas de control. Problemas inversos.

El lector habrá tenido ocasión de considerar gran parte de este programa en los cursos de EDPs y Cálculo Numérico. Es importante que en este momento integre estos conocimientos en el marco más amplio del estudio de los fluidos y la termodinámica (de donde históricamente provienen).

4.3.1 Ecuación del calor no lineal (de los medios porosos)

La derivación anterior sufre una ligera modificación cuando la difusividad térmica depende de la temperatura, $k = k(T)$. Se deduce en ese caso la ley

$$(4.22) \quad C\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta \Phi(T),$$

donde Φ es la función definida por $\Phi(T) = \int_0^T k(s) ds$ (llamada transformación de KIRCHHOFF).

Hemos puesto $h = 0$ para mayor sencillez. El caso potencial en que $k(T) = cT^n$, $n \geq 1$, aparece en física de plasmas (cf. ZELDOVICH-RAIZER [ZK]). Se puede escribir la ley en la forma

$$(4.23) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = c\Delta T^n,$$

donde $m = n + 1$. Volveremos a encontrar esta ecuación al hablar de gases en medios porosos, capítulo 10.

NOTA FINAL. Dada la importancia de la ecuación del calor y sus variantes en el estudio de los fluidos dedicamos un Capítulo 17 a presentar los principales resultados matemáticos, describiendo en particular la ecuación (4.23), que es menos conocida, con sus soluciones particulares más importantes y sus curiosas propiedades.

Complementos

4.4 El tensor velocidad de deformación

Para medir la deformación de un medio se estudia la evolución relativa de tres puntos próximos. Más en concreto, se toman pequeños incrementos en direcciones arbitrarias en torno a un punto fijo \mathbf{x}_0 , $\Delta \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = \mathbf{h}$ y $\Delta \mathbf{x}' = \mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}_0 = \mathbf{h}'$, y se estudia la variación del producto escalar de estos incrementos con el tiempo. La única forma de hacer un cálculo efectivo es tomar incrementos infinitesimales, $\mathbf{h} = d\mathbf{x}$ y $\mathbf{h}' = d\mathbf{x}'$. Esta variación es de tipo *material*, es decir se supone que los extremos de tales vectores se mueven como partículas. Así se mide la velocidad de *deformación infinitesimal*.

Proposición 4.4.1 *Tenemos*

$$(4.24) \quad \frac{d}{dt}(d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}') = \sum_{i,j} 2D^{ij} dx_i dx'_j.$$

DEMOSTRACIÓN. Dado un tal elemento en tiempo $t = 0$ de la forma $d\mathbf{y} = \sum_j dy_j \mathbf{e}_j$, la transformación Φ_t provoca un incremento en un tiempo $t > 0$ fijo

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \Phi_t}{\partial y_j} dy_j = \sum_i \frac{\partial \Phi_t^i}{\partial y_j} dy_j \mathbf{e}_i.$$

Tenemos pues que, al variar t manteniendo $d\mathbf{y}$ fijo, se produce una variación

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(d\mathbf{x}) &= \sum_j \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi_t}{\partial y_j} dy_j = \sum_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} dy_j = \sum_{i,j} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j = \\ &= \sum_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

Trabajando del mismo modo con un un segundo elemento de referencia dy' se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}') &= \frac{d}{dt}d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}' + d\mathbf{x}' \cdot \frac{d}{dt}d\mathbf{x} = \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j dx'_i + \sum_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx'_j dx_i, \end{aligned}$$

es decir (4.24). \square

Se tiene entonces el siguiente resultado.

Proposición 4.4.2 *La condición necesaria y suficiente para que una región D_t que se mueve con el fluido no sufra deformación en un intervalo de tiempo $t_1 \leq t \leq t_2$ es que $D = 0$ para todo $\mathbf{x} \in D_t$, $t_1 \leq t \leq t_2$.*

Con algún trabajo más se demuestra el siguiente resultado más preciso.

Proposición 4.4.3 *La condición necesaria y suficiente para que una región conexa D_t no sufra deformación en el intervalo temporal $t_1 \leq t \leq t_2$ es que el campo de velocidades se pueda escribir de la forma*

$$(4.25) \quad \mathbf{u}(x, t) = \mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t) \times \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in D_t,$$

es decir como combinación de una traslación y un giro en cada instante.

La demostración puede verse en DUVAUT [Du]. Continuaremos con el estudio de la descomposición del vector \mathbf{u} en la sección 5.7, donde analizaremos el significado de la parte antisimétrica de $\nabla \mathbf{u}$.

4.5 El laplaciano en coordenadas curvilíneas

En el estudio de los problemas de autovalores el lector se encontrará en la necesidad de manejar la expresión del operador laplaciano en coordenadas curvilíneas. La tarea es fácil dado que conocemos las expresiones de la divergencia (sección 2.9) y el gradiente (sección 1.8). En efecto, con las notaciones de la sección 1.8 se tiene

$$\begin{aligned} \Delta f &= \nabla \cdot \nabla f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \nabla^2 f = \\ &= \frac{1}{l_1 l_2 l_3} \left[\frac{\partial}{\partial x'_1} \left(\frac{l_2 l_3}{l_1} \frac{\partial}{\partial x'_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x'_2} \left(\frac{l_1 l_3}{l_2} \frac{\partial}{\partial x'_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x'_3} \left(\frac{l_1 l_2}{l_3} \frac{\partial}{\partial x'_3} \right) \right], \end{aligned}$$

que en coordenadas cilíndricas da

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

y en esféricas

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}.$$

Resumen

- Nuevas variables y coeficientes:

densidad de energía interna: $e(\mathbf{x}, t)$, medida en calorías o julios por unidad de volumen

densidad de energía total: $E(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + e$,

temperatura: $T(\mathbf{x}, t)$, medida en grados

flujo de energía a través de una superficie: \mathbf{J}

densidad de fuentes de calor: q

calor específico: C

conductividad térmica: k

- Formas de la conservación de la energía:

$$\rho \frac{dE}{dt} = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + q) + \operatorname{div}(\mathbf{S} \mathbf{u} - \mathbf{J}),$$

$$\rho \frac{dE_{cin}}{dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{div} \mathbf{S},$$

$$\rho \frac{de}{dt} = \mathbf{S} : \mathbf{D} + q - \operatorname{div} \mathbf{J}.$$

- Ecuación del calor para un fluido perfecto de leyes $e = cT$, $\mathbf{J} = k \nabla T$, con c, k constantes:

$$C \rho \frac{dT}{dt} = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + k \Delta T + q.$$

- El flujo saliente de energía total (por unidad de superficie) es $\rho E \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle - \langle \mathbf{S} \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle + \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$,
el de energía cinética es $(1/2)\rho \mathbf{u}^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle - \langle \mathbf{S} \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle$,
el de energía interna $\rho e \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle + \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$.

Referencias para el capítulo

- La ecuación del calor viene estudiada en múltiples referencias desde diversos puntos de vista. Un estudio completo se halla en

[Wi] D.V. WIDDER, “The heat equation”, Academic Press, New York, 1975.

- La referencia clásica para los desarrollos en serie de las soluciones de las EDPs sigue siendo:

[CH] R. COURANT, D. HILBERT, “Methods of Mathematical Physics”, Wiley, New York, 1989 (primera ed., 1937).

- Los detalles sobre el tensor de deformación pueden consultarse en:

[Du] G. DUVAUT, “Mécanique des milieux continus”, Dunod, Paris, 1990.

- Las ecuaciones del calor no lineales (4.22), (4.23) vienen deducidas en el marco de los fenómenos hidrodinámicos a altas temperaturas en el texto

[ZK] YA. B. ZEL'DOVICH, YU. P. RAIZER, “Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena”, 2 vols., Academic Press, New York, 1966.

CLASIFICACIÓN DE LOS FLUIDOS

Los 4 capítulos que siguen son por así decirlo el núcleo del libro. En ellos se caracterizan los fluidos dentro de los medios continuos por la forma que toma el tensor de esfuerzos. Se introducen así los conceptos de fluido perfecto y de fluido viscoso-newtoniano, y se formulan respectivamente las leyes dinámicas de EULER y NAVIER-STOKES, que son hitos de esta teoría. la división perfecto-viscoso es fundamental en el estudio de los fluidos. Junto con la distinción compresible-incompresible se obtiene así la clasificación de los fluidos en *los cuatro tipos básicos: perfectos incompresibles, perfectos compresibles, viscosos incompresibles y viscosos compresibles*. Sigue a este estudio un capítulo destinado a la Fluidoestática, que fue por su sencillez relativa la rama más antigua de la Mecánica de fluidos.

Los *fluidos viscosos que atraviesan medios porosos* forman la más notable excepción al cuadro anterior, pues su descripción eficaz está basada en la ley de DARCY, con la que se modela en una escala espacial más grande el comportamiento medio de tales flujos.

En todos los casos se identifican las ecuaciones fundamentales y se formulan los problemas clásicos en forma de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales no lineales con adecuadas condiciones iniciales y de contorno. Es de notar que tales condiciones adicionales son de una importancia capital en la ciencia aplicada a la hora de determinar el comportamiento efectivo del fluido.

Capítulo 5

Los fluidos perfectos. El caso incompresible

Planteamos en el primero de los capítulos anunciados la teoría de los fluidos perfectos y examinamos el sistema de ecuaciones diferenciales a que conduce el estudio en el caso de un fluido perfecto incompresible. Se introducen los conceptos de fluido homogéneo, ideal, irrotacional y potencial. Se introduce el concepto de vorticidad y se realiza la descomposición de un campo de velocidades en su parte expansiva y su parte rotacional. Se ponen diversos ejemplos y se investigan las fórmulas de BERNOULLI y sus consecuencias.

5.1 Medios continuos y fluidos

Desde el punto de vista matemático (euleriano) un medio continuo clásico viene descrito por un campo de velocidades \mathbf{u} y una función de densidad ρ que varían en función de \mathbf{x} y t en un dominio variable Ω_t . Estas 4 funciones ($n + 1$ en general si sustituimos \mathbb{R}^3 por \mathbb{R}^n) están sujetas al siguiente sistema de EDPs no lineal

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{S}. \end{cases}$$

Como ya hemos dicho, este sistema no está bien determinado (no está *cerrado*, en el lenguaje usual) porque tenemos más incógnitas que ecuaciones. Introducir la ecuación de la energía tampoco resuelve todo el problema, porque con ello se introducen nuevas variables, como e , q , \mathbf{J} y T .

El siguiente paso en la modelización matemática consiste en introducir nuevas relaciones, llamadas **leyes constitutivas** o **leyes de comportamiento**, que permitan

obtener un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas. Al contrario que las leyes de conservación, las leyes de comportamiento no descansan sobre los principios básicos de la Física, sino que se deducen en forma más *ad hoc* con diversos razonamientos que reflejan la realidad meso- o macroscópica de la materia. Una derivación racional debe recurrir a la Mecánica Estadística y no siempre es satisfactoria. ¡La Mecánica de Fluidos es una ciencia experimental!

Será conveniente dividir las variables en fundamentales y suplementarias. Entre las primeras se cuentan la velocidad (variable cinemática), la densidad y la temperatura (variables termodinámicas). La elección depende del tipo de fluido, como veremos en los capítulos que siguen. Las relaciones constitutivas consisten en expresar las demás variables en función de las fundamentales mediante relaciones cerradas, no diferenciales.

El primer paso en esta dirección consiste en proponer una expresión para \mathbf{S} , mediante una llamada ley *reológica* del material (del griego, *rheō*= fluir). A través de la estructura de \mathbf{S} se introducen en el planteamiento matemático las características que permiten modelizar las propiedades concretas que constituyen un **fluido** y lo separan de otros tipos de medios continuos. En un fluido, \mathbf{S} puede depender de las variables básicas \mathbf{u} y ρ y T , con la particularidad que la dependencia respecto de \mathbf{u} se realiza como función del gradiente, $\nabla\mathbf{u}$, o más precisamente de la matriz de *velocidad de deformación* \mathbf{D} . Éste es un hecho fundamental que refleja la intrínseca **deformabilidad** de un fluido.

Por el contrario, en la teoría de sólidos elásticos, desarrollada por LAMÉ, \mathbf{S} depende de la matriz de la deformación $\mathbf{M} = D\Phi_t$, definida en la sección 1.3. Es decir, en un sólido el esfuerzo es provocado por los gradientes de las deformaciones o distancias a que las partículas se separan con respecto a la configuración de equilibrio, mientras que en un fluido sólo interviene la velocidad de variación de esos gradientes, pero no los gradientes mismos.

A partir de aquí, existen diversos niveles clásicos de modelización de lo que es un fluido a través de la estructura admisible de \mathbf{S} .

5.2 Problemas matemáticamente bien propuestos

Pasamos a describir en capítulos sucesivos las clases fundamentales de leyes reológicas para los fluidos. Combinaremos estas leyes con las leyes de conservación y eventuales leyes constitutivas (las leyes termodinámicas) para obtener sistemas cerrados de ecuaciones en derivadas parciales que junto con adecuados datos iniciales y de contorno producen una solución bien determinada, en otras palabras constituyen un **problema bien propuesto**. Este es un concepto fundamental de la matemática como ciencia aplicada, y su enunciado preciso se debe al matemático francés J. HADAMARD, según el cual un problema está bien propuesto si posee *existencia-unicidad-dependencia continua*, las tres propiedades que caracterizan una buena teoría matemática. Más precisamente, el problema bien propuesto contiene una lista de ecuaciones o relaciones y una lista de datos a elegir en

un conjunto adecuado X , que es un espacio métrico o al menos topológico. Así mismo se especifica el tipo de solución a obtener en un espacio Y . El problema bien propuesto permite hallar para cada conjunto de datos $f \in X$ un elemento único $u \in Y$ que es aceptable como solución del problema, y además u depende continuamente de f en las topologías respectivas. Desde el punto de vista teórico, la tarea de la matemática de los fluidos consiste en formular problemas en espacios funcionales oportunos y demostrar que están bien propuestos. Queda para el experimentador la valoración de la relevancia de tales modelos.

En este contexto la obtención de *soluciones particulares* no juega un papel esencial, pues nos interesa el conocimiento de todo el conjunto de soluciones y no sólo el de aquellas que se prestan a la representación analítica, lo cual, dada la complejidad de la teoría, es la excepción y no la regla. En la práctica sin embargo, las soluciones particulares expresadas analíticamente juegan un papel de gran importancia pues permiten analizar en detalle los fenómenos que se supone son válidos en general y sacar valiosas consecuencias.

5.3 Fluidos perfectos. Ecuación de Euler

Se denominan fluidos perfectos aquellos que tienen un tensor de esfuerzos de la forma más simple, en que se excluyen los *esfuerzos cortantes*; sobre las superficies de separación de dos elementos contiguos de fluido sólo aparecen esfuerzos perpendiculares a la superficie, lo que excluye totalmente la fricción y el arrastre mutuo. En virtud del teorema de CAUCHY (Teorema 3.1.1), la ausencia de esfuerzos cortantes se traduce en la existencia de una matriz diagonal

$$(5.1) \quad \mathbf{S} = -p(x, y, z, t) \mathbf{I},$$

llamada a veces *ley de la presión isótropa*. En efecto, la función escalar p es llamada **presión (interna)** y es otra variable esencial de la mecánica de fluidos que se añade a ρ y \mathbf{u} . De hecho, la importancia del concepto de presión ya fue reconocido en los comienzos de la teoría de fluidos en el estudio de la hidrostática (ver la reseña histórica o el capítulo 9), pero fue J. BERNOULLI en su *Hydraulica* quien primero hizo un uso claro del concepto en el estudio de los fluidos en movimiento. Para un fluido perfecto la ecuación de conservación del impulso queda pues

$$(5.2) \quad \boxed{\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mathbf{f},}$$

que es la famosa **ecuación de Euler** (L. EULER, 1755), una de las ecuaciones más importantes de la mecánica de fluidos.

Estrictamente hablando, ésta es sólo una situación idealizada pues la fricción existe y tiene consecuencias no desdeñables. Ahora bien, en muchas situaciones prácticas la aproximación que representa es suficiente y, dada la dificultad matemática de los problemas

de fluidos, su simplicidad relativa es una gran suerte. Pero en otras situaciones tal simplicidad provoca una serie de *paradojas* que hacen necesario pasar a modelos de fluidos de estructura más compleja.

EJERCICIO 5.1*. Deducir la versión de la ecuación de Euler en coordenadas cilíndricas:

$$(5.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u_r + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_r - \frac{1}{r} u_\theta^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\rho} f_r, \\ \frac{\partial}{\partial t} u_\theta + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_\theta + \frac{1}{r} u_r u_\theta = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} f_\theta, \\ \frac{\partial}{\partial t} u_z + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} f_z. \end{cases}$$

Recordamos la notación $\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta$ y el operador $\mathbf{u} \cdot \nabla$ fue calculado en el Ejercicio 3.1. Se recomienda hacer el cálculo directamente en coordenadas cilíndricas. Debe señalarse que la mayor complicación de las ecuaciones en estas coordenadas se debe al término $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$, del que se originan “nuevos términos”, debidos a las derivadas espaciales de los vectores de base. El lector recordará que éste es un fenómeno bien conocido en Geometría Riemanniana bajo los epígrafes “derivada covariante” y “símbolos de CHRISTOFFEL”, ver también lo dicho en la sección 1.8. En física se llama a esos nuevos términos aceleraciones (o fuerzas) ficticias.

EJERCICIO 5.2. Escribir la ecuación que resulta cuando consideramos movimientos planos circulares de la forma

$$(5.4) \quad \mathbf{u} = v(r, \theta, t) \mathbf{e}_\theta,$$

es decir suponemos que $u_r = u_z = 0$. En particular, poner $\mathbf{f} = -\rho g \mathbf{k}$. Descubrir la conocida descomposición de la aceleración de un movimiento circular en sus componentes tangencial y centrípeta, cf. sección 1.4.

5.4 Fluidos perfectos incompresibles

El estudio de los fluidos perfectos se divide en dos grandes clases, a saber fluidos **perfectos incompresibles**, para los que la ley de conservación de masa toma la forma

$$(5.5) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{y} \quad J \equiv 1 \quad \text{ó} \quad \frac{d\rho}{dt} = 0,$$

indicando que se conservan los volúmenes por el flujo, y los fluidos **perfectos compresibles**, para los cuales la ley de conservación de masa toma la forma general

$$(5.6) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0.$$

Así pues, en el primer tipo de fluidos tenemos 5 ecuaciones, la vectorial (5.2) y las escalares $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$ y $d\rho/dt = 0$, que permiten en principio calcular las 5 incógnitas, \mathbf{u} , ρ y p .

Es natural en los fluidos incompresibles hacer la hipótesis adicional de que la **densidad sea constante**, que incluso se normaliza en $\rho = 1$. Ver el comentario final a la sección 2.2. En ese caso tenemos cuatro ecuaciones hidrodinámicas: la ecuación vectorial de conservación de la cantidad de movimiento (5.2) y la escalar de incompresibilidad (5.5), que forman el sistema

$$(5.7) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned}}$$

que nos deben permitir determinar el flujo, es decir, el campo de velocidades y la presión (cuatro incógnitas). Como es natural en las EDPs, la determinación de una solución particular exige conocer **datos adicionales**: datos iniciales para ρ y \mathbf{u} , así como datos de contorno para \mathbf{u} , que toman usualmente la forma

$$(5.8) \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Este dato refleja físicamente la existencia de una pared impermeable. En el caso de paredes permeables podemos imponer el flujo a través de S

$$(5.9) \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = g(x) \quad \text{en } \partial\Omega.$$

En este caso, la incompresibilidad exige que si $S = \partial\Omega$ entonces

$$\int_S g(x) dS = 0,$$

es decir que salga tanto fluido como entra. [Ind.: usar (5.5) y el teorema de Gauss; cf. más adelante Teorema 12.7.1]. Otra posibilidad es suponer que la pared $\partial\Omega$ es impermeable pero se mueve con velocidad normal $u_n = g$ (dominio variable).

La energía. En los fluidos perfectos incompresibles no es preciso entrar en la consideración de la energía. En efecto, se puede ver fácilmente que el término de acoplamiento, crucial en (4.12) y (CE2), vale $\mathbf{S} : \mathbf{D} = -p (\nabla \cdot \mathbf{u})$ (cf. Ejercicio 4.2) y por tanto se anula. En virtud de la fórmula (4.12) la energía cinética sólo cambia por efecto de las fuerzas exteriores y las condiciones de contorno. Supuestas las condiciones de contorno (5.8), el término $\Pi \cdot \mathbf{u} = -p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ se anula sobre el borde $\partial\Omega$ y entonces

$$\frac{d}{dt} E_{\text{cin}}(\Omega) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x}.$$

Más aún, esta contribución es cero si $\mathbf{f} = 0$, y también si el campo es conservativo, $\mathbf{f} = -\nabla U$, tras una integración por partes. Así pues, bajo estas condiciones *la energía cinética se conserva* en el dominio total Ω .

5.5 Fluidos ideales

En el estudio de los fluidos perfectos incompresibles es usual considerar la hipótesis adicional de *homogeneidad*, introducida en el capítulo 2, sección 2.2,

$$(5.10) \quad \nabla_{\mathbf{x}}\rho = 0.$$

Definición. *Un fluido perfecto, incompresible y homogéneo se llama **fluido ideal**.*

El fluido ideal representa el modelo idealizado más simple del comportamiento de un líquido (cf. Johann BERNOULLI, “Hydraulica”, Daniel BERNOULLI, “Hydrodynamica”). Aunque es sólo un modelo aproximado, es de gran utilidad y conduce a problemas clásicos del análisis matemático, estudiados a partir de la obra de los BERNOULLI y EULER en el siglo XVIII. Las ecuaciones de un fluido ideal forman el sistema (5.7) con ρ constante. Junto con adecuadas condiciones iniciales y de contorno deben permitir calcular el campo de velocidades \mathbf{u} y la presión p en un dominio espacio-temporal Ω . Observamos que por la homogeneidad del medio podemos escribir que

$$(5.11) \quad \frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla\left(\frac{p}{\rho}\right).$$

CORRECCIÓN DE LA PRESIÓN ANTE UN CAMPO CONSERVATIVO. Veamos algunas consideraciones simplificativas adicionales. En muchos casos se pueden despreciar las fuerzas exteriores, $\mathbf{f} = 0$. En otros casos la fuerza exterior es **conservativa**, es decir proviene de un **potencial**

$$(5.12) \quad \mathbf{f} = -\rho \nabla U.$$

Tal es el caso de la fuerza gravitatoria $\mathbf{f} = -\rho g\mathbf{k}$, que proviene del potencial gravitatorio $U = gz$. Podemos entonces englobar el potencial en el término de presión y escribir el segundo miembro de (5.7) de la forma

$$(5.13) \quad -\nabla\left(\frac{\pi}{\rho}\right),$$

donde $\pi = p + \rho U$ es la llamada **presión no hidrostática**, denominación que proviene de la aplicación a un líquido bajo la acción de la gravedad donde π es la parte de la presión que no se debe a la gravedad, cf. capítulo 9. Cuando $U = gh$ se utiliza frecuentemente en su lugar la cantidad

$$(5.14) \quad \frac{\pi}{\rho g} = \frac{p}{\rho g} + h,$$

llamada *altura piezométrica*. En muchas situaciones ésta es la cantidad práctica, que se mide con un manómetro de mercurio por ejemplo. Volveremos sobre estas ideas tras el teorema de Bernoulli, sección 5.9.

En resumen, podemos decir que la presencia de un potencial gravitatorio se traduce en una gran mayoría de problemas de fluidos ideales en una modificación de la presión

sin afectar a la determinación del campo de velocidades. Un caso en que esto no es cierto son los problemas de frontera libre, cf. sección 5.10.

DENSIDAD NO CONSTANTE. FLUJOS O CORRIENTES ESTRATIFICADOS. Es de mencionar que existen flujos incompresibles no homogéneos, como los *flujos estratificados*, de interés en Oceanografía. Tómesese por ejemplo

$$(5.15) \quad \mathbf{u}(x, y, z) = (u, v, 0), \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \rho = \rho(z).$$

En cada nivel $z = \text{constante}$ pedimos que (u, v) cumplan la ecuación de Euler (o de Navier-Stokes si son viscosos, cf. Cap. 6). Si además no queremos aceleraciones verticales el segundo miembro de la ecuación (5.2) ha de ser nulo. **NOTA:** Se trata en el ejemplo de fluidos ligeramente compresibles que realizan su movimiento en capas de forma incompresible. En general se usa la palabra incompresible con la intención de incluir la propiedad de homogeneidad.

EJERCICIO 5.3. Construir un ejemplo estratificado en 3D con capas horizontales.

NOTA: Es importante que p no dependa de la variable vertical z , si lo hiciera cambiaría el significado del gradiente ∇p al pasar de 2D a 3D.

5.6 Resultados de existencia y unicidad

I. PROBLEMA DE EVOLUCIÓN EN UN DOMINIO ACOTADO. El sistema de Euler incompresible ideal con datos iniciales y de contorno ha sido muy bien estudiado en dimensión dos. El primer resultado de existencia para la ecuación de Euler planteada en todo el plano es W. Wolibner, [Wo], en 1933. Tosio KATO probó en 1967 [Ka] el siguiente teorema de existencia y unicidad de solución global clásica; global quiere decir que existe para todo $t > 0$, clásica que todas las derivadas que aparecen en las ecuaciones son funciones continuas y las ecuaciones se satisfacen en todo punto.

Teorema 5.6.1 *Sea Ω un dominio acotado del plano con frontera Γ compuesta de $m + 1$ curvas cerradas simples regulares $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, de las que Γ_0 rodea a todas las demás y éstas no se contienen unas a otras. Denotemos por Q_T el cilindro espacio-temporal $\Omega \times [0, T]$, $T > 0$. Sea $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ un campo de fuerzas de la clase de Hölder $C_{x,t}^{1+\alpha,0}(\overline{Q_T})$, para un $0 < \alpha < 1$, y sea $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ un dato de velocidad inicial en la clase $C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$, que es además solenoidal, $\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0$.*

Entonces existen un par de funciones, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $p(\mathbf{x}, t)$, que satisfacen el sistema (5.7) en el sentido clásico, siendo continuas en $\overline{Q_T}$, clausura de Q_T , tanto ellas como todas sus derivadas que aparecen en las ecuaciones. Además, \mathbf{u} satisface la condición de contorno

$$(5.16) \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{en } \Gamma,$$

así como la condición inicial

$$(5.17) \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Omega.$$

Por último, \mathbf{u} es única y p es única salvo adición de una función arbitraria del tiempo.

II. OTROS PROBLEMAS DE EVOLUCIÓN. Un teorema semejante existe en todo el plano, $\Omega = \mathbb{R}^2$, con adecuadas condiciones de decrecimiento cuando $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Por el contrario, la teoría en tres dimensiones es sustancialmente más difícil y no existe un teorema de existencia global clásica.

III. PROBLEMA ESTACIONARIO. Recordemos que además del *problema de evolución* se plantea el *problema estacionario*. Un **fluido estacionario** es aquél que en su versión euleriana no cambia con el tiempo:

$$(5.18) \quad \rho = \rho(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}).$$

En el problema estacionario se suprimen del sistema (5.7) las derivadas temporales y se eliminan las condiciones iniciales. Veremos más abajo, Ejercicio 5.5, que el problema estacionario admite en general soluciones múltiples.

Obsérvese que si aplicáramos la misma idea de fluido estacionario a la versión lagrangiana, ello conduciría a un fluido sin aceleraciones presentes, una situación harto más simple. Llegamos así a la rama llamada **estática** de fluidos, objeto de las primeras investigaciones, donde la presión juega un papel dominante, cf. capítulo 9.

IV. PROBLEMA INVERSO. Un problema usual de tipo distinto es el de caracterizar los campos vectoriales que pueden ser el campo de velocidades de un fluido perfecto incompresible. Se trata en resumidas cuentas de saber si el campo dado es incompresible y si existe una función presión $p(\mathbf{x}, t)$ tal que el par (\mathbf{u}, p) satisface la ecuación (5.2). La dificultad consiste en que la presión aparece como un potencial para la expresión

$$(5.19) \quad \mathbf{V} = \rho(\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}) - \mathbf{f},$$

luego este campo ha de ser conservativo. De existir la presión estará definida salvo una función arbitraria de t . En tales problemas se toma por defecto ρ constante y $\mathbf{f} = 0$. Volveremos sobre este problema en los ejercicios del final del capítulo, una vez hayamos comprendido el papel de la vorticidad.

5.7 Descomposición y análisis local de la velocidad. Concepto de vorticidad

El estudio de los fluidos ideales implica resolver un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineales. Para simplificar la tarea se suelen tomar dos medidas: una consiste

en aislar la presión de la velocidad, que se toma como variable fundamental. La segunda consiste en identificar en la velocidad la componente de rotación, lo que da lugar a una nueva división de los flujos de los fluidos ideales según su grado de complejidad.

5.7.A. En concreto, en el análisis de los fluidos ideales tiene particular importancia la consideración de la **vorticidad**, dada por la fórmula

$$(5.20) \quad \boxed{\vec{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}},$$

lo que en notación tensorial equivale a

$$\vec{\omega}_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3.$$

La vorticidad es una medida de la “rotación local” que efectúa el movimiento. Para mejor comprender el papel del vector vorticidad es conveniente considerarla como parte de la descomposición del tensor $\nabla \mathbf{u}$ en una parte simétrica y una antisimétrica,

$$(5.21) \quad \nabla \mathbf{u} = \mathbf{D} + \mathbf{A}.$$

Esta descomposición es un hecho general. En efecto, basta definir

$$(5.22) \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T).$$

Hemos visto que la parte simétrica \mathbf{D} juega un papel en el estudio de la energía (cf. secciones 4.2 y 4.4). También veremos que es la parte relevante en la descripción de los efectos viscosos. Un hecho elemental de álgebra nos ilustra sobre el significado de \mathbf{A} . En efecto, si escribimos

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

observamos que para todo vector \mathbf{h}

$$(5.23) \quad \boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{h} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}},$$

un producto vectorial en términos de la vorticidad.

5.7.B. Veamos ahora el significado de esta descomposición en términos del movimiento. Imaginemos para empezar que el campo de velocidades es constante, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$. Entonces la integración de la ecuación

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_0,$$

nos proporciona una familia de trayectorias rectas, $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{u}_0 t$. Veamos a continuación qué sucede con un campo de velocidades \mathbf{u} que depende linealmente de \mathbf{x} , es decir con

$\nabla \mathbf{u}$ constante. Si sólo tiene parte antisimétrica, $\nabla \mathbf{u} = \mathbf{A}$, $\mathbf{u} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, nos encontramos con la integración del flujo

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \times \mathbf{x}(t),$$

que produce un giro alrededor del eje de dirección ω con velocidad angular $(1/2)|\omega|$, cf. el ejemplo 1.1 y el 5.3 más abajo. Es pues un movimiento rígido, sin cambio de volumen ni deformación.

Por otra parte, en el caso en que el gradiente constante es simétrico, $\nabla \mathbf{u} = \mathbf{D}$, esta matriz puede ser diagonalizada tras un cambio de ejes ortogonal \mathbf{Q} :

$$\mathbf{D}' = \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^{-1} = \text{diag}\{d_1, d_2, d_3\}.$$

El flujo correspondiente

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}(t),$$

es pues una dilatación (contracción si $d_i < 0$) de factor $e^{d_i t}$ a largo de cada eje e_i , provocando una dilatación de volumen total

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = d_1 + d_2 + d_3 = \text{Traza}(\mathbf{D}),$$

lo que no es sino la ley de cambio de volumen (fórmula de Euler, (2.9)), pues la traza de \mathbf{D} es exactamente $\text{div } \mathbf{u}$.

5.7.C. Hemos analizado por separado la contribución de los tres tipos de campos y hemos descubierto que solamente \mathbf{D} provoca una deformación real del medio. Veamos ahora el efecto conjunto en un campo de velocidades variable. Supongamos por sencillez un fluido estacionario. En un entorno de un punto \mathbf{x}_0 escribimos por Taylor (con $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$)

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{h} + O(\|\mathbf{h}\|^2), \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{h} = \frac{1}{2} \omega \times \mathbf{h},$$

con \mathbf{D} y \mathbf{A} las partes simétrica y antisimétrica de $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_0)$. El flujo de \mathbf{u} puede pues ser aproximado para pequeños incrementos de \mathbf{x} y de tiempo por la composición de una *traslación rígida* (debido al término de velocidad constante $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)$), más la *deformación* creada por \mathbf{D} , más la *rotación* debida a \mathbf{A} con eje infinitesimal la dirección de $\vec{\omega}$.

Como es bien sabido, los flujos de campos de vectores lineales se obtienen mediante el formulismo matemático de la *matriz exponencial*. Ahora bien, las exponenciales de matrices no conmutan en general, de forma que una fórmula de composición basada en la combinación de los tres efectos reseñados sólo es cierta para tiempos infinitesimales (por ejemplo, es útil en los algoritmos numéricos). [NOTA. La composición de flujos de campos que no conmutan se estudia en geometría diferencial. La no conmutatividad da lugar al corchete de Lie, una característica sobresaliente del álgebra de Lie de campos vectoriales].

5.8 Flujos irrotacionales y potenciales

Son de gran interés por su simplicidad los flujos en que la vorticidad es nula, llamados **flujos** o **corrientes irrotacionales**. En principio el sistema resultante

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \text{rot}(\mathbf{u}) &= 0,\end{aligned}$$

es sobredeterminado y por tanto podría ser incompatible, pero ya LAGRANGE observó que un fluido ideal cuya vorticidad es nula inicialmente se conserva irrotacional para todo tiempo $t > 0$ si el campo de fuerzas externas es conservativo. HELMHOLTZ obtuvo en 1858 la siguiente fórmula para la evolución de la vorticidad.

Lema 5.8.1 *Si el campo de fuerzas es conservativo la vorticidad evoluciona de acuerdo con la ecuación*

$$(5.24) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} .}$$

Demostremos este resultado en el capítulo 14 dentro del estudio de la vorticidad (es un simple ejercicio de cálculo diferencial vectorial). Siguiendo con nuestro argumento, dado que la ecuación (5.24) es lineal en $\vec{\omega}$ es inmediato que a datos iniciales nulos corresponde una solución nula (si trabajamos en todo el espacio o si los datos de contorno son adecuados).

Los flujos irrotacionales están íntimamente relacionados con un concepto de gran importancia, el **potencial de velocidades**, concepto acuñado por EULER. Ello es consecuencia de un resultado clásico del análisis.

Lema 5.8.2 *Si un campo vectorial $\mathbf{u} \in C^1(\Omega)$ está definido en un abierto simplemente conexo de \mathbb{R}^3 entonces es irrotacional si y sólo si admite una Φ tal que*

$$(5.25) \quad \nabla \Phi = \mathbf{u}.$$

Inversamente, si un campo C^1 admite una función potencial es irrotacional.

Definición. Si existe un potencial el movimiento recibe el nombre de **flujo potencial**.

Si $\mathbf{u} = (u, v, w)$ se tiene

$$(5.26) \quad \boxed{\Phi_x = u, \quad \Phi_y = v, \quad \Phi_z = w.}$$

Obsérvese el problema de los signos: mientras es costumbre en dinámica que las fuerzas deriven de un potencial al que se cambia de signo, en el presente caso se usa el convenio positivo, $\nabla \Phi = \mathbf{u}$.¹

¹El uso de un convenio u otro es cuestión de costumbre establecida, y no afecta a la teoría, pero puede generar peligrosas confusiones.

Proposición 5.8.3 *La condición de incompresibilidad se transforma en un fluido potencial en la ecuación de LAPLACE*

(5.27)

$$\Delta\Phi = 0,$$

es decir el potencial es una función armónica (en las variables espaciales).

El estudio de las funciones armónicas es uno de los temas más clásicos de las matemáticas de este siglo. Ha sido fuente de innumerables desarrollos del análisis matemático y tiene las más variadas aplicaciones. Observamos que el concepto de potencial permite en este caso separar el cálculo de las velocidades del de las presiones.

COMENTARIOS TOPOLÓGICOS. Recordamos aquí que un abierto se llama simplemente conexo si tiene la propiedad de que toda curva cerrada es homótopa (es decir, deformable con continuidad) a un punto. Los abiertos convexos, o más en general los abiertos estrellados, son casos particulares de conjuntos simplemente conexos en \mathbb{R}^n . Pero la bola perforada, $\{\mathbf{x} : 0 < |\mathbf{x}| < R\}$, que es simplemente conexa en \mathbb{R}^3 , NO lo es en \mathbb{R}^2 . El correspondiente cilindro perforado no es simplemente conexo en \mathbb{R}^3 . Tampoco lo es el toro (la forma del doughnut). En los dominios no simplemente conexos los conceptos de irrotacional y potencial no coinciden, dando lugar a un análisis de gran interés (matemático y físico), del que veremos algunos detalles en los capítulos 12, 14.

GENERACIÓN DE VORTICIDAD. La propiedad de irrotacionalidad se extiende a ciertas clases de fluidos compresibles pero no se mantiene en general ni en éstos ni en los fluidos viscosos, donde la generación de vorticidad en el movimiento da lugar a fenómenos matemáticos muy interesantes. Ello corresponde a fenómenos que se observan en la realidad. ¡La hipótesis de irrotacionalidad impediría toda creación de rotación en la naturaleza!

5.9 Fórmulas de Bernoulli

Vamos a obtener una importante relación para los fluidos ideales debida a D. BERNOULLI, que es una especie de integral primera del movimiento. Hemos de suponer que la fuerza exterior es conservativa, es decir proviene de un potencial. A continuación necesitamos una fórmula de cálculo vectorial.

Lema 5.9.1 *En $n = 3$ se tiene*

$$(5.28) \quad (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right) = \vec{\omega} \times \mathbf{u} + \nabla\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right).$$

DEMOSTRACIÓN. Calculemos por componentes. Sea $\mathbf{u} = (u, v, w)$. Entonces

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} &= (w(u_z - w_x) - v(v_x - u_y), u(v_x - u_y) - w(w_y - v_z), v(w_y - v_z) - u(u_z - w_x)), \\ \nabla(\mathbf{u}^2) &= \nabla(u^2 + v^2 + w^2) = (uu_x + vv_x + ww_x, uu_y + vv_y + ww_y, uu_z + vv_z + ww_z). \end{aligned}$$

Sumando:

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) &= (wu_z + vu_y + uu_x, uv_x + vv_y + ww_z, uw_x + vw_y + ww_z) = \\ &= (\mathbf{u} \cdot \nabla u, \mathbf{u} \cdot \nabla v, \mathbf{u} \cdot \nabla w) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \end{aligned}$$

lo que demuestra la igualdad. \square

Volvamos al cálculo principal. Con lo anterior la ecuación de Euler, fórmula (5.2), queda en la forma:

$$(5.29) \quad \boxed{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \mathbf{u} = -\nabla H, \quad H = \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U.}$$

La *función de Bernoulli* H que aparece en el segundo miembro es un potencial compuesto de un término de energía cinética, uno de energía de presión y otro de energía potencial. H es pues una especie de energía total. Compárese con la energía total del Ejercicio 4.1.

COMENTARIO. Como lo usual es que la energía potencial sea gravitatoria, $U = gz$, es frecuente usar en vez de H la cantidad

$$(5.30) \quad \frac{1}{g} H = \frac{\mathbf{u}^2}{2g} + \frac{p}{g\rho} + z,$$

que se interpreta como una suma de *alturas*: altura de velocidad, altura de presión y altura hidrostática (cf. cap. 9).

Veamos ahora algunas consecuencias de esta fórmula bajo hipótesis suplementarias en que la fórmula de Bernoulli dice que H se conserva en un cierto sentido. Es útil considerar varias situaciones.

Primera situación particular

Las fórmulas anteriores son de inmediata utilidad para los **fluidos irrotacionales**, es decir aquellos en que la vorticidad $\vec{\omega} = \text{rot}(\mathbf{u})$ es cero. Entonces la ecuación de Euler queda en la forma

$$(5.31) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla H = 0, \quad H = \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U,$$

donde hemos supuesto que existe un potencial de fuerzas. Si además el flujo es estacionario, $\partial \mathbf{u} / \partial t = 0$, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5.9.2 (Ley de Bernoulli) *En un fluido ideal, estacionario e irrotacional la energía total H es constante en cada componente conexa del dominio de definición del flujo,*

$$(5.32) \quad \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{p}{\rho} + U = \text{cte.}$$

En términos de alturas cuando U es gravitatorio se suele escribir

$$(5.33) \quad \frac{\mathbf{u}^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = cte.$$

Ejemplo 5.1 Un ejemplo típico de aplicación sucede cuando consideramos el flujo ideal irrotacional de un líquido por un tubo de sección variable que suponemos colocado en posición horizontal. Sean S_1 y S_2 las áreas de la sección en dos puntos distintos del tubo y sean u_1 y u_2 las velocidades respectivas, que suponemos idealmente constantes. De acuerdo con la ley de conservación de masa se tiene que

$$S_1 u_1 = S_2 u_2.$$

Aplicando la ley anterior se tiene además

$$u_1^2 - u_2^2 = 2 \frac{(p_2 - p_1)}{\rho}.$$

Lo que demuestra la dependencia del salto de presión con la sección. Estudiar esta dependencia. En particular se ve que podemos llegar a tener presión nula en un tubo que se estrecha y que la velocidad máxima está limitada. Llegado al límite de presión nula aparece el fenómeno de *cavitación*.

Ejemplo 5.2 Un segundo ejemplo trata de la velocidad con que un líquido sale por un orificio (pequeño) situado en la pared lateral de una vasija mantenida en reposo. Bajo las condiciones anteriores (que uno debe examinar para cerciorarse de su adecuación) se tiene que en la superficie del líquido, que suponemos a altura 0, se tiene $p = p_0$ (presión atmosférica) y velocidad (casi) 0, mientras que en el orificio, a distancia h más abajo, se tiene $p = p_0$ y velocidad v . Por Bernoulli se llega entonces a

$$(5.34) \quad v^2 = 2gh,$$

fórmula llamada teorema de TORRICELLI y deducida matemáticamente por BERNOULLI. Es una fórmula sorprendente pues copia exactamente la fórmula de caída libre de un cuerpo en el vacío.

NOTA. Todo el razonamiento anterior se basa en la anulación del término $\vec{\omega} \times \mathbf{u}$. Existen campos de velocidades no necesariamente irrotacionales para los que este producto es cero, los llamados campos de BELTRAMI. Para ellos el teorema 5.9.2 es cierto.

Segunda situación. Flujos rotacionales.

Queremos demostrar una ley de conservación del tipo Bernoulli sin suponer que la vorticidad se anule. Supondremos que las fuerzas exteriores provienen de un potencial

estacionario U . En ese caso ya no buscamos una conservación global sino que calculamos la variación de H a lo largo de una trayectoria. Se tiene

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)H.$$

Por la definición de H

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Además, multiplicando (5.29) por \mathbf{u} se sigue que

$$\mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)H = -\mathbf{u} \cdot (\vec{\omega} \times \mathbf{u}) \equiv 0.$$

Deducimos así el siguiente resultado

Teorema 5.9.3 *En un fluido ideal con potencial de fuerzas estacionario la energía total varía a lo largo de cada trayectoria de acuerdo con la fórmula*

$$(5.35) \quad \frac{dH}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Si el flujo tiene una presión estacionaria se concluye que la energía total es constante a lo largo de cada trayectoria, $dH/dt = 0$.

La última afirmación se conoce como forma general de la ley de conservación de Bernoulli. Este resultado fue probado por Daniel BERNOULLI en 1737. Nótese que si bien la energía de una partícula no varía en su trayectoria aunque haya “rotación”, trayectorias distintas pueden tener distintas energías. El siguiente ejemplo es muy ilustrativo:

Ejemplo 5.3 Supongamos un fluido ideal rotando con velocidad angular constante alrededor del eje vertical, de modo que $\mathbf{u} = (-\Omega y, \Omega x, 0)$ y supongamos que actúa la fuerza de la gravedad. Queremos hallar las superficies de presión constante. En particular obtendríamos así la superficie libre de una taza o cubo de agua en rotación, pues su presión es la atmosférica.

Si usamos cándidamente la fórmula de Bernoulli en este caso para concluir que H es una constante espacial, se tendrá como ecuación para las superficies

$$(5.36) \quad z = \text{constante} - \frac{\Omega^2}{2g}(x^2 + y^2),$$

una forma de paraboloides para abajo, lo cual contradice la evidencia física. Éste es en efecto un caso en que H es una constante distinta en cada trayectoria.

EJERCICIO 5.4*. Escribir las ecuaciones de Euler e integrarlas para obtener la forma correcta de la superficie, que es

$$(5.37) \quad z = \text{constante} + \frac{\Omega^2}{2g}(x^2 + y^2).$$

NOTA. Éste es un ejemplo de *problema de frontera libre*, un tipo de problema que merece especial interés.

5.10 Problemas de frontera libre. Tensión superficial

Terminamos la enumeración de las principales cuestiones que aparecen en el estudio de los fluidos perfectos incompresibles con la consideración del movimiento de dos fluidos inmiscibles que ocupan simultáneamente un volumen. En ese caso el problema tratado hasta aquí cambia de aspecto matemático, pues es preciso determinar el dominio ocupado por cada uno de los fluidos en cada momento de tiempo para luego proceder a especificar los campos de velocidades y presión de cada uno en su dominio. De hecho ambos problemas se resuelven simultáneamente. Se trata pues de problemas de **dominio variable**, desconocido a priori y que va siendo fijado por el flujo en su evolución. Dado que la determinación de los dominios respectivos se suele hacer concentrándose en el movimiento de la superficie de separación de los subdominios, Γ , estos problemas se suelen llamar de **frontera móvil** o **frontera libre**. Hemos de advertir que la suposición de que existe una superficie neta (en el espacio-tiempo) que separa los dominios es una suposición que no tiene por qué darse en general y que habremos de justificar, la frontera de separación puede ser a priori un objeto geométrico muy complejo, por ejemplo un *conjunto fractal*.

Supongamos que tenemos dos fluidos viscosos incompresibles inmiscibles que comparten un dominio fijo Ω durante un intervalo de tiempo $I = \{0 \leq t \leq T\}$. En cada momento $t \in I$ existe una partición de Ω en dos subdominios, Ω_1 y Ω_2 , ocupados respectivamente por los fluidos 1 y 2. En el dominio Ω_i se satisface el sistema (5.7) para el par (\mathbf{u}_i, p_i) , $i = 1, 2$. En cada parte de la frontera exterior de Ω se satisfacen por el fluido adyacente las condiciones de contorno del tipo ya discutido. La novedad reside en las condiciones de acoplamiento a imponer en la frontera interior móvil, indeterminada en principio, $\Gamma(t) = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Para ello es preciso revisar el significado de las leyes fundamentales derivadas hasta ahora de las que han surgido los sistemas de ecuaciones propuestos, para ver qué consecuencias tienen sobre la transición que tiene lugar en la frontera libre.

LEYES DE CONTACTO. En primer lugar hemos de examinar la conservación de masa. Se deduce entonces una condición **cinemática**: la frontera libre ha de moverse con las partículas adyacentes a ella de ambos medios, de forma que la velocidad es continua en el cambio de fluido y su componente normal coincide con la velocidad normal de avance de

$\Gamma(t)$. Si suponemos que se trata de de una superficie regular para cada $t \in I$ con vector normal \mathbf{n}_l que se mueve regularmente con velocidad normal v_l , se ha de cumplir que

$$(5.38) \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_l = v_l \quad \text{sobre } \Gamma(t).$$

Para ser más precisos, si la frontera libre viene descrita por una función $\Phi(\mathbf{x}, t) = 0$, la última condición anterior se escribe

$$(5.39) \quad \Phi_t + \nabla_{\mathbf{x}} \Phi \cdot \mathbf{u}_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{sobre } \Gamma(t).$$

El siguiente análisis concierne a la conservación de impulso, del que se deducen las **condiciones dinámicas** en la frontera libre. Éstas dicen que en la frontera libre existe continuidad de esfuerzos normales,

$$(5.40) \quad \Pi_1 \cdot \mathbf{n}_l = \Pi_2 \cdot \mathbf{n}_l.$$

Repitiendo la demostración del teorema de Cauchy sobre un dominio de tipo rectangular con un lado paralelo a la frontera libre se deduce en el límite que la falta de equilibrio de esfuerzos conduce a densidades de fuerza infinitas en dirección normal a la frontera. En el caso de los fluidos perfectos esta observación conduce a la *ley de continuidad de presiones*:

$$(5.41) \quad p_1 = p_2 \quad \text{sobre } \Gamma(t).$$

Esta ley está deducida sobre la base de que no existen en la frontera libre fuentes de esfuerzo. En la práctica estos existen y toman la forma de **tensión superficial**. La explicación racional de este concepto corresponde a la química-física y tiene como efecto el de intentar reducir el área de la superficie de contacto. Aquí nos bastará exponer la modelización matemática resultante: existe un término de esfuerzo superficial normal de la forma

$$(5.42) \quad \Pi_{ts} = \kappa \mathcal{H} \mathbf{n},$$

donde $\kappa > 0$ es una constante llamada coeficiente de tensión superficial y H es la curvatura media de la superficie, dada por

$$(5.43) \quad \mathcal{H} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

donde R_1 y R_2 son los radios de curvatura principales. La ley de equilibrio es pues

$$(5.44) \quad p_1 - p_2 = \kappa \mathcal{H}.$$

El signo del término de tensión superficial es tal que la presión es mayor hacia el lado hacia el que está curvada la superficie. Se suele decir el lado *hacia el que sonrío*. En términos de derivadas parciales \mathcal{H} es un operador no lineal de segundo orden lo que complica extraordinariamente la teoría matemática (a salvo de hacer alguna aproximación afortunada o recurrir al cálculo numérico).

CONTACTO LÍQUIDO-VAPOR. El caso más simple de frontera libre se presenta en el estudio del contacto líquido-vapor, en el que se suelen despreciar las características cinemáticas del vapor y concentrarse en el líquido, sobre el que el vapor de todos modos ejerce una presión p_0 que podemos suponer constante (incluso despreciable). El líquido está lógicamente debajo de forma que la frontera libre viene dada por la fórmula $z = g(x, y)$ y se tienen sobre ella las relaciones de contorno libre

$$\begin{cases} w = \frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x}u + \frac{\partial g}{\partial y}v \\ p(x, y, g(x, y)) = p_0 + \kappa\mathcal{H}. \end{cases}$$

siendo u, v y w las componentes de la velocidad del líquido que han de ser evaluadas en $\Gamma(t) = \{(x, y, z) : z = g(x, y)\}$. Este tipo elemental de frontera libre se denomina frontera libre **ideal** o **clásica**. Para resolver el problema se añaden las ecuaciones dentro del líquido, más las condiciones de contorno usuales en la frontera exterior fija.

NOTA. La experiencia muestra que el coeficiente de tensión superficial varía con la temperatura, en forma aproximadamente lineal decreciente.

5.11 Algunos ejemplos clásicos

Ejemplo 5.4 FLUJO LAMINAR NO VISCOSO. (a) Veamos primeramente que en 1D las ecuaciones de los fluidos ideales ($\rho = 1$) se reducen a hallar una función velocidad $u = u(x, t)$ y una presión $p(x, t)$ tales que

$$u_t = -\partial_x p(x, t) + f, \quad u_x = 0.$$

Recuérdese que la primera es un balance de fuerzas. Se ve entonces que u es sólo función de t , y si f es cero (o función de t) p_x también lo es, de modo que p es lineal como función de x (ley de la caída de presión lineal). Se deduce que el problema tiene solución única $u = u(t)$ dadas condiciones iniciales sobre u , $u(0) = a$, y de contorno sobre p , por ejemplo:

$$p(0, t) = p_0(t), \quad p(A, t) = 0.$$

Con $f = 0$ queda

$$(5.45) \quad u(t) = a + \frac{1}{A} \int_0^t p_0(s) ds, \quad p(x, t) = p_0(t) \left(1 - \frac{x}{A}\right).$$

En realidad p está determinada para cada t salvo una constante, de forma que sólo el salto de presión $P(t) = p(0, t) - p(A, t)$ es importante. El resultado obtenido (5.45) es un tanto irreal porque predice que un gradiente constante de presión provoca un régimen de velocidades que diverge con el tiempo, $u = a + p_0 t$. Por otra parte, para salto de presión nulo se obtiene una velocidad constante. Ello se debe evidentemente a que nuestro modelo no tiene en cuenta la fricción.

(b) El mismo ejemplo representa el flujo ideal laminar creado en un canal (2D) o tubo (3D) por un gradiente de presión impuesto, siendo x la coordenada longitudinal. Veamos en detalle el caso 2D. Nos interesan soluciones *laminares*, es decir, con velocidades de la forma $\mathbf{u} = (u(x, y, t), 0)$. Las ecuaciones implican entonces que

$$u_x = 0, \quad u_t = -p_x, \quad p_y = 0.$$

Con ello la función p es como antes función lineal de x con coeficientes funciones de t y ahora u no sólo depende de t sino que también puede depender arbitrariamente de la variable transversal y , pues aunque u_t sólo depende de t podemos tomar dato inicial $\mathbf{u}(x, y, 0) = (a(y), 0)$ con a arbitraria. Es de notar que al depender la velocidad arbitrariamente de la coordenada transversal se tiene en particular un fenómeno de *deslizamiento* sobre las paredes, irreal desde el punto de vista físico y que se debe de nuevo a la falta de fricción. Ello se corrige introduciendo los efectos de viscosidad, de la que hablaremos en el capítulo 6.

Un ejemplo típico discutido en la literatura es la posibilidad de mantener un flujo laminar en un canal o tubo, $0 < y < 1$, con dos velocidades $f = U_1$ para $0 < y < 1/2$ y $f(y) = U_2$ para $1/2 < y < 1$. En la práctica se observa que tal situación es irreal y la *línea de discontinuidad* deviene una franja de *turbulencia* (formada por *vórtices*, que estudiaremos en el capítulo 14).

Concluimos que el ejemplo anterior no es totalmente adecuado como modelo de un fluido real por los problemas señalados de deslizamiento, viscosidad y turbulencia. Sin embargo este tipo de fluidos perfectos es realista en muchos casos y la teoría en varias dimensiones es, aparte de la utilidad práctica, muy interesante matemáticamente, en realidad es ya una rama clásica de las matemáticas. \square

Veamos ahora algunos ejemplos clásicos de campos vectoriales que son posibles soluciones de las ecuaciones de Euler incompresibles. Para empezar, el lector comprobará fácilmente que el campo constante $\mathbf{u} = \mathbf{a}$ es un campo admisible con presión $p = C(t)$.

Ejemplo 5.5 VELOCIDAD LINEAL IRROTACIONAL. Como siguiente paso consideramos campos lineales que se anulan en un punto, sea $\mathbf{x} = 0$. Tomemos una velocidad de la forma

$$(5.46) \quad \mathbf{u} = \mathbf{D} \mathbf{x},$$

donde \mathbf{D} es una matriz simétrica 3×3 , lo que garantiza el carácter irrotacional del fluido. El hecho de que sea incompresible equivale a pedir que \mathbf{D} tenga *traza nula*. Esta restricción es suficiente, pues la ecuación de Euler nos da

$$\nabla p = -\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\rho \mathbf{D} \mathbf{u} = -\rho \mathbf{D}^2 \mathbf{x},$$

que deriva de un potencial y admite por lo tanto una presión. Ésta viene dada por la fórmula

$$(5.47) \quad p(\mathbf{x}, t) = -\frac{\rho}{2} \langle \mathbf{D}^2 \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -\frac{\rho}{2} |\mathbf{D} \mathbf{x}|^2 = -\frac{\rho}{2} |\mathbf{u}|^2,$$

salvo un sumando arbitrario dependiente sólo del tiempo. Designamos el producto escalar usual por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para mayor claridad. Comprobar que el potencial de velocidades (que no tiene nada que ver con la presión) viene dado por

$$(5.48) \quad \Phi = \frac{1}{2} \langle D\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle.$$

Reducir la matriz D a forma diagonal mediante un cambio de coordenadas ortogonal y describir las trayectorias.

Ejemplo 5.6 ROTACIÓN LINEAL. El otro tipo de campo elemental considerado en la sección 5.7 es de la forma

$$(5.49) \quad \mathbf{u} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \times \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x},$$

donde \mathbf{A} es una matriz antisimétrica. Demostrar que corresponde a una solución de la ecuación de Euler con presión

$$(5.50) \quad p = -\frac{\rho}{2} \langle \mathbf{A}^2 \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + C(t) = \frac{\rho}{2} |\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 + C(t) = \frac{\rho}{2} |\mathbf{u}|^2 + C(t).$$

Describir las trayectorias suponiendo que $\vec{\omega} = (0, 0, k)$. Por supuesto, en este caso no existe potencial de velocidades.

El ejercicio siguiente explora el fenómeno de **no unicidad** para estados estacionarios.

EJERCICIO 5.5*. ROTACIÓN GENERAL. (a) Añadir la condición de incompresibilidad al ejercicio 5.2, suponer que el flujo es estacionario y demostrar que \mathbf{u} toma la forma

$$(5.51) \quad \mathbf{u} = v(r)\mathbf{e}_\theta.$$

(b) Demostrar que dados datos de contorno adecuados la solución no es única. Explicarlo relacionándolo con el ejercicio anterior. Tómese $\mathbf{f} = 0$ para mayor comodidad.

(c) Hallar en particular el movimiento circular uniforme. Calcular su vorticidad.

(d) Demostrar que el único flujo de los anteriores que es irrotacional tiene de fórmula

$$(5.52) \quad v(r) = \frac{C}{r}.$$

(e) Deducir la siguiente fórmula para calcular la presión, conocida la velocidad \mathbf{u} :

$$(5.53) \quad p_r = \rho \mathbf{u}^2 / r.$$

COMENTARIO SOBRE LA NO UNICIDAD. Habíamos visto que el problema de evolución posee unicidad. Más adelante se estudiarán los flujos potenciales y la vorticidad, lo que permitirá entender mejor el fenómeno de no unicidad.

5.12 Soluciones particulares y teoría general

Como hemos señalado al comienzo del capítulo, el objeto último de la teoría matemática de fluidos es describir el comportamiento del conjunto de soluciones de los problemas bien propuestos que se formulan como consecuencia de la derivación racional de las leyes que los rigen. También hemos apuntado que, dada la complejidad y dificultad de esta tarea, la obtención y análisis de soluciones particulares adecuadas es un arma fundamental para lograr una visión parcial del vasto panorama. En este capítulo, tras la modelización y formulación de los principales problemas, hemos dedicado más tiempo a analizar algunas de estas soluciones particulares que a la teoría general, método que corresponde a un curso introductorio y que seguiremos en capítulos posteriores. Para que este análisis parcial sea útil es preciso que soluciones discutidas sean representativas, concepto claro en abstracto pero más difícil de precisar. En concreto, es crucial que se dé la tercera propiedad del problema bien propuesto, la *dependencia continua*, que garantiza que pequeñas variaciones de los datos no alteran el comportamiento de la solución. Tal propiedad, utilizada frecuentemente bajo la denominación de *estabilidad de las soluciones*, no siempre es válida en mecánica de fluidos y es el origen de aspectos fundamentales de esta ciencia, como la turbulencia. En un texto introductorio como el presente las soluciones particulares cuidadosamente seleccionadas jugarán un gran papel como índice de las teorías subyacentes. Señalemos sin embargo que el avance combinado del análisis funcional y el cálculo numérico en las últimas décadas ha hecho perder al cálculo de soluciones particulares gran parte de su antigua preeminencia.

Hay un interés especial en obtener *soluciones estacionarias* para procesos que son evolutivos. Lo que da relevancia a estas soluciones es el hecho comprobado de que, partiendo de muy diversas condiciones iniciales, el proceso evolutivo tiende tras una *etapa transitoria* hacia un estado estable, que es el que se describe en forma estacionaria. Por supuesto, las soluciones estacionarias que no son estables para el problema de evolución tienen escaso interés. Como excepción al énfasis en las soluciones estacionarias aparecerán en algunos contextos soluciones de tipo oscilatorio o frentes de propagación, como los choques del capítulo 7.

Hay otro aspecto de gran interés también relacionado con la dependencia continua. Se trata de que, planteados en su generalidad, los problemas de la mecánica de fluidos son difícilmente abordables por el análisis matemático, o en todo caso su análisis conduce a complicaciones innecesarias que dificultan la obtención de conclusiones relevantes. Por ello se derivan y postulan *problemas aproximados* o *simplificados*, de los que se espera que reflejen las propiedades relevantes del problema original. Entra entonces en juego el concepto de *estabilidad estructural*, es decir ante perturbaciones no de los datos sino del problema. En caso de falta de estabilidad de una solución ante perturbaciones, sea de los datos o con respecto a las aproximaciones realizadas, se dice que *tal solución no es física* y su utilidad es en general escasa. No siempre es fácil demostrar teóricamente la estabilidad de las soluciones propuestas, pero existen métodos parciales que dan seguridad

al científico aplicado, como son el acuerdo con la evidencia experimental y el acuerdo con los cálculos numéricos. Comentarios parecidos merecen las teorías que imponen *hipótesis restrictivas*, por ejemplo la suposición de que el flujo es potencial o que la viscosidad es nula, tal como hemos hecho en este capítulo.

Por otra parte, una vez formulados estos modelos tienen una vida autónoma como problemas matemáticos y algunos de ellos han visto desarrollarse una enorme teoría, han adquirido gran relevancia en la literatura matemática y con frecuencia han hallado nuevas e inesperadas aplicaciones, como sucede con las ecuaciones de Laplace, del calor o de ondas. Ahora bien, dado que son casi sin excepción modelos derivados tras un cúmulo de hipótesis y simplificaciones, la aplicación de sus conclusiones a los problemas de la ciencia natural con olvido de las condiciones en que se efectuó la derivación y posterior simplificación del modelo llevan a frecuentes y a veces desastrosos errores, que el estudio de los cursos como el presente debería ayudar a evitar. Todo lo cual no invalida el hecho de que toda teoría predictiva se basa en hipótesis y simplificaciones adecuadas.

Estudio posterior de los fluidos ideales

Los flujos potenciales son en algún sentido los flujos más simples. En la práctica es muy fácil construir múltiples ejemplos de flujos potenciales, bien conocidos en la mecánica de fluidos desde los tiempos de BERNOULLI y EULER, utilizando recursos clásicos del análisis matemático. A ello dedicaremos los capítulos 12 y 13. Como aplicación llegaremos a comprender los hechos más elementales de la teoría matemática del vuelo. El estudio de los flujos ideales rotacionales a través de las propiedades de la vorticidad se realizará en el capítulo 14.

Esquema del capítulo

$$\text{Fluidos} \left\{ \begin{array}{l} \text{Perfectos} \left\{ \begin{array}{l} \text{Incompresibles} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ideales} \left\{ \begin{array}{l} \text{Irrotacionales} \text{ --- Potenciales} \\ \text{Rotacionales} \end{array} \right. \\ \text{No homogéneos} \end{array} \right. \\ \text{Compresibles} \dots\dots\dots \end{array} \right. \\ \text{Viscosos} \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Resumen

- Nuevas magnitudes:

presión no hidrostática, $\pi = p + \rho U$.

vorticidad, $\vec{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$.

potencial: $\nabla\Phi = \mathbf{u}$.

coeficiente de tensión superficial: κ .

- Ecuación de Euler para un fluido perfecto:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mathbf{f}.$$

- Fórmula de Bernoulli para un flujo irrotacional:

$$H = \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = \text{constante}.$$

Referencias para el capítulo

[Eu] L. EULER, *Principes généraux du mouvement des fluides*, Mém. Acad. Sci. Berlin **11** (1755), 274–315.

[Ka] T. KATO, *On classical solutions of the two-dimensional non-stationary Euler equation*, Archive Rational Analysis and Mechanics, **25** (1967), pp. 296–305.

[MB] A.J. MAJDA, A.L. BERTOZZI, “Vorticity and incompressible flow” Cambridge Texts in Applied Mathematics, **27**. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Wo] W. WOLIBNER, *Un théorème sur l’existence du mouvement d’un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long*, Math. Z. **37** (1933), 698–725.

Capítulo 6

Los fluidos viscosos

Se introduce en este capítulo el concepto de viscosidad, que representa un paso fundamental en la modelización de los fluidos reales. Se deriva la ecuación de Navier-Stokes, el gran hito de la teoría matemática de los fluidos, con sus versiones incompresible y compresible. Para ello se introduce una nueva magnitud física, el coeficiente (coeficientes, en el caso compresible) de viscosidad. Afortunadamente el coeficiente puede suponerse constante en la mayor parte de las situaciones, de lo contrario se complicaría enormemente el panorama matemático.

Las ecuaciones de Navier-Stokes son utilizadas para describir el movimiento de los fluidos usuales, como el agua, el aire o el aceite, y son por ello un modelo básico en diversas ciencias, como la aeronáutica, la meteorología, la hidráulica,... La ecuación que rige la dinámica de un fluido viscoso fue establecida de forma clara y matemáticamente convincente en 1845 por G.G. STOKES, 90 años más tarde de la formulación por L. EULER de la ecuación que rige la dinámica de los fluidos ideales, y ¡158 tras los *Principia* de NEWTON! El estudio matemático de las ecuaciones de Navier-Stokes es de gran dificultad y sólo ha podido ser abordado con éxito ya avanzado el presente siglo, a partir de los años 30; aún hoy día siguen abiertos algunos de los problemas matemáticos básicos.

En el capítulo se abordan los temas principales del estudio de los fluidos viscosos incompresibles newtonianos, correspondiendo a su mayor simplicidad. Para finalizar el capítulo se comenta brevemente la existencia de los fluidos viscosos no newtonianos, de gran interés en la investigación actual.

6.1 Fluidos newtonianos. Ecuación de Navier-Stokes

Éstos son fluidos más realistas que los llamados perfectos, introducidos en el capítulo anterior, pues admiten la acción tangencial entre capas contiguas llamada **viscosidad**, fenómeno que aunque presenta mayor dificultad matemática es fácil de observar experimentalmente y debe ser tenido en cuenta por lo tanto en la ciencia aplicada. Para un fluido estacionario o en movimiento uniforme se tiene el mismo tensor de esfuerzos, $\mathbf{S} = -p \mathbf{I}$, pero esta estructura cambia ante el movimiento relativo de las capas de fluido contiguas. El punto fundamental de la modelización es la suposición de que las fuerzas de contacto dependen del estado de movimiento del fluido sólo a través de los gradientes de velocidad, tal como se expresa en el siguiente postulado debido al gran físico-matemático inglés George Gabriel STOKES:

(**H₄**) POSTULADO DE STOKES. *El tensor de esfuerzos \mathbf{S} es función de \mathbf{u} a través de la matriz derivada $\nabla \mathbf{u}$ en el mismo instante y punto.*

Hacemos pues la hipótesis de *respuesta instantánea y local*. A éste se añade un postulado de conveniencia matemática que resulta justo en la práctica:

(**H₅**) POSTULADO DE LINEALIDAD. *La dependencia de \mathbf{S} respecto a $\nabla \mathbf{u}$ es lineal (más precisamente, afín).*

Los fluidos que obedecen a estos dos postulados se llaman **newtonianos**, son los fluidos más normales. En su forma más elemental, la dependencia del postulado (H4) ya había sido descrita por NEWTON, de ahí el nombre dado a los fluidos, ver la cita en la reseña histórica. La dependencia lineal apuntada implica que 9 funciones (las componentes S^{ij} del tensor de esfuerzos) se expresan linealmente como función de 9 variables, las componentes de $\nabla \mathbf{u}$:

$$(6.1) \quad S^{ij} = -p \delta_{ij} + \tau^{ij}, \quad \tau^{ij} = \sum_{kl} a_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}.$$

La parte $p(\mathbf{x}, t)$ del tensor de esfuerzos se llama *parte isótropa* y se identifica con la variable presión usual (es decir la variable termodinámica, cf. capítulo 7). La parte τ^{ij} la parte *desviatoria* o *desviacional*¹. Esta parte contiene en principio ¡81 coeficientes a determinar! Ahora bien, vemos inmediatamente que S^{ij} es simétrico lo que reduce las 9 incógnitas finales a 6 y la cuenta se pone en 54. Realmente, los coeficientes independientes son muchos menos, como veremos en un momento. ¡Los modelos matemáticos no deben ser más complejos de lo necesario y las matemáticas ayudan a ello!

Para realizar una ulterior reducción, que será drástica, hemos de suponer que el medio es *isótropo* y *homogéneo*, de forma que las propiedades de la dependencia estudiada sean invariantes ante todo cambio de coordenadas dado por una transformación ortogonal, es decir que no existen ni en el medio ni en el fluido direcciones privilegiadas, y que la ley de dependencia no depende del lugar o tiempo considerados. Este hecho se resume en la

¹*deviatoric stress* en inglés.

hipótesis:

(**H₆**) La dependencia $\tau = \tau(\nabla \mathbf{u})$ es independiente del punto (\mathbf{x}, t) e invariante ante las simetrías y transformaciones ortogonales del espacio, es decir

$$\tau(\mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}^{-1}) = \mathbf{Q} \cdot \tau(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{Q}^{-1}$$

para toda matriz ortogonal y toda simetría \mathbf{Q} .

(En una matriz ortogonal $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\dagger$, donde \mathbf{Q}^\dagger es la transpuesta de \mathbf{Q}). En estas condiciones se demuestra matemáticamente que existen en realidad sólo **dos** constantes distintas libres en la dependencia de τ respecto a $\nabla \mathbf{u}$.

Teorema 6.1.1 *Bajo las hipótesis (H4), (H5) y (H6) existe una función $p(\mathbf{x}, t)$ y coeficientes λ y μ tales que*

$$(6.2) \quad \mathbf{S} = -p\mathbf{I} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger).$$

Como dijimos en las secciones 4.2 y 4.4 la matriz $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\nabla \mathbf{u})$ es la parte simétrica de $\nabla \mathbf{u}$ y se la llama *matriz de la velocidad de deformación*². La parte antisimétrica de $\nabla \mathbf{u}$ no interviene en \mathbf{S} . Los coeficientes μ y λ se llaman *primer* y *segundo coeficiente de viscosidad*³. Corresponden a los coeficientes de LAMÉ de la elasticidad. Se suele suponer que son constantes, aunque pueden depender de la presión y la temperatura en general, ver nota al final de la sección. Obsérvese que $-p\mathbf{I}$ es el valor de \mathbf{S} en ausencia de gradientes de velocidad.

Hemos alcanzado el punto culminante de la modelización matemática de los fluidos. La introducción de la viscosidad en el estudio de los fluidos “reales” se debe ante todo al ingeniero y matemático NAVIER (1822, publicado en 1827), que aplicó ideas derivadas de sus estudios de la elasticidad; estas ideas carecían de la sólida base racional que estamos exponiendo y se aplicaban sólo al caso incompresible. Su trabajo fue prontamente reconocido en su justo valor y motivó un proceso en el que podemos mencionar las aportaciones de CAUCHY, 1828, POISSON, 1829 y ST VENANT, 1843, culminando finalmente con STOKES, 1845, de una manera elegante y racional, al uso actual. ¡Momentos estelares de la ciencia y de la cultura!

Sólo nos queda calcular la divergencia de \mathbf{S} para poder escribir la ecuación completa de la velocidad. En virtud de las definiciones adoptadas, se derivan de (3.11) las ecuaciones de conservación del impulso:

$$(6.3) \quad \rho \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + f_i$$

²no confundir con la matriz de deformación de la posición \mathbf{M} , sección 1.3.

³en inglés se emplean los términos *shear viscosity coefficient* para μ y *bulk viscosity coefficient* para λ .

con $i = 1, 2, 3$. Éstas son las famosas **ecuaciones de Navier-Stokes** en su forma general, bastante imponente. Como dijimos los coeficientes μ y λ pueden depender de T y ρ , pero en muchos casos se pueden suponer constantes. Ello es un alivio, pues para λ y μ constantes se obtiene una forma más manejable y mucho más utilizada, que en forma vectorial dice

$$(6.4) \quad \boxed{\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{f}.}$$

Note el lector que el tercer término del segundo miembro es un gradiente de divergencia, que viene dado en coordenadas así:

$$\{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})\}_i = \sum_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}.$$

El laplaciano de \mathbf{u} se toma componente a componente (en coordenadas cartesianas). Recordemos por último que para $\mu = \lambda = 0$ se obtienen de nuevo las leyes de los fluidos perfectos, llamados también por esa razón **no viscosos**, o también **invíscidos**.

NOTA. La teoría cinética indica que los coeficientes μ y λ dependen solamente de la temperatura y no de la presión, lo cual tiene su confirmación en la experiencia. En los gases aumentan con la temperatura; en los líquidos disminuyen, aunque la variación es menos importante.

6.2 Idea de la demostración del teorema 6.1.1

1. En un primer paso se separa la matriz $\nabla \mathbf{u}$ en su parte simétrica y su parte antisimétrica,

$$(6.5) \quad \nabla \mathbf{u} = \mathbf{D} + \mathbf{A},$$

y se comprueba que la parte antisimétrica representa (localmente) una rotación rígida alrededor de un cierto eje, por lo que \mathbf{A} no refleja ninguna deformación del volumen fluido. En muchos libros se modifica (H4) para especificar que por ello \mathbf{S} depende en realidad de $\nabla \mathbf{u}$ sólo a través de \mathbf{D} . Ahora bien, tal hipótesis suplementaria es matemáticamente superflua, puesto que la independencia de \mathbf{S} respecto a \mathbf{A} se puede deducir de (H6) y del hecho que \mathbf{S} es un tensor simétrico.

2. Dado que \mathbf{D} es simétrica, existen ejes especiales en que se puede diagonalizar. Mediante la invariancia por transformaciones ortogonales todo se reduce a ver cuál es la forma de \mathbf{S} cuando \mathbf{D} es diagonal.

3. Sea $\mathbf{D} = \text{diag}\{d_1, d_2, d_3\}$. La isotropía implica que entonces $\tau(\mathbf{D})$ también ha de ser diagonal, $\tau = \text{diag}\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$. Las τ_i son funciones lineales de las d_i y la dependencia es simétrica en i . Se deduce entonces fácilmente que la única posibilidad es

$$(6.6) \quad \tau_i = A d_i + B(d_1 + d_2 + d_3),$$

con A y B constantes [Indicación: todos los coeficientes de τ_i respecto a d_i son iguales; todos los de τ_i respecto a d_j , $j \neq i$ también iguales].

4. Se observa que $d_1 + d_2 + d_3 = \text{Traza}(\mathbf{D})$ es un invariante de \mathbf{D} . Con ello se llega a (6.2) poniendo $A = 2\mu$ y $B = \lambda$.

Extensión. Se demuestra en los cursos de álgebra tensorial que toda aplicación *isótropa* $\mathbf{K} : \mathcal{L}(\mathbf{R}^3) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$, $\mathbf{S} = \mathbf{K}(\mathbf{D})$, se puede escribir en la forma

$$(6.7) \quad \mathbf{S} = k_0\mathbf{I} + k_1\mathbf{D} + k_2\mathbf{D}^2,$$

donde los escalares k_i dependen de los invariantes simétricos $I_i(\mathbf{D})$, $i = 1, 2, 3$, del tensor \mathbf{D} . Si \mathbf{K} es lineal el tercer término desaparece y tenemos el teorema 6.1.1.

6.3 Fluidos viscosos incompresibles

Al igual que en los fluidos perfectos, el estudio de los fluidos viscosos contempla dos grandes capítulos, según sean incompresibles o compresibles. El primer tipo se utiliza no sólo para describir los fluidos exactamente incompresibles, sino también aquéllos como el agua o el aire a baja velocidad en que las variaciones de densidad pueden ser ignoradas. Para fluidos incompresibles las ecuaciones de Navier-Stokes adquieren una forma más simple, que es la más conocida. En efecto, entonces $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ y el tensor de esfuerzos viene dado por

$$(6.8) \quad \mathbf{S} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}.$$

Si como es usual en este caso suponemos que μ es una constante conocida (¡lo que elimina una posible incógnita del problema!) el sistema de las ecuaciones de un fluido homogéneo, incompresible y viscoso queda en la forma

$$(6.9) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho}\nabla\mathbf{p} + \nu\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned}}$$

donde hemos escrito la ecuación de NS en términos cinemáticos (es decir de la aceleración). El coeficiente $\nu = \mu/\rho$ es el llamado *coeficiente de viscosidad cinemático* (mientras que μ es el dinámico).⁴ El coeficiente importante en la descripción del movimiento (es decir, en la cinética) es con frecuencia ν y no μ . Esta es una primera observación sobre el problema de como medir los valores de los parámetros, que es de gran importancia en el estudio de los fluidos viscosos.

⁴ALGUNOS DATOS PRÁCTICOS. La unidad de ν es el stokes, $1 \text{ stokes} = 1 \text{ cm}^2/\text{seg}$, mientras que μ se mide en poises, $1 \text{ poise} = 1 \text{ dina} \times \text{seg}/\text{cm}^2$. Es curioso observar que mientras el agua tiene un coeficiente dinámico de viscosidad mucho mayor que el aire, como parece evidente, sin embargo su coeficiente cinemático es menor debido a la gran diferencia de densidades. A 15°C se tiene para el aire: $\nu_a = 1.65 \times 10^{-1}$ contra $\nu_w = 1.1 \times 10^{-1} \text{ cm}^2/\text{seg}$ para el agua.

Por otra parte, es usual suponer que el fluido es inicialmente homogéneo, $\rho(\mathbf{y}, \mathbf{0}) =$ constante, y esta propiedad se mantiene en el tiempo pues $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{y}, \mathbf{0})$, cf. secciones 2.2 y 5.5, así que ρ resulta entonces constante en \mathbf{x} y t .

El problema se ha de resolver con adecuadas condiciones iniciales y de contorno. Las condiciones naturales de contorno para la velocidad son del tipo **no deslizamiento**,⁵

$$(6.10) \quad \mathbf{u} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

lo cual es una notable diferencia con las condiciones de derivada normal (5.8), (5.9) del fluido perfecto. El ajuste de la velocidad en el borde es una de las contribuciones realistas más obvias de la introducción del término de viscosidad. Matemáticamente se explica por la presencia de un operador diferencial espacial de segundo orden, mientras que las ecuaciones de Euler contienen derivadas espaciales de primer orden.

Más en general, se dan ejemplos de interés en que o bien el borde es permeable o bien es impermeable y se desplaza con una velocidad \mathbf{v} dada. Entonces se impone la condición

$$(6.11) \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Consideraremos con más detalle la presión en la sección 6.10. También se pueden tomar dominios en forma de paralelepípedo con condiciones de contorno periódicas sobre \mathbf{u} y p . Estos casos tienen interés en estudios analíticos y numéricos dado que la teoría se simplifica en virtud de la periodicidad, que permite argumentos de invariancia por desplazamiento en un volumen finito. En los casos con condiciones de borde “reales” de los tipos anteriores aparecen complicaciones suplementarias en el borde que se evitan así en una primera aproximación al problema.

Las ecuaciones de la energía no son necesarias para resolver el problema hidrodinámico, aunque la consideración de la energía interviene en el estudio de la estabilidad de las soluciones obtenidas. Hablaremos de la energía en la sección 6.11.

EJERCICIO 6.1. Escribir el sistema (6.9) en coordenadas cilíndricas y esféricas.

6.4 Escalas, cálculo adimensional y número de Reynolds

Antes de abordar la discusión de algunos de los ejemplos más característicos de flujos viscosos es interesante realizar una reflexión de tipo práctico. Se trata de calibrar la influencia de los parámetros y dimensiones que aparecen en las ecuaciones de Navier-Stokes y más en general en la mecánica de fluidos. Es un hecho corriente, aunque desafortunado, que los estudiantes de matemáticas se ocupen sólo de las consideraciones cualitativas o cuantitativas en forma totalmente abstracta, desatendiendo los aspectos llamados “prácticos”.

⁵ *no slip* en inglés

Esta tendencia priva a los estudiosos de un tipo de conocimiento a ras de tierra que es fuente de intuiciones tan necesarias como fructíferas para la investigación, y que por supuesto los grandes maestros del pasado que aparecen en estas páginas no descuidaban, piénsese en GALILEO o NEWTON preocupándose del pulido de las lentes, o en el príncipe de la “matemática pura” GAUSS con sus trabajos de geodesia que motivaron sus estudios sobre la teoría de superficies (realizó la triangulación del reino de Hannover por encargo del gobierno), o sus infatigables cálculos con números enteros⁶.

Pues bien, la ecuación de NS tiene varios tipos de términos, todos ellos con dimensiones de fuerza por unidad de volumen, a saber:

(i) los términos de $\rho \, d\mathbf{u}/dt$ que representan la **inercia**; el segundo sumando, $\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ se suele llamar **término convectivo** o **de transporte**,

(ii) un término de **presión**, $-\nabla p$.

(iii) un término de **fuerzas exteriores**, \mathbf{f} ,

(iv) un término de **efectos viscosos**, llamado también término de **difusión** o **disipación**, $\mu \Delta \mathbf{u}$. El nombre de “disipación” tiene su justificación en el estudio de la energía, ver sección 6.11.

La cuestión que nos ocupa aquí es el hecho de que tanto la teoría como la aplicación se ven dificultadas porque cuatro términos son muchos términos para centrar la atención en todos a la vez, y es lo usual que no todos tengan el mismo orden de magnitud, y por tanto de importancia. En algunos casos algún término es nulo, en muchos casos alguno de los términos es despreciable. Se impone por ello un modo de medir esa *magnitud relativa*.

UNIDADES Y VARIABLES A ESCALA. La importancia relativa depende de las magnitudes de los datos o del dominio. Recordemos que en mecánica existen tres magnitudes independientes: espacio, tiempo y masa. Ello determina un sistema de unidades (por ejemplo el CGS: centímetro-gramo-segundo, o el MKS metro-kilo-segundo) en que se miden todas las demás magnitudes, como la velocidad (cm/sg en sistema CGS), la densidad (gr/cm^3) o la presión ($\text{gr}/(\text{cm} \times \text{sg}^2)$). Supongamos que tenemos un problema en que las longitudes que intervienen son del orden de L cm, los tiempos de T segundos y las masas de M gr. Estas cantidades son las llamadas magnitudes características fundamentales. Todas las demás magnitudes mecánicas se pueden medir con respecto a este patrón: la velocidad patrón será $U = LT^{-1}$, la densidad $\rho_0 = ML^{-3}$, la presión $P = ML^{-1}T^{-2}$ y la densidad de fuerza $F = ML^{-2}T^{-2}$. Introducimos ahora las **variables adimensionales**

$$(6.12) \quad \mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad t' = \frac{t}{T}, \quad \mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad p' = \frac{p}{P}, \quad \mathbf{f}' = \frac{\mathbf{f}}{F}.$$

En términos de las nuevas variables el sistema de Navier-Stokes (6.9) queda

$$(6.13) \quad \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla_{\mathbf{x}'}) \mathbf{u}' = -\frac{1}{\rho'} \nabla_{\mathbf{x}'} p' + \frac{1}{C} \Delta_{\mathbf{x}'} \mathbf{u}' + \frac{1}{\rho'} \mathbf{f}',$$

$$\nabla_{\mathbf{x}'} \cdot \mathbf{u}' = 0,$$

⁶que hoy día para nuestra fortuna podemos programar en un ordenador

donde recordamos que los gradientes se toman respecto a la nueva variable de espacio \mathbf{x}' . Observamos que el sistema resulta invariante salvo la aparición de una nueva constante en lugar del coeficiente de viscosidad cinemático, que equivale evidentemente a hacerlo adimensional con respecto a las magnitudes características elegidas:

$$(6.14) \quad \frac{1}{C} = \frac{\nu T}{L^2}.$$

Mientras ν tiene dimensiones de cm^2/seg , C es adimensional. La transformación anterior se llama **transformación de similaridad** o **semejanza** y también **cambio de escala**. Mediante tal cambio problemas que difieren en el tamaño de sus datos pueden ser reducidos al mismo cálculo *siempre que el parámetro restante en la ecuación, $1/C$, sea el mismo*. Imagine el lector un experimento de corrientes en torno a un ala de avión reducido a un experimento semejante con tamaños de laboratorio; las conclusiones del segundo se aplican al primero. Por ello el parámetro C tiene un papel fundamental en mecánica de fluidos, y se le conoce como **número de Reynolds**, $C = \text{Re}$. Con esta notación la ecuación de N-S queda en variables re-escaladas

$$(6.15) \quad \boxed{\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla'_{\mathbf{x}'}) \mathbf{u}' = -\frac{1}{\rho'} \nabla'_{\mathbf{x}'} p' + \frac{1}{\text{Re}} \Delta_{\mathbf{x}'} \mathbf{u}' + \frac{1}{\rho'} \mathbf{f}'}$$

Una vez decidido el paso a las nuevas variables se eliminan las primas, siempre teniendo en cuenta el nuevo significado adimensional de las variables.

MAGNITUDES BASE EN LA ESCALA. Hemos tomado como longitudes características fundamentales L , M y T y como derivadas las demás. Pero la distinción entre fundamental y derivada es un tanto artificial. Así, en la práctica de los fluidos es más normal que se den los valores de una longitud L , una velocidad U y una (o la) densidad ρ_0 como fundamentales. Entonces $T = L/U$ y el número de REYNOLDS vale

$$(6.16) \quad \boxed{\text{Re} = \frac{UL}{\nu}}$$

Obsérvese que entonces $P = U^2 \rho_0$ y $F = \rho_0 U^2 L^{-1}$. El procedimiento de cambio de escala aquí descrito es usado con gran frecuencia en matemáticas con el nombre de **normalización**. En ese lenguaje el número de Reynolds no es más que el inverso de la viscosidad renormalizada.

Concepto de semejanza hidrodinámica

Supongamos que tenemos un problema, por ejemplo la determinación del régimen estacionario de un fluido viscoso que llena el espacio y encierra un obstáculo esférico de radio R_1 . Supongamos conocida la velocidad U_1 del fluido “en el infinito” y el coeficiente ν_1 , y tomemos las fuerzas externas como nulas. No entran más datos en el problema. Consideremos ahora otro modelo semejante a escala de laboratorio con velocidad U_2 , viscosidad ν_2

y obstáculo de radio R_2 . El problema adimensional para ambas corrientes será el mismo si y sólo si

$$(6.17) \quad \text{Re} = \frac{U_1 R_1}{\nu_1} = \frac{U_2 R_2}{\nu_2},$$

en cuyo caso se puede calcular el régimen de velocidades $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)$ del fluido 1 a partir del fluido 2 mediante la fórmula

$$(6.18) \quad \frac{\mathbf{u}_1}{U_1} = \frac{\mathbf{u}_2}{U_2} = \mathbf{u}'.$$

6.5 Comportamientos límite. Ecuación de Stokes

Las propiedades de los fluidos viscosos dependen enormemente del número de Reynolds, Re , que es un parámetro intrínseco, es decir no eliminable por renormalización.

Es de gran interés considerar el comportamiento de la ecuación de NS cuando el parámetro intrínseco Re es muy grande o muy pequeño. En el límite $\text{Re} \rightarrow \infty$ obtenemos formalmente los fluidos no viscosos o perfectos. Tal límite es sin embargo causa de notables dificultades matemáticas, pues el término que se elimina formalmente de las ecuaciones, $(1/\text{Re}) \Delta \mathbf{u}$, es el de derivada más alta y se pierde el tipo de la ecuación diferencial (fenómeno llamado en matemáticas *perturbación singular*). En pocas palabras, el término en discusión puede no ser despreciable si $|\Delta \mathbf{u}| \rightarrow \infty$ cuando $\text{Re} \rightarrow \infty$. Ello se traduce en dificultades físicas: así, para altos valores de Re se dan espontáneamente fenómenos de turbulencia que son aún hoy día mal conocidos. Por otra parte, para esos altos valores se originan discontinuidades cerca de las paredes conocidas como problemas de **capa límite** que estudiaremos en el Capítulo 16.

En el otro extremo tenemos los fluidos muy viscosos con muy pequeño número de Reynolds. Para ellos los términos de inercia son despreciables respecto a los viscosos. Llegamos así a la **ecuación de Stokes** estacionaria

$$(6.19) \quad -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{f} = 0.$$

Si solamente despreciamos el término convectivo nos queda la ecuación de Stokes de evolución que junto a la ecuación de incompresibilidad da el **sistema de Stokes**

$$(6.20) \quad \boxed{\begin{aligned} \mathbf{u}_t + \frac{1}{\rho} \nabla p &= \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned}}$$

La ecuación de Stokes tiene sobre la Ecuación de Navier-Stokes la enorme ventaja matemática de ser lineal. El estudio de la ecuación de Stokes suele ser el prolegómeno ideal para introducir el aparato funcional que luego se usa en la ecuación de Navier-Stokes.

6.6 Ejemplos clásicos de Couette y de Poiseuille

Estudiamos a continuación algunos de los ejemplos más característicos de fluidos viscosos. Es de señalar que la obtención de soluciones explícitas se debe al hecho afortunado de que se anulen varios de los términos que intervienen en la ecuación completa de Navier-Stokes. Éste es un hecho notable sobre el que llamamos la atención del lector y que será discutido en más detalle al final de la sección.

Ejemplo 6.1 CORRIENTE DE UN FLUIDO VISCOSO EN UN CANAL. CORRIENTE DE COUETTE LINEAL ⁷. Deseamos empezar por la máxima simplicidad. Es inútil pensar en un modelo 1D, pues tal modelo no ofrece ninguna novedad respecto al caso no viscoso (¿por qué?). El ejemplo más simple no trivial de fluido viscoso es el que describe el régimen estacionario de un fluido incompresible homogéneo (por ejemplo, agua) que fluye en un canal horizontal de paredes paralelas separadas por una distancia d , una de las cuales permanece fija mientras la otra se desliza con movimiento uniforme, es decir velocidad constante U . Como suposición razonable de partida tomamos una velocidad “paralela” de la forma $\mathbf{u} = (u, 0)$. Ahora escribimos la ecuación de continuidad como $u_x = 0$ con lo que u es sólo función de y . La ecuación dinámica (6.9) queda

$$(6.21) \quad \mu u_{yy} = p_x, \quad p_y = 0.$$

Se deduce de la última igualdad que p es función de x y de la primera (siguiendo la conocida técnica de separación de variables) que p_x y u_{yy} son constantes. Tenemos pues

$$(6.22) \quad p(x) = -Cx - c,$$

donde la constante C mide el gradiente de presión, $C = -\nabla p := (p(0) - p(L))/L$, y la constante c es irrelevante. En un primer estudio y para más sencillez suponemos que no se ha establecido un gradiente de presiones en los extremos del canal, con lo que $p(x, y, t) =$ constante. Para determinar u recordamos las condiciones de contorno

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, d) = U.$$

La solución es pues

$$(6.23) \quad \boxed{u(x, y) = U \frac{y}{d}},$$

ejemplo típico del *shear flow*. Obsérvese la forma adimensional del resultado, $u/U = y/d$, es decir $u' = y'$ en la notación de la sección 6.4. Este movimiento no depende aparentemente de μ y existe también para los fluidos no viscosos. La diferencia estriba en el esfuerzo que se necesita para impulsar el fluido. La matriz \mathbf{D} y el tensor de esfuerzos son

$$(6.24) \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & U/(2d) \\ U/(2d) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} -p & \mu U/d \\ \mu U/d & -p \end{pmatrix},$$

⁷llamado *shear flow*, nombrado en honor de M. F. A. COUETTE, 1858-1943, más conocido por el ejemplo de flujo cilíndrico.

matrices constantes. Aquí se puede observar la proporcionalidad de S^{12} respecto a u_y , $S^{12} = \mu u_y$, dando razón a NEWTON⁸.

Ejemplo 6.2 CORRIENTE DE UN FLUIDO VISCOSO EN UN CANAL DE PAREDES FIJAS. CASO PARABÓLICO CON CAÍDA DE PRESIÓN.⁹ En un contexto similar al ejemplo anterior se impone un gradiente de presión y las paredes están inmóviles. Se considera primero un fluido comprendido en la región $-\infty < x < \infty$, $-a < y < a$ (un canal). Intentaremos hallar la corriente laminar estacionaria, es decir con velocidad

$$\mathbf{u} = (u, 0),$$

y u no depende de t . Procediendo como antes las ecuaciones se reducen a

$$u_x = 0, \quad p_x = \mu u_{yy}, \quad p_y = 0,$$

ahora con condiciones de contorno

$$u(x, -a) = u(x, a) = 0.$$

La solución es pues

$$(6.25) \quad p(x) = -Cx - c, \quad u = \frac{C}{2\mu}(a^2 - y^2).$$

El gradiente de presión, $C = |\nabla p|$ ha de ser no nulo. La constante c es irrelevante. Obsérvese que esta solución estacionaria se pierde cuando $\mu \rightarrow 0$.

(b) Comparar con el caso no viscoso, Ejemplo 5.4.

(c) Finalmente, calcular el esfuerzo cortante, $S^{12} = \mu u_y$, y demostrar que es máximo sobre la pared e independiente de μ .

Vamos a aplicar las ideas de cambio de escala para normalizar el problema. Tomamos como parámetros del cambio la longitud $d = 2a$ y la velocidad máxima U . Haciendo $u = Uu'$, $\mathbf{x} = d\mathbf{x}'$, $p = \rho U^2 p'$ y

$$\mu = \frac{\rho U d}{\text{Re}},$$

tenemos todo reducido a tamaño unidad; la ecuación efectiva toma la forma

$$\frac{\partial p'}{\partial x'} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}, \quad -\frac{1}{2} < y' < \frac{1}{2},$$

y la solución normalizada es

$$u'(y') = (1 - 4y'^2), \quad p' = -\frac{8}{\text{Re}} x'.$$

⁸que dijo: “The resistance arising from the want of lubricity in the parts of a fluid is, other things being equal, proportional to the velocity with which the parts of the fluid are separated from one another”. Ver Reseña Histórica.

⁹Estudiada por el ingeniero alemán G. HAGEN, 1839, y el médico-físico francés J. POISEUILLE, 1840.

EJERCICIO 6.2*. Problema tridimensional. Considérese la corriente de Poiseuille en un tubo de sección Ω , un abierto acotado de \mathbb{R}^2 . Tomando de nuevo una velocidad estacionaria dirigida a lo largo del eje del tubo, que se hace coincidir con el eje x , $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$, se tiene que la velocidad satisface

$$(6.26) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{C}{\mu} \quad \text{en } \Omega,$$

donde $C = |\nabla p|$ es constante. Se tienen además condiciones de contorno

$$u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Enúnciese el teorema de existencia y unicidad de solución para este problema en un adecuado espacio funcional.

(a) Demostrar que en el caso de sección circular de radio R se obtiene

$$(6.27) \quad p(\mathbf{x}) = -Cx - c, \quad u(\mathbf{x}) = \frac{C}{4\mu}(R^2 - y^2 - z^2).$$

Escribir la forma normalizada. Comparar con el caso de dimensión 1+1, cf. (6.25). Generalizar el problema a dimensión 1+n por analogía y explicar cuál es la diferencia en la forma de la solución.

(b) Calcular el débito (cantidad de agua que atraviesa la sección por unidad de tiempo) y hallar la llamada *ley de la potencia cuarta* de Hagen-Poiseuille,

$$(6.28) \quad \boxed{Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L}},$$

donde con la notación usual $\Delta p = C L$ es la caída de presión en una longitud L (es decir, Δ señala un incremento y no el laplaciano).

(c) Demostrar que el esfuerzo total cortante realizado en la pared es proporcional al área de Ω (válido para geometrías generales). [Sugerencia: escribir el esfuerzo sobre la pared de la forma

$$\Sigma = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = -p \mathbf{n} + \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| \mathbf{e}_x.$$

Integrar en el borde y utilizar el teorema de Gauss y la ecuación (6.26)].

EJERCICIO 6.3. FLUJO COMBINADO DE COUETTE-POISEUILLE. (a) Demostrar que cuando en un canal de anchura $2a$ se imponen un gradiente de presión constante y una pared superior móvil con velocidad U se obtiene la solución

$$(6.29) \quad \frac{u}{U} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y}{a} \right) + P \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right), \quad \text{con } P = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{a^2}{2\mu U}.$$

(b) Demostrar que para $P = -1/4$ el esfuerzo cortante $\mu \partial u / \partial y$ es cero en la pared inferior y que para $P < -1/4$ existe un flujo inverso (*backflow*) en la parte inferior del conducto. Este fenómeno es inestable.

EJERCICIO 6.4*. SOLUCIONES NO VISCOSAS Y SOLUCIONES LINEALES DE NS. Demostrar que los ejemplos lineales del capítulo anterior, ejemplos 5.5 y 5.6, son a la vez soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes, pues el término de viscosidad se anula. Se las llama soluciones **no viscosas**.

Del mismo modo se habla de soluciones **lineales** o **no convectivas** de NS cuando el término $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ se anula. Hallar las soluciones lineales entre los ejemplos vistos.

Por último valore el lector la influencia de la viscosidad en las soluciones de Couette y Poiseuille recién vistas.

6.7 Flujo de Poiseuille, inestabilidad y turbulencia

El flujo de Poiseuille da una respuesta matemática al problema de encontrar una ley de velocidades estacionaria para describir el flujo de un líquido en un tubo recto por ejemplo. En una ciencia aplicada como la mecánica la teoría debe acordarse con la realidad observada. De hecho, Jean Louis Marie POISEUILLE estudiaba la circulación de la sangre en las venas y arterias y sus investigaciones le llevaron a formular las leyes de circulación laminar de los fluidos viscosos en tubos cilíndricos tras una serie de experimentaciones especialmente precisas, en particular a él se debe la ley de la potencia cuarta (1844). Ahora bien, experimentos con fluidos reales en tubos demuestran que el flujo laminar estacionario de tipo Poiseuille se observa para bajos números de Reynolds, mientras que para altos números la situación observable experimentalmente viene descrita por un **flujo turbulento**, lleno de torbellinos o vórtices, corrientes de estructura muy compleja cuyos ejemplos más simples estudiaremos en el capítulo 14. En virtud de la teoría de semejanza explicada, la transición de un régimen a otro sólo dependerá del parámetro adimensional que queda al reducir la ecuación, es decir del número de Reynolds Re , y no de la velocidad, anchura del tubo o viscosidad tomados separadamente. En el agua tal transición se da hacia $Re = 2000$ (tomando como longitud característica el diámetro del tubo). Teniendo en cuenta la fórmula de Re y la viscosidad del agua para un tubo de 1cm la transición tiene lugar para $U \sim 0.2$ m/seg. Trate de observar el lector el paso a flujo turbulento en un grifo doméstico. La transición al régimen no laminar es también de gran importancia para el flujo sanguíneo.

Este fenómeno de cambio de comportamiento, que se da en situaciones muy diversas y no sólo para el flujo de Poiseuille, se describe en términos matemáticos como sigue: el flujo de tipo laminar (en este caso el flujo de Poiseuille) existe también a altos números de Reynolds, y es incluso la solución única para datos fijados, pero no es **estable** ante las más mínimas perturbaciones, y por lo tanto no tiene realidad física. Por el contrario, para

Re moderados el flujo laminar es estable, o, dicho de otro modo, físico. La transición de un modo de estabilidad a otro se denomina **bifurcación** y es una tema de enorme interés en la matemática actual. El flujo real a altos números de Reynolds es de tipo turbulento, difícil de describir matemáticamente, y en todo caso muy complejo.

6.8 Viscosidad y difusión

Estudiamos a continuación el modo en que evolucionan los fluidos viscosos. De nuevo partimos de ejemplos en que se admite la hipótesis de *laminaridad*. Más precisamente, vamos a suponer que, escogidos convenientemente los ejes coordenados, la velocidad se orienta a lo largo del eje X , es decir

$$(6.30) \quad \mathbf{u} = (u, 0, 0).$$

• En ese caso si consideramos un fluido *viscoso incompresible* y en ausencia de fuerzas exteriores se obtiene una considerable simplificación de las ecuaciones del movimiento que pone de relieve el *carácter difusivo* del mismo. Así, las ecuaciones de NS en las direcciones Y y Z se reducen a las expresiones

$$(6.31) \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

que implican que p es un función de x y t . Por otra parte la ecuación para la componente x da

$$(6.32) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u,$$

mientras que la ley de conservación se reduce a

$$(6.33) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

que nos dice que u no depende de x , $u = u(y, z, t)$. Escribimos ahora (6.32) en la forma

$$(6.34) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Dado que el primer miembro no depende de x y el segundo no depende de y ni z concluimos que ambos son únicamente función de t . En resumen tenemos una función $u(x, y, t)$ que satisface la siguiente ecuación del calor:

$$(6.35) \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = c(t)},$$

y una presión $p(x, t)$ dada por

$$(6.36) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -c(t).$$

El segundo miembro *acopla* ambas ecuaciones. La segunda es fácilmente integrable y da

$$(6.37) \quad p(x, t) = -c(t)\rho x + d(t).$$

• Si existe una fuerza exterior constante $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ el resultado es similar. Ahora las ecuaciones de NS en y y z dan una dependencia en ambas variables

$$(6.38) \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_2, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho f_3,$$

de tipo hidrostático, cf. capítulo 9. La ecuación (6.33) queda intacta (luego $u = u(y, z, t)$) y llegamos a la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_1,$$

de la que se deduce que

$$(6.39) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = c(t),$$

y

$$(6.40) \quad p = \rho(f_1 x + f_2 y + f_3 z + c(t)x) + d(t),$$

como antes. Las condiciones de contorno fijan usualmente los valores de c y d . En muchos casos se tiene incluso que $c(t) = 0$ como vamos a ver. Condiciones iniciales y de contorno fijan u .

Ejemplo 6.3 MOVIMIENTO PLANO PARALELO CON BORDE MOVIDO IMPULSIVAMENTE (PROBLEMA DE RAYLEIGH) Consideramos una situación un tanto esquemática, un fluido viscoso incompresible homogéneo bidimensional en un canal horizontal de base el eje X y de altura a lo largo del eje Y infinita. En ese caso se puede suponer que para grandes alturas ($y \sim \infty$) la presión es constante, luego $c(t) = 0$. En el momento inicial el fluido está en reposo $\mathbf{u} = 0$ y para $t > 0$ es arrastrado debido a un movimiento uniforme del suelo en dirección del eje X_+ con velocidad U . Tenemos pues que resolver la ecuación del calor para u :

$$(6.41) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

con condiciones iniciales de reposo

$$(6.42) \quad u(y, 0) = 0 \quad \text{para } y > 0,$$

y condición de contorno impulsiva

$$(6.43) \quad u(0, t) = U,$$

así como la condición natural

$$(6.44) \quad u(+\infty, t) = 0.$$

EJERCICIO 6.5. (a) Probar una solución del tipo *autosemejante*

$$(6.45) \quad u(y, t) = f(y/\sqrt{\nu t}),$$

y hallar f como solución de una ODE. Concluir que

$$(6.46) \quad u = U \left[1 - \frac{1}{\pi^2} \int_0^\eta e^{-s^2/4} ds \right], \quad \eta = y/(\nu t)^{1/2}.$$

(b) Demostrar la unicidad de la solución obtenida.

(c) Calcular la vorticidad para $t = 0$ y para $t > 0$. Interpretar cómo se difunde a lo largo del eje Y .

Ejemplo 6.4 Y EJERCICIO 6.6. Describir un movimiento similar ahora confinado entre dos paredes $y = 0$ e $y = H$, con la pared superior inmóvil.

[Sugerencia: separar la parte estacionaria, $u = U(1 - (y/H))$, y luego utilizar separación de variables.]

Ejemplo 6.5 Se considera el movimiento de un fluido viscoso incompresible homogéneo bidimensional laminar sobre un plano inclinado con ángulo de inclinación α respecto a la horizontal y fuerza exterior gravitatoria g , actuando en el sentido vertical negativo. Es ahora conveniente tomar el eje X a lo largo del plano inclinado y el Y perpendicular a él de modo que

$$(6.47) \quad \mathbf{f} = (g \sin \alpha, -g \cos \alpha).$$

EJERCICIO 6.7. Escribir las ecuaciones para u y p en el ejemplo anterior e integrarlas.

EJERCICIO 6.8. Escribir las ecuaciones del flujo de Poiseuille 2D no estacionario, resolver por separación de variables con gradiente de presión P constante y demostrar que para $t \rightarrow \infty$ se converge a la solución estacionaria. (Nota: observar que el tiempo entra en la forma $\nu t/a^2$). Ésta es la escala de tiempos intrínseca al problema. El problema de las escalas o dimensiones es fundamental en las aplicaciones.

6.9 Problemas con simetría polar. Flujo de Couette

Retomamos el estudio de las ecuaciones de los fluidos en coordenadas polares iniciado en el Capítulo 5, aplicado ahora a los fluidos viscosos. Además de lo antes visto necesitamos la expresión del operador laplaciano en estas coordenadas que resulta ser

$$(6.48) \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

cuya demostración dejamos como ejercicio al lector (obsérvese que $\Delta = \nabla \cdot \nabla$). Con ello es fácil escribir las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles, que para fuerza $\mathbf{f} = 0$ quedan

$$(6.49) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_r}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right), \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right), \end{cases}$$

donde recordamos la notación $\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta$ y el operador $\mathbf{u} \cdot \nabla$ fue calculado en el Ejercicio 3.1. Hemos de añadir la ley de conservación de masa

$$(6.50) \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0.$$

EJERCICIO 6.9. Transformar las ecuaciones de NS de la forma (6.4) a la forma (6.49). Debe señalarse que la complicación adicional de las ecuaciones es debida a la forma que toma el término de viscosidad, $\nu \Delta \mathbf{u}$; en efecto, el laplaciano de un campo vectorial tiene una expresión muy sencilla sólo en coordenadas cartesianas. Compárense las fórmulas (5.3) y (6.49) para fluidos no viscosos y viscosos respectivamente.

Ejemplo 6.6 FLUIDO CILÍNDRICO DE COUETTE. Como principal ejemplo de aplicación veamos el movimiento de un fluido incompresible viscoso que se halla situado en el espacio entre dos cilindros concéntricos de radios r_1 y r_2 , $0 < r_1 < r_2$. El cilindro interior está en reposo mientras que el exterior se mueve con una velocidad angular Ω y arrastra al fluido por viscosidad. Situamos unos ejes de coordenadas con el eje z a lo largo del eje común de los cilindros. Dada la simetría del problema buscamos un movimiento con velocidad \mathbf{u} tal que

$$u_r = u_z = 0, \quad u_\theta \neq 0,$$

y por la misma razón suponemos que ni u_θ ni p dependen de z , lo que nos reduce a un movimiento plano en coordenadas polares. La ley de conservación de masa (incompresibilidad) da

$$(6.51) \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0,$$

lo que quiere decir que $u_\theta = u_\theta(r, t)$. Con ello las ecuaciones de NS se reducen a

$$(6.52) \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho}{r} u_\theta^2, \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\nu}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r \partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r} \right], \end{cases}$$

con condiciones de contorno

$$(6.53) \quad u_\theta(r_1) = 0, \quad u_\theta(r_2) = r_2 \Omega.$$

Vemos de la segunda ecuación de (6.52) que $\partial p/\partial\theta$ es función de r , lo que implica que $p(r, t)$ ha de ser de la forma

$$(6.54) \quad p = p_1(r)\theta + p_2(r).$$

Debido a la simetría cilíndrica hemos de respetar la 2π periodicidad en θ por lo que $p_1(r)$ ha de ser cero y concluimos que p es función sólo de r . Así llegamos a una ecuación sólo para u_θ :

$$(6.55) \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} \right).$$

Veamos ahora el estado estacionario. Éste se rige por la ecuación

$$(6.56) \quad r^2 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - u_\theta = 0,$$

con las condiciones de contorno (6.53). Se tiene la solución general

$$(6.57) \quad u_\theta = Ar + \frac{B}{r}.$$

Las condiciones de contorno implican que

$$(6.58) \quad A = \frac{\Omega r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad B = -\frac{\Omega r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Inestabilidad de Couette-Taylor

Lo más notable matemáticamente de este ejemplo de movimiento es que para Ω grande pierde su estabilidad (es decir la solución anterior existe pero no es estable ante pequeñas perturbaciones de los datos iniciales o de contorno, por lo que pierde todo su valor práctico) y en su lugar aparecen unos hermosos *vórtices de Taylor* (TAYLOR, 1923), que son movimientos regulares y axisimétricos que rompen la uniformidad en la variable z (uniformidad que nosotros habíamos buenamente supuesto y que se observa para Ω pequeño). Estos vórtices representan un interesantísimo caso de *bifurcación* matemática y cambio de estabilidad, uno de los momentos de feliz conjunción de la física y las matemáticas. La teoría matemática está expuesta en la reciente monografía de CHOSSAT y IOOSS, [CI].

EJERCICIO 6.10. (a) Demostrar que la solución de Couette para datos $u_\theta = \Omega_1 r_1$ en $r = r_1$ y $u_\theta = \Omega_2 r_2$ en $r = r_2$ viene dada por (6.57) con

$$(6.59) \quad A = \frac{\Omega_2 r_2^2 - \Omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad B = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

(b) Calcular la presión correspondiente.

(c) Calcular el límite $r_1 \rightarrow 0$ (con $r_2 > 0$ fijo) e identificar el tipo de flujo obtenido, confrontando con el ejercicio 5.5.

(d) Hallar el límite del flujo de Couette entre cilindros cuando $r_2 \rightarrow \infty$ con $u_\theta = \Omega r_1$ para Ω_1, Ω_2 y r_1 fijos. Poner $\Omega_2 = 0$ y obtener

$$(6.60) \quad u_\theta = \frac{\Omega_1 r_1^2}{r},$$

que es un movimiento circular irrotacional, que se obtuvo en el ejercicio 5.5 como un flujo no viscoso, lo cual puede parecer sorprendente. Este flujo es de gran interés teórico y se estudiará en detalle en el capítulo 14 dedicado a la vorticidad. Investigue el lector la razón por la que aparece la misma solución en fluidos viscosos y no viscosos. ¿Es posible relacionarlo con el hecho de que el operador del segundo miembro de (6.55) sea precisamente

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) \right),$$

una curiosa variante de la ecuación de Laplace?

(e) Hacer $r_2 = r_1 + H$ y comparar el límite $r_1 \rightarrow \infty$ con el Ejemplo 6.3 de la sección 6.8.

6.10 Cálculo de la presión en fluidos incompresibles

En los fluidos incompresibles, tanto perfectos como viscosos, el gradiente de la presión se puede expresar a partir de la ecuación como función de la velocidad. De hecho, conocida la velocidad, el cálculo de la presión se reduce a hallar una función potencial. Ello por una parte simplifica el problema, y por otra refleja un hecho más fundamental sobre el que es preciso insistir, como haremos en unos párrafos.

Suponiendo, como hemos venido haciendo, que la densidad inicial es constante, la densidad pasa a representar un parámetro, constante en la evolución. Nos quedan pues las $n + 1$ ecuaciones del sistema de Euler (5.7) (caso perfecto) o del sistema de NS (6.9) (caso viscoso) para \mathbf{u} y p . Una manera efectiva de calcular la presión p en función de la velocidad consiste en aplicar el operador divergencia en la ecuación de Euler de (5.2) o en la ecuación de NS de (6.9). Dado que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, también se anulan $\nabla \cdot (\partial \mathbf{u} / \partial t) = \nabla \cdot \Delta \mathbf{u} = 0$, luego

$$(6.61) \quad \Delta p = -\rho \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}),$$

Hemos supuesto $\mathbf{f} = 0$ por sencillez, pero la fórmula queda igual si \mathbf{f} es un rotacional. Los cambios para \mathbf{f} general son inmediatos y no alteran la idea de lo que sigue. Una vez efectuado el cálculo del segundo miembro se obtiene la ecuación de la presión

$$(6.62) \quad -\Delta p = \rho \sum_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \rho (\nabla \mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{u})^T = \text{Traza}((\nabla \mathbf{u})^2).$$

Esta ECUACIÓN DE POISSON determina la presión salvo una función armónica. Para hallar una solución única (salvo una constante, como es natural en la presión) se resuelve con apropiadas condiciones de contorno en el borde del dominio bajo consideración, $\partial\Omega$. Si tomamos la condición estándar

$$(6.63) \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

entonces de la ecuación de Euler se deduce que sobre $\partial\Omega$ se tiene

$$(6.64) \quad -\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = -\nabla p \cdot \mathbf{n} = \rho \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}).$$

En el caso de superficies planas (en que \mathbf{n} es constante) esta fórmula se simplifica en la usual condición homogénea de Neumann, pues entonces

$$(6.65) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = -((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) u_n = -D_{\mathbf{u}} u_n = 0 \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Conocida \mathbf{u} , el problema de Neumann (6.62)-(6.64) permite expresar p como un funcional no local de la configuración de velocidades en el mismo instante mediante la función de Green correspondiente. El segundo miembro (o “término fuente”) en (6.62) es función del gradiente de velocidades. En forma más literaria pero muy descriptiva podemos decir que las variaciones de velocidad se combinan con la condición de incompresibilidad para obligar a las partículas a empujarse unas a otras (= hacerse presión) “buscando espacio”. Este efecto es instantáneo en nuestro modelo (la ecuación que da p en función de los gradientes de \mathbf{u} es elíptica, no incluye derivadas temporales). Se intuye así que en los fluidos incompresibles la variable fundamental es realmente la velocidad y la presión es una especie de variable auxiliar impuesta por la estructura de las ecuaciones.

En el caso de NS, las condiciones de contorno de no deslizamiento

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

junto con la ecuación (con $\mathbf{f} = 0$) dan para un borde plano

$$(6.66) \quad \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \rho \nu \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{u} \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

También se pueden tomar dominios en forma de paralelepípedo con condiciones de contorno periódicas sobre \mathbf{u} y p .

EJERCICIO 6.11. (a) Comprobar el método de cálculo de la presión a partir de la velocidad en los ejemplos del capítulo precedente. (b) Ídem en los ejemplos de las secciones precedentes. Observar para empezar que p es una función armónica.

6.11 Fluidos inmiscibles. Problemas de frontera libre

Hemos discutido en el capítulo 5 el problema planteado por la coexistencia de dos fluidos inmiscibles en un mismo volumen. Con las notaciones empleadas allí se tiene sobre la

frontera libre $\Gamma(t)$ idéntica ley cinemática

$$(6.67) \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_l = v_l \quad \text{sobre } \Gamma(t),$$

pero ahora está suplementada por la igualdad de las velocidades tangenciales (*no slip condition*)

$$(6.68) \quad (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)|_{\text{tang}} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma(t).$$

que proviene de las condiciones dinámicas. Éstas toman la forma de continuidad de esfuerzos normales sobre $\Gamma(t)$:

$$(6.69) \quad \Sigma_1 \cdot \mathbf{n}_l - \Sigma_2 \cdot \mathbf{n}_l = \Sigma_{t_s} \mathbf{n}_l,$$

que se traduce en la ecuación de continuidad siguiente:

$$(6.70) \quad p_1 - p_2 - 2\mu(D_1 - D_2) \mathbf{n}_l = \kappa H.$$

Finalmente, es preciso añadir la igualdad de temperaturas a través de la frontera libre, aunque éstas no jueguen un papel importante en los fluidos incompresibles.

Complementos

6.12 Primer apunte de la teoría matemática

Los problemas matemáticos básicos para el sistema de Navier-Stokes con adecuadas condiciones iniciales y de contorno forman uno de los temas de investigación más activos del presente siglo, tras la obra fundamental de JEAN LERAY. Éste probó en [Le1] (1933) que el problema de evolución con adecuados datos iniciales regulares tiene una solución única en el sentido clásico durante un determinado tiempo, $0 \leq t < T$, donde T depende de los datos (el tipo de resultado recuerda al teorema de existencia de EDPs de CAUCHY y KOVALÉVSKAYA). La cuestión de si esta solución se puede o no continuar en el tiempo para $0 \leq t < \infty$, es decir si es global, es uno de los grandes problemas abiertos de las matemáticas (*Problema de prolongabilidad de soluciones clásicas de la ecuación de Navier-Stokes*).

Confrontado con esta dificultad LERAY introdujo en [Le3], 1934, el concepto de **solución débil** en los espacios de energía que hoy llamamos de SÓBOLEV. La teoría ha sido elaborada por matemáticos como E. HOPF [Ho], O. A. LADYZHENSKAYA [LA], J. SERRIN [S2], J. L. LIONS y G. PRODI [LP], T. KATO [KA] y otros muchos.

Resultados satisfactorios existen para el problema de evolución en **dos dimensiones** espaciales. En efecto, dados datos adecuados *existe una única solución débil que es*

global en el tiempo y tiene una cierta regularidad por lo que se denomina **solución fuerte**. Con datos regulares la solución es clásica.

Por el contrario, en **dimensión tres** y bajo las mismas hipótesis se demuestra que existe una solución débil. Esta solución es fuerte sólo localmente en el tiempo. Mientras existe la solución fuerte es única, pero se desconoce si la solución débil es única. Se desconoce en particular si se generan discontinuidades en tiempo finito. En 1982 L. A. CAFFARELLI, B. KOHN y L. NIRENBERG, del Courant Institute de Nueva York, demostraron que el conjunto de singularidades es en todo caso pequeño, [CKN]. Más concretamente demostraron que la medida unidimensional, en el sentido de HAUSDORFF, del conjunto de posibles singularidades es cero, lo que implica que tal conjunto si existe no puede contener ninguna línea.

Observemos que la presencia de estas singularidades fue conjeturada por LERAY como posible explicación del fenómeno de la **turbulencia**. Según esta hipótesis, incluso para datos regulares las soluciones en tres dimensiones pueden desarrollar en un tiempo finito singularidades en la forma de puntos donde la vorticidad $\vec{\omega} = \text{rot}(\mathbf{u})$ se hace infinita.

El problema estacionario no tiene necesariamente solución única. Un problema de gran interés práctico es entonces el de determinar qué soluciones estacionarias son **estables** ante perturbaciones de los datos. Un problema relacionado, de gran interés y actualidad, es el de hallar **conjuntos atractores** de soluciones, es decir tales que la solución del problema de evolución con cierto tipo de datos converja hacia ese conjunto, formado en el mejor de los casos por una o varias soluciones estacionarias. En el peor de los casos este conjunto estará contenido en un variedad de dimensión finita.

La información anterior está tomada en su mayor parte de R. TEMAM [Te1]. Para un estudio avanzado ver también los libros de TEMAM [Te2] y CONSTANTIN-FOIAS [CoF]. Un estudio matemático actualizado se halla en el libro de P. L. LIONS [PLL].

6.13 Variación de la energía

Estudiemos con algún detalle la variación de la energía para un fluido viscoso incompresible, investigación que como hemos visto no es necesaria para plantear el problema hidrodinámico, pero puede ser un importante útil matemático a la hora de resolverlo. La variación de energía interna acumulada en un dominio material D_t viene dada por

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_{int} = \int_{D_t} W \, d\mathbf{x} + \int_{D_t} (q - \text{div} \mathbf{J}) \, d\mathbf{x}.$$

Calculemos la potencia W de acoplamiento (sección 4.2). Se tiene

$$W = \mathbf{S} : \mathbf{D} = -p(\text{div} \mathbf{u}) + \lambda(\text{div} \mathbf{u})^2 + 2\mu(\mathbf{D} : \mathbf{D}),$$

que en virtud de la incompresibilidad queda

$$(6.71) \quad W = 2\mu \sum_{i,j} (D^{ij})^2 = 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D} = 2\mu \|\mathbf{D}\|^2.$$

Como esta cantidad representa la disipación debida a efectos de fricción, se deduce que el coeficiente μ ha de ser no negativo. De hecho esta fórmula puede servir de definición de μ . En el caso incompresible la función W suele llamarse *función de disipación*. Mide pues una energía perdida irreversiblemente por el sistema.

A efectos de completitud observamos que la variación de energía total viene dada por

$$(6.72) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{tot} = \int_{D_t} (\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle + q - \operatorname{div} \mathbf{J}) d\mathbf{x} + \int_{\partial D_t} \langle \Sigma, \mathbf{u} \rangle dS,$$

cf. (4.3). El último término se descompone en los fluidos viscosos en tres términos de energía en el borde

$$\langle \Sigma, \mathbf{u} \rangle = -p \langle \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle + 2\mu \langle \mathbf{D} \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle = -p \langle \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle + \mu \langle (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle + \langle (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle,$$

Utilizando la incompresibilidad el primero de estos términos da integral $-\int_{\Omega} \langle \nabla p, \mathbf{u} \rangle d\mathbf{x}$. También observamos que la energía cinética varía de acuerdo con la fórmula (ver (4.4))

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{cin} = \int_{D_t} \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle d\mathbf{x} - \int \langle \nabla p, \mathbf{u} \rangle d\mathbf{x} + 2\mu \int_{D_t} \langle \operatorname{div} \mathbf{D}, \mathbf{u} \rangle d\mathbf{x}.$$

Utilizando la incompresibilidad el último término da

$$\mu \int_{D_t} \langle \Delta \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle d\mathbf{x} = \mu \int_{\partial D_t} \langle (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle dS - \mu \int_{D_t} \|\nabla \mathbf{u}\|^2 d\mathbf{x}.$$

De estas fórmulas se deduce que

$$(6.73) \quad \int_{D_t} \|\nabla \mathbf{u}\|^2 d\mathbf{x} = 2 \int_{D_t} \|\mathbf{D}\|^2 d\mathbf{x} - \int_{\partial D_t} \langle (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle dS.$$

EJERCICIO 6.12. Dar una demostración directa de esta fórmula. Demostrar que para condiciones de contorno nulas se tiene

$$(6.74) \quad \int_{D_t} \|\nabla \mathbf{u}\|^2 d\mathbf{x} = 2 \int_{D_t} \|\mathbf{D}\|^2 d\mathbf{x} = 2 \int_{D_t} \|\mathbf{A}\|^2 d\mathbf{x},$$

que es una fórmula de equipartición de energía entre la parte dilatacional y la rotacional. Ésta última, la potencia de rotación, no se transforma en energía interna.

6.14 Fluidos no newtonianos

Los coeficientes de viscosidad de un fluido newtoniano se definen como los coeficientes constantes de la expresión lineal del tensor de esfuerzos \mathbf{S} como función de la matriz $\nabla \mathbf{u}$. En particular, el coeficiente dinámico μ es la mitad del coeficiente de proporcionalidad entre \mathbf{S} y \mathbf{D} . Tal proporcionalidad se manifiesta en las fórmulas derivadas en las configuraciones clásicas, como son las corrientes de Couette y Poiseuille, lo que permite la medición experimental. En el caso último la ley de la potencia cuarta (6.28) contiene la proporcionalidad de Q respecto a Δp con factor $\pi R^4/(8\mu)$. Esta proporcionalidad ha sido observada experimentalmente en corrientes laminares para una gran variedad de líquidos ordinarios de bajo peso molecular y para un amplio rango de velocidades. Al mismo tiempo se hallan materiales reales que no obedecen a este comportamiento prescrito, como pinturas y polímeros diversos. Tales fluidos, en que la linealidad $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{S}$ no se cumple, se denominan genéricamente **no newtonianos**.

Trataremos por simplicidad de fluidos incompresibles. Una forma simple de ver la no linealidad es a través de la corriente laminar de Couette. En ese caso se define μ como la relación

$$(6.75) \quad \mu = \frac{\tau^{12}}{\gamma},$$

donde $U/d = \gamma$ es el gradiente de velocidades. Un fluido no newtoniano será aquél para el que μ sea función de γ ,

$$(6.76) \quad \mu = \mu(\gamma).$$

Hay dos tipos principales de fluidos no newtonianos observados. Los **dilatantes**, para los cuales

$$(6.77) \quad \frac{d\mu}{d\gamma} > 0,$$

y los **seudoplásticos**, que verifican

$$(6.78) \quad \frac{d\mu}{d\gamma} < 0.$$

Si proponemos una ley de tipo potencial, $\mu(\gamma) = K\gamma^n$, entonces $\tau^{12} = K\gamma^{n+1}$ y el fluido es newtoniano si $n = 0$, dilatante si $n > 0$ y seudoplástico si $-1 < n < 0$. Entre los materiales reales son dilatantes las suspensiones concentradas de sólidos y seudoplásticos los polímeros. Un caso límite se plantea con los llamados **fluidos (rígidos viscoplásticos) de Bingham** en los que la dependencia $\gamma \rightarrow \tau$ es de la forma

$$(6.79) \quad \tau^{12}(\gamma) = \begin{cases} \mu_0\gamma + \sigma & \text{si } \gamma > 0, \\ \text{el intervalo } [0, \sigma] & \text{si } \gamma = 0. \end{cases}$$

El nuevo coeficiente σ se llama *umbral de plasticidad*. Tenemos pues una función multivaluada. Formalmente corresponde a tomar potencia $n+1 = 0$ en los fluidos seudoplásticos.

Una teoría general teniendo en cuenta estos hechos experimentales se debe a REINER y RIVLIN, que estudian las condiciones que ha de verificar una ley para ser compatible

con la geometría (cambios de ejes) y llegan a la conclusión de que el tensor desviatórico es una función posiblemente no lineal de \mathbf{D} ,

$$(6.80) \quad \boldsymbol{\tau} = F(\mathbf{D}).$$

Razonamientos como los hechos en la sección 6.2 llevan a una dependencia de la forma

$$(6.81) \quad F(\mathbf{D}) = F_1(II_D, III_D)\mathbf{D} + F_2(II_D, III_D)\mathbf{D}^2.$$

donde se designan por I_D , II_D e III_D los invariantes simétricos del tensor \mathbf{D} . Las funciones F_1 y F_2 son *funciones materiales*, en el sentido de que identifican el fluido de Reiner-Rivlin específico del que se trata. Los fluidos newtonianos incompresibles tienen $F_1 = 2\mu$ y $F_2 = 0$. Se llaman fluidos **newtonianos generalizados** aquellos en que la ley toma la forma

$$(6.82) \quad \boldsymbol{\tau} = 2\eta(J)\mathbf{D},$$

siendo J el invariante

$$(6.83) \quad J = -4II_D = 2\text{tr}(\mathbf{D}^2) = 2\mathbf{D} : \mathbf{D}.$$

De este modo en el fluido lineal de Couette J coincide con γ^2 . Obtenemos así en lugar de (6.9) la ecuación de Navier-Stokes con **difusión no lineal**

$$(6.84) \quad \boxed{\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \eta(J)\Delta \mathbf{u} + 2\mathbf{D} \cdot \nabla \eta(J) + \mathbf{f}.}$$

Con una ley tipo potencia, $\eta(J) = KJ^n$, newtoniano equivale a $n = 0$, dilatante a $n > 0$ y pseudoplástico a $n < 0$. Ciertamente una ley potencial es un supuesto ideal y puede ser válida en la práctica sólo en un rango determinado de S . Para los fluidos de Bingham $\boldsymbol{\tau}$ toma la forma

$$(6.85) \quad \begin{cases} \boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D} + 2\sigma J^{-1/2}\mathbf{D} & \text{si } J > 0 \\ \boldsymbol{\tau} = \alpha\mathbf{D}, \quad \alpha \in [0, \sigma] & \text{si } J = 0. \end{cases}$$

Obsérvese que en general la función de disipación toma la forma

$$(6.86) \quad \mathbf{S} : \mathbf{D} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} = 2\eta(J)\mathbf{D} : \mathbf{D} = \eta(J)J.$$

Es interesante notar que la función de disipación en un fluido de Bingham no es multivaluada,

$$(6.87) \quad \mathbf{S} : \mathbf{D} = \sigma J^{1/2} + \mu J.$$

COMENTARIOS. Las notas precedentes siguen básicamente el texto [AM] donde el lector puede encontrar más información. Para los fluidos de Bingham ver [DL], que explica cómo tales problemas con funciones multivaluadas se resuelven mediante la teoría de desigualdades variacionales.

Una presentación alternativa de la introducción de la viscosidad no lineal puede consultarse en el texto de O. LADYZHÉNSKAYA [L], que propone ecuaciones con término de viscosidad Δu_i reemplazado por

$$(6.88) \quad \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} T_{ik}(\nabla \mathbf{u}),$$

con funciones T_{ik} del tipo $T_{ik} = (c_1 + c_2 \|\nabla \mathbf{n}\|^2) \partial u_i / \partial x_k$. Compárese con el tipo anterior.

Existen otros tipos de fluidos no newtonianos como aquéllos que incluyen efectos de memoria (fluidos con memoria evanescente, viscoelásticos). Para más información referimos al lector a la literatura.

Otros ejercicios del capítulo

EJERCICIO 6.13. (a) El débito de una corriente laminar en un tubo cilíndrico de sección Ω , un dominio acotado del plano (de frontera regular o al menos regular a trozos), se puede calcular con una fórmula similar a la de Hagen-Poiseuille, 6.28, pero con cierta dependencia de la forma dominio, $Q = Q(\Omega)$. Explicitar esa dependencia.

(b) Definamos la eficacia hidráulica de una sección Ω como el cociente

$$\lambda(\Omega) = \frac{Q(\Omega)}{Q(D)},$$

donde D es el disco con la misma área que Ω . Calcular λ para un cuadrado y un rectángulo de lados a y b .

(c) Problema de optimización: la eficacia óptima se obtiene si y solo si Ω es un disco: $0 < \lambda < 1$ si Ω no es un disco. [Indicación: este es uno de los problemas conocidos por los matemáticos como problemas isoperimétricos.]

EJERCICIO 6.14. Calcular el perfil de velocidades de la corriente laminar de Couette para un fluido no newtoniano del tipo

$$\tau(\gamma) = K|\gamma|^{n-1}\gamma, \quad n \neq 1.$$

Hacer el mismo ejercicio en un tubo.

Resumen

- Nuevas variables y coeficientes:

coeficiente de viscosidad dinámico: μ ; unidad CGS: 1 poise=dina×segundo/cm².

coeficiente de viscosidad cinemático: $\nu = \frac{\mu}{\rho}$; unidad CGS: 1 stokes= 1 cm²/seg.

segundo coeficiente de viscosidad (coef. de viscosidad volumétrico): λ .

Referencias para el capítulo

- FLUIDOS VISCOSOS NEWTONIANOS

[La] O. A. LADÝZHENSKAYA, “The mathematical theory of Viscous Incompressible flow”, Gordon and Breach, 1969.

[PLL] P. L. LIONS, “Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Volume 1. Incompressible Models”, Oxford Univ. Press, Oxford, 1996.

[Pa] R.E. PATTON, “Incompressible Flow”, J. Wiley & sons, New York, 1984.

- TEORÍA MATEMÁTICA DE NAVIER-STOKES

[CKN] L. A. CAFFARELLI, R. KOHN, L. NIRENBERG, *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Applied Maths., **35** (1982), pp. 771-831.

[CI] CHOSSAT, IOOSS, “The Couette-Taylor Problem”, Springer, AMS **102**, ?.

[CoF] P. CONSTANTIN, C. FOIAS, “Navier Stokes Equations”, Chicago Lectures in mathematics, Univ. of Chicago press, Chicago, 1988.

[Ff] CH. FEFFERMAN, *Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation*. Presentación para los “Millennium Prize Problems” del Clay Mathematics Institute, 2000. http://www.claymath.org/Millennium_Prize_Problems/Navier-Stokes_Equations/.

[Ga] G. GALDI, “An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equation”, vols I, II, Springer Verlag, 1994.

[Ka] T. KATO, *Strong L^p solutions of the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^n with applications to weak solutions*, Math. Z. **187** (1984), pp. 471-480.

[KL] H. O. KREISS, J. LORENZ, “Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations”, Academic Press, Boston, 1989.

[Ln] F. H. LIN, *A new proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg theorem*, Comm. Pure Appl. math. **51**, (1998), 241-257.

[Li] J. L. LIONS, G. PRODI, *Un théorème d’existence et unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension 2*, C. R. Acad. Sci. Paris **248** (1959), pp. 3519-3521.

[S2] J. SERRIN, *The initial value problem for the Navier-Stokes equation*, in “Nonlinear Problems”, R. E. Langer, ed. Univ. Wisconsin Press, Madison, 1963, pp. 69-98.

[Te1] R. TEMAM, “Navier-Stokes Equations”, North-Holland, New York, 1979.

[Te2] R. TEMAM, “Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis”, SIAM, Philadelphia, 1983.

• FLUIDOS NO NEWTONIANOS

[AM] G. ASTARITA, G. MARRUCCI, “Principles of Non-Newtonian Fluid mechanics”, McGraw-Hill, Maidenhead, UK, 1974.

[DL] G. DUVAUT, J.L. LIONS, “Les inéquations en mécanique et en physique”, Dunod, Paris, 1972.

[Sk] A.H.P. SKELLAND, “Non-newtonian Flow and Heat Transfer”, Wiley, New York, 1967.

• HISTÓRICOS

[Ho] E. HOPF, *Sobre los problemas de valores iniciales para las ecuaciones fundamentales de la hidrodinámica (Ueber die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen)*, Math. Nachrichten **4** (1951), pp. 213-231.

[Le 1] J. LERAY, *Étude de diverses équations non linéaires et de quelques problèmes que pose l’hydrodynamique*, Jour. Math. Pures Appl. **12** (1933), pp. 1-82

[Le 2] J. LERAY, *Essai sur les mouvements plans d’un liquide visqueux que limitent des parois*, Jour. Math. Pures Appl. **13** (1934), pp. 331-418.

[Le 3] J. LERAY, *Essai sur le mouvement d’un liquide emplissant l’espace*, Acta Math. **63** (1934), pp. 193-248.

[Na] C. L. M. H. NAVIER, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, Mém. Acad. Sci. Inst. France **6** (1822), 380-440.

[St] G. G. STOKES, *On the theories of internal friction of fluids in motion*, Trans. Cambridge Philos. Soc. **8** (1845).

Capítulo 7

Los fluidos perfectos compresibles

Se plantean en este capítulo los conceptos, sistemas de ecuaciones e ideas matemáticas fundamentales en el estudio de los fluidos perfectos compresibles, estudio que extiende el de los fluidos perfectos incompresibles hecho en el capítulo 5.

En la primera sección se plantean las ecuaciones diferenciales que ligan la densidad, velocidad, presión y energía interna en virtud de las leyes de conservación, llegándose al sistema general de los fluidos compresibles, (7.8).

Este sistema tiene dos inconvenientes que nos obligan a trabajar más. Por una parte es aún muy general, siendo conveniente discutir cuáles son las leyes de estado que permiten cerrar el sistema en los casos prácticos, en especial cuando se consideran los gases llamados ideales. En segundo lugar, es preciso motivar e introducir una nueva variable que es fundamental en la ciencia aplicada, la *entropía*, y con ella los conceptos de flujo *isotermo*, *adiabático*, *isentrópico* y *barotrópico*.

Tras estos estudios volvemos al sistema de ecuaciones de los gases perfectos compresibles que reescribimos en las secciones 7.5 - 7.7 en las formas de sistemas hiperbólicos de ecuaciones en derivadas parciales y ecuaciones de ondas que son clásicas en la literatura.

Terminada la parte de modelización se presta atención a las dificultades matemáticas, que tienen como principal exponente la aparición de soluciones discontinuas con ondas de choque. Elegimos como modelo matemático elemental la ecuación escalar de BURGERS y comentamos brevemente la moderna teoría de Leyes de Conservación que sirve de marco teórico para el estudio de estos fenómenos.

En resumen éste es un capítulo que introduce temas de gran importancia, actualidad y complejidad matemática.

7.1 Fluidos perfectos compresibles

Si el fluido perfecto es **compresible**, la ecuación de Euler (5.2)

$$(7.1) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mathbf{f}}{\rho},$$

escrita también en la forma

$$(7.2) \quad \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f},$$

se debe acompañar por la ley de conservación de masa general

$$(7.3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.$$

En ese caso necesitamos suplementar (7.1), (7.3) con información sobre la energía y la presión y su relación. Dado que el fluido es perfecto $\mathbf{S} = -p(\mathbf{x}; t) \mathbf{I}$, el término de trabajo de deformación queda (ver capítulo 4)

$$(7.4) \quad \mathbf{S} : \mathbf{D} = -p(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt},$$

con lo que la conservación de la energía se escribe

$$(7.5) \quad \frac{de}{dt} = \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} + q_1, \quad q_1 = \frac{1}{\rho}(q - \mathbf{div} \mathbf{J}),$$

que es una forma del Primer Principio de la Termodinámica que relaciona variación de la energía interna, trabajo y calor, q_1 . Para completar el sistema de ecuaciones falta una relación. De nuevo hemos de recurrir a la ciencia de la Termodinámica para hallar una ley, llamada **ecuación de estado**, que es particular de cada materia y toma la forma

$$(7.6) \quad p = f(\rho, e).$$

Con ello tenemos en 3D un **sistema de 6 ecuaciones**: (7.1), (7.3), (7.5) y (7.6), con 6 incógnitas: ρ , \mathbf{u} , p , e , que permite en principio resolver los problemas de fluidos perfectos compresibles, bajo la hipótesis por supuesto de que tenemos expresiones adecuadas - es decir, leyes constitutivas - para q y \mathbf{J} . Dado que en esta teoría no se tienen en cuenta efectos de viscosidad en la ecuación (7.1), es decir la fricción entre las partículas, se sigue que en muchos casos podemos considerar nulo el término de intercambio de calor, $\mathbf{div} \mathbf{J}$, en la ecuación energética con lo que la ecuación (7.5) queda

$$(7.7) \quad \frac{de}{dt} = \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} + \frac{q}{\rho} = -p \frac{dv}{dt} + q_1,$$

donde $v = 1/\rho$ es el *volumen específico*, inverso de la densidad. Con adecuadas condiciones iniciales y de contorno queda así planteado el problema de los fluidos perfectos en toda su generalidad.

EJEMPLO 7.1. Ecuaciones de la dinámica de gases. Tomando $\mathbf{f} = \mathbf{q} = \mathbf{J} = \mathbf{0}$, el sistema anterior toma la forma típicamente hallada en los libros que tratan la dinámica de gases para un gas compresible y no viscoso, donde las variables son ρ , \mathbf{u} , p y la *energía específica total*, $E = e + |\mathbf{u}|^2/2$:

$$(7.8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j + p \delta_{ij}) &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} ((\rho E + p) u_j) &= 0, \\ p &= f(\rho, e). \end{aligned}$$

Dado que éste es un sistema muy importante el lector deberá obtener las ecuaciones anteriores realizando los cálculos pertinentes. Es importante reseñar que la elección de las variables ρ , ρu_i y ρE permite escribir las derivadas espaciales en forma de divergencia, lo que tiene gran importancia matemática. Las ecuaciones así escritas se denominan **leyes de conservación**. Estas ecuaciones se pueden expresar en notación vectorial en la forma compacta

$$(7.9) \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0,$$

donde \mathbf{U} es el vector $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3, U_4, U_5) = (\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, \rho E)$, y \mathbf{F} es una función: $\mathbb{R}^5 \rightarrow \mathcal{M}_{5 \times 3}(\mathbb{R})$, donde el último símbolo designa el conjunto de las matrices reales de cinco filas y tres columnas.

EJERCICIO 7.1*. (a) Deducir el sistema (7.8). (b) Escribir en detalle la función \mathbf{F} que interviene en (7.9) en una y tres dimensiones espaciales. Escribir las ecuaciones.

7.2 Gases ideales

El sistema de los gases compresibles es formidable y la teoría matemática, que contó en sus comienzos con las aportaciones de matemáticos de la talla de B. RIEMANN, es de una gran

dificultad y está aún en pleno desarrollo en la revistas de investigación. Afortunadamente, en las situaciones corrientes admite alguna simplificación. Así sucede en la teoría de los *gases ideales*, modelo estándar de fluido no viscoso compresible. Bien es verdad que para empezar se introduce una nueva variable, la temperatura absoluta T^1 .

Existen dos relaciones o leyes de estado fundamentales; la primera es usualmente escrita en la forma

$$(7.10) \quad pV = NR_0T,$$

donde aparte de la presión p y la temperatura T intervienen la llamada constante universal de los gases, R_0 .² Dado que $\rho = Nm/V$, donde m es el peso molecular del gas, podemos escribir la ley en la forma más cómoda para nosotros

$$(7.11) \quad \boxed{p = \frac{R_0}{m} \rho T = R \rho T.}$$

Esta ley fundamental es llamada *ley de los gases perfectos*³. La ley fue investigada ya en siglo XVII por los pioneros, BOYLE y MARIOTTE, que descubrieron que $pV = \text{constante}$, y lleva diversos nombres en la literatura: GAY-LUSSAC, CLAUSIUS-CLAPEYRON (que formularon el caso general).⁴

La segunda relación en un gas ideal expresa que la energía interna es función sólo de la temperatura, $e = e(T)$. Más aún, suele suceder que se verifique la proporcionalidad,

$$(7.12) \quad \boxed{e = c_v T}$$

(se dice que el gas es *politrópico*) y la constante c_v se llama *calor específico (a volumen constante)*. Esto cierra el sistema de ecuaciones de la dinámica de gases ideales, pues nos proporciona una relación del tipo (7.6) en la forma

$$(7.13) \quad \boxed{p = (\gamma - 1) \rho e,}$$

donde hemos escrito la constante de proporcionalidad al modo usual como $\gamma - 1$, con lo que

$$(7.14) \quad \gamma = \frac{R}{c_v} + 1.$$

La constante γ se denomina *exponente adiabático* por las razones que veremos en un momento y es característica del gas en cuestión. El aire a temperaturas moderadas se puede considerar un fluido ideal y el exponente γ vale 1.405. Estos valores son empíricos. Pero existen también deducciones racionales: la Mecánica Estadística predice un valor de $5/3$ para un gas monoatómico y de $7/5$ para un gas diatómico.

¹introducida William Thompson, luego Lord Kelvin, 1848; se mide en grados Kelvin, 0°C equivale a $273,1^\circ \text{K}$.

²su valor es $8,314 \times 10^7$ Julio/mol.grado.

³Atención a las confusiones, esta nomenclatura termodinámica no tiene nada que ver con el concepto de fluido perfecto, es decir no viscoso, aludido en el título del capítulo.

⁴Téngase en cuenta que la ley clásica se formula en forma global, para un volumen V , y nosotros damos una versión puntual, para una densidad ρ o volumen específico v .

7.3 Concepto de entropía. Funciones de estado

Un aspecto importante en la teoría de los gases ideales es la posibilidad de integrar fácilmente la ecuación de la energía (7.5), (7.7) para obtener una fórmula cerrada, o al menos una forma diferencial fácilmente integrable, lo que implica introducir un importante concepto y con ello una nueva variable. Aunque parezca mentira, ello redundará en una simplificación del sistema total y, sobre todo, en una más adecuada comprensión del modelo y sus límites. A ello dedicaremos esta sección.

Energía, calor y trabajo

Previamente, es conveniente comentar que los libros de física suelen escribir el PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA, PPT, como

$$(7.15) \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{de}{dt} + \frac{dW}{dt},$$

donde la fórmula $dQ = q_1 dt$ permite definir la magnitud Q , *calor aportado* por fuentes externas o por las partículas adyacentes por unidad de tiempo y unidad de masa; tenemos además que

$$(7.16) \quad dW = p dv = -p \frac{d\rho}{\rho^2}$$

es el incremento de *trabajo realizado* por el fluido por unidad de masa, con $v = 1/\rho$. El PPT tiene entonces una fácil lectura en lenguaje coloquial: *la variación de calor aportado a un sistema fluido durante un proceso se traduce en aumento de la energía interna y/o en trabajo realizado*. Observamos que esta fórmula exige en principio conocer la variación detallada de q , ρ y p a lo largo de la trayectoria para obtener Q y W tras una integración a lo largo de ésta, que necesitamos hallar previamente⁵. Esto nos lleva a un importante concepto matemático.

Diferencial exacta

El inconveniente de la integración a lo largo de trayectorias determinadas se evita mediante un hecho muy notable: dado que para un gas ideal la expresión (7.15) se puede escribir de la forma

$$(7.17) \quad \frac{dQ}{dt} = c_v \frac{dT}{dt} - R \frac{T}{\rho} \frac{d\rho}{dt},$$

si dividimos la ecuación por T el segundo miembro resulta ser una *diferencial exacta* en función de las variables T y ρ ,

$$(7.18) \quad dS = \frac{c_v}{T} dT - \frac{R}{\rho} d\rho,$$

⁵recordamos que d/dt indica la derivada material o lagrangiana, es decir a lo largo de las trayectorias de las "partículas fluidas".

que integrada da la función $S(T, \rho)$

$$(7.19) \quad S = c_v \log \left(\frac{T}{\rho^{\gamma-1}} \right) = c_v \log \left(\frac{p}{R\rho^\gamma} \right).$$

La nueva variable S se denomina **entropía** (entropía específica, para ser más precisos) y se define en términos diferenciales mediante

$$(7.20) \quad \frac{dS}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dQ}{dt} = \frac{q_1}{T},$$

con lo que la ecuación de la energía se reduce a la fórmula cerrada (7.19). La entropía S , definida por integración de la forma diferencial exacta, es pues una función potencial y como todas las funciones potenciales no depende del camino de integración, es decir su valor en un punto y en un tiempo no depende de la trayectoria particular seguida por el gas para adquirir su estado, sino solamente del estado concreto adquirido, definido por T y ρ (ó p y ρ). La entropía es una variable importante en los procesos térmicos y es una medida del intercambio de calor, pero su interpretación precisa no es fácil de describir. ⁶

Variables de estado

Las variables que describen el estado energético de un fluido se llaman *variables termodinámicas*, entre las que se encuentran ρ , p , T y e . Observemos que sólo **dos** de estas magnitudes son independientes y describen lo que se llama un *estado termodinámico*. S es pues una (nueva) función termodinámica de estado, o más brevemente *función de estado*, que se expresa en función de las dos que tomemos como básicas, por ejemplo (T, ρ) ó (T, p) u otras combinaciones.

Grosso modo, las variables termodinámicas sirven para caracterizar el estado energético de un gas independientemente de la evolución dinámica que está teniendo lugar; en otras palabras, se trata de variables que sólo dependen del estado alcanzado, representado por las variables básicas, y no de cómo se ha llegado a él integrando las ecuaciones. Con ello se consigue (el milagro de) desacoplar la parte hidrodinámica (que hace intervenir el movimiento) de la energética (o termodinámica, que razona con estados).

La profusión de variables termodinámicas desconcierta a primera vista, pero no ofrece dificultad matemática intrínseca una vez se ha entendido cual es su esencia y su mérito. Las distintas variables son útiles en las diversas aplicaciones, en particular en la cinética química.

Calor y trabajo

Volviendo al punto de partida, es muy importante señalar que la expresión para la diferencial de calor, $q_1 dt$, no corresponde a una diferencial exacta de una función de estado,

⁶En Mecánica Estadística, que es la teoría física que está “debajo” de los fluidos, la entropía mide el **desorden** de un conjunto o agregado de partículas. En el siglo XX su influencia se extendió al ser interpretada como una medida de la cantidad de **información**, tras la obra de C. Shannon, 1948.

hipotéticamente definida por $dQ = de + pdv$. Es decir, aunque se puede calcular una función Q , medida del intercambio de calor en el movimiento, integrando la forma diferencial a lo largo de la trayectoria correspondiente, el resultado dependerá del movimiento en particular y no sólo del estado termodinámico alcanzado, es decir los valores de p , e y ρ . Por ello no tenemos derecho a eliminar los denominadores dt en la expresión de la ley, pues todo depende del estado de la trayectoria en tiempo t . La notación diferencial dQ sin denominadores se reserva para las diferenciales exactas. La analogía y el afán de brevedad llevan a escribir la forma diferencial no exacta como

$$de + pdv = \delta Q,$$

donde la δ se usa para significar claramente que no existe una Q que es *función de estado*. Lo mismo le sucede al trabajo, para el que escribiremos en forma diferencial δW en vez de dW . El hecho de que Q y W dependen del camino, pero S no, puede parecer una sutileza matemática, pero no lo es; tiene importantes repercusiones físicas y es uno de los temas clásicos de las máquinas térmicas (ciclo de CARNOT).

7.4 Gases reales

Lo anterior se puede aplicar a gases perfectos (es decir, no viscosos) no ideales. Las teorías correspondientes admiten **leyes de estado** de la forma

$$(7.21) \quad p = p(T, \rho), \quad e = e(T, \rho),$$

es decir dependencias de e y p respecto a T y ρ más generales que las leyes (7.11), (7.12). Variantes de estas leyes: a veces se escriben en forma implícita, como $f(p, T, \rho) = 0$, o se sustituye la segunda por su expresión diferencial $c_v = f(T, \rho)$. En todos los casos, es un *principio fundamental que la forma diferencial*

$$(7.22) \quad dS = \frac{de}{T} + \frac{p}{T}dv$$

debe ser una diferencial exacta de una función de dos variables, es decir se puede definir una entropía S como función de estado que está relacionada con el intercambio de calor por la fórmula (7.20). Podemos dar un paso más y pensar en S y v como variables termodinámicas independientes, en función de las cuales se expresan p , T , ρ y e . Entonces la ecuación de la energía, o PPT, se ve como

$$(7.23) \quad \boxed{de = TdS - pdv},$$

forma muy conveniente en lo que sigue.

EJERCICIO 7.2*. En los gases reales más usuales se supone que $e = e(T)$ pero la dependencia no es lineal, y se define el calor específico como

$$(7.24) \quad c_v(T) = \frac{de}{dT}.$$

Demostrar que si $e = e(T)$, la ecuación de estado de la presión debe tomar la forma $p = f(\rho)T$. Un ejemplo es la ley propuesta por VAN DER WAALS, (1873)

$$(7.25) \quad p = \frac{RNT}{V - Nb},$$

con $b > 0$ constante. Comprobar que tiene la forma predicha.

7.5 Flujos isentrópicos, isoterms y barotrópicos

Un caso extremadamente conveniente sucede en los llamados procesos **adiabáticos** en que *no existe intercambio de calor*, $q = \mathbf{J} = 0$, pues entonces S es constante a lo largo de las trayectorias,

$$(7.26) \quad \frac{dS}{dt} = 0.$$

o dicho de otro modo $S(\mathbf{x}, t) = S(\mathbf{y}, 0)$ para $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y}, t)$, lo cual es cierto mientras se trate de una solución en el sentido clásico. Quedan entonces para los gases ideales las fórmulas

$$(7.27) \quad p = A\rho^\gamma, \quad T = B\rho^{\gamma-1}, \quad e = C\rho^{\gamma-1},$$

donde A, B, C son sólo función de la entropía, y por tanto de la trayectoria, cf. (7.19). Más aún, si la entropía inicial es constante entonces A, B y C son constantes en todo el espacio y tiempo. Se dice que el flujo es **isentrópico**. Podemos entonces resolver las ecuaciones dinámicas (7.1), (7.3) añadiendo la dependencia de la presión respecto a la densidad (7.27) y eliminando la ecuación de la energía. Tal situación se puede generalizar a una dependencia del tipo

$$(7.28) \quad p = f(\rho),$$

en que p es una función determinada de la densidad, independiente de las demás variables dinámicas o de estado. Tales flujos reciben en la literatura el nombre general de **barotrópicos** y también *elásticos* (la idea parece ser debida a Euler y fueron tratados extensamente por HELMHOLTZ). Si la dependencia es de tipo potencial

$$(7.29) \quad p = c\rho^\alpha,$$

α se denomina exponente barotrópico. Los flujos isentrópicos son el caso más importante de flujos barotrópicos. Otro caso importante son los flujos **isoterms** en que T es constante y la ley de estado se reduce a

$$(7.30) \quad p = c\rho.$$

En muchas consideraciones de la meteorología, la aeronáutica y otras ramas, la suposición de temperatura constante es admisible como primera aproximación. Por último, se puede considerar que los flujos incompresibles son un caso límite de flujos en régimen barotrópico

con exponente $\alpha = \infty$ (basta con invertir la relación (7.29) y ver a ρ como función de p). En todos estos casos la integración del flujo puede prescindir de la ecuación de la energía.

Sistema de los flujos adiabáticos de gases ideales

En virtud de lo anterior podemos escribir el sistema de ecuaciones para estos flujos a partir del sistema original (7.8) como

$$(7.31) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= 0, \\ \frac{dS}{dt} &= 0, \\ p &= p(\rho, S). \end{aligned}}$$

De las leyes de los gases perfectos (7.11), (7.12) se sigue que la expresión de p como función de ρ y S viene dada por (7.19), es decir,

$$(7.32) \quad p = A(S)\rho^\gamma, \quad A(S) = Re^{S/c_v}.$$

Velocidad del sonido

Este sistema tiene una gran riqueza y una gran dificultad matemática. En el estudio juega un papel importante la cantidad c definida en general por

$$(7.33) \quad c^2 = \frac{\partial}{\partial \rho} p(\rho, S),$$

es decir derivada para entropía constante. La magnitud c tiene dimensiones de velocidad y se llama *velocidad del sonido* del flujo en cuestión. Para un gas ideal barotrópico de ley potencial vale

$$(7.34) \quad c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}.$$

Si es un gas ideal de ley $p = R_0 \rho T / m$ nos queda la conocida fórmula

$$(7.35) \quad c^2 = \frac{\gamma R_0 T}{m}.$$

Un flujo se llama *subsónico* si $\mathbf{u} < c$ y *supersónico* si $\mathbf{u} > c$. Dividiendo \mathbf{u} por c se obtiene un número adimensional

$$(7.36) \quad M = \frac{\mathbf{u}}{c},$$

llamado *número de Mach*,⁷ de forma que el límite subsónico-supersónico (barrera del sonido) sucede a $Mach=1$.

⁷en honor del físico austriaco Ernest Mach, (1838-1916).

La alternativa subsónico-supersónico es una de las principales características de estos sistemas y un caso notable de conjunción experimento-teoría: por una parte los fenómenos físicos que se observan y de los que hablaremos a continuación son muy diferentes; por otra parte, la explicación matemática es muy clara, se trata de que el sistema cambia de tipo, de elíptico a hiperbólico. La teoría matemática de los flujos supersónicos es considerablemente más difícil que la de los subsónicos.

7.6 Ondas de presión

El sistema anterior de la dinámica de gases modela fenómenos de gran interés práctico, como la propagación de ondas en el aire responsables del *sonido*. Al contrario que en las ondas marinas, en éstas el fenómeno vibratorio se debe a las variaciones de presión y densidad. Es lícito suponer dentro de los límites de aproximación razonable que se trata de un fluido compresible del tipo gas ideal en un proceso isentrópico, o más en general barotrópico. Veamos los desarrollos introductorios a esta teoría, que nos permiten plantear problemas matemáticos de gran interés.

Ejemplo 7.1 Dada la complejidad de la dinámica de gases es prudente analizar primeramente los problemas en una dimensión espacial. Tratemos pues el *sistema de la dinámica de gases isentrópicos (barotrópicos) en coordenadas eulerianas* en 1D. Es un sistema de evolución de la forma

$$(7.37) \quad \boxed{\begin{aligned} \rho_t + u \rho_x + \rho u_x &= 0, \\ u_t + \frac{c^2(\rho)}{\rho} \rho_x + u u_x &= 0. \end{aligned}}$$

Se puede pues descartar la entropía, que sólo interviene como una constante en $c^2 = A(S)\gamma\rho^{\gamma-1}$. En general un flujo adiabático es compatible con valores distintos del cociente p/ρ^γ para distintas partículas y el sistema correspondiente depende de S .

El sonido puede interpretarse como una perturbación del estado de equilibrio de un gas ante pequeñas variaciones de presión (y por tanto pequeñas variaciones de densidad). Se pueden entonces obtener ecuaciones para estas perturbaciones por *linealización* de (7.37) alrededor de la posición $(u, \rho) = (0, \rho_0)$. Poniendo $u = \varepsilon u'$ y $\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho'$ y despreciando los términos cuadráticos en ε se llega a

$$\rho'_t + \rho_0 u'_x = 0, \quad \rho_0 u'_t = -c^2 \rho'_x,$$

con $c^2 = c_0^2$ calculada en $\rho = \rho_0$. Eliminando u' nos queda la ecuación de ondas para ρ'

$$(7.38) \quad \boxed{\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2}.}$$

Una ecuación similar es válida para u' y para p' . De ahí el nombre de ondas de presión. Según la teoría de la ecuación de ondas, la velocidad de propagación de estas pequeñas perturbaciones es precisamente c , que es constante si la densidad base del medio ρ_0 es constante.

EJERCICIO 7.3. (a) Escribir el sistema de los gases isentrópicos en términos de las variables p y u , eliminando ρ .

(b) Calcular la velocidad del sonido de un flujo isoterma. Escribir las ecuaciones.

Ejemplo 7.2 Como ejemplo de la complejidad en varias variables espaciales, describiremos ahora las ecuaciones a que se reduce el sistema compresible de los *gases barotrópicos en condiciones estacionarias e irrotacionales*. Tenemos una ecuación de continuidad que podemos escribir como $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$, es decir

$$\nabla \rho \cdot \mathbf{u} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0.$$

Por otro lado, la ecuación dinámica es

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\nabla p) / \rho = 0.$$

En tercer lugar admitimos que $p = p(\rho)$, de forma que $\nabla p = p'(\rho) \nabla \rho = c^2 \nabla \rho$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación dinámica se tiene

$$c^2 \frac{\nabla \rho}{\rho} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u},$$

con lo que la ley de conservación de masa queda en la forma

$$c^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \langle (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0.$$

Para obtener la ecuación deseada sólo nos falta usar la hipótesis de irrotacionalidad para escribir $\mathbf{u} = \nabla \Phi$, con lo que se llega a

$$(7.39) \quad c^2 \Delta \Phi - \sum_{i,j=1}^3 u_i u_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

Ésta es la expresión buscada. Dado que $u_i = \partial \Phi / \partial x_i$ se trata de una ecuación cuasilineal de segundo orden para la única variable Φ . Esta ecuación es el modelo más conocido en Física Matemática de ecuación de tipo variable. El tipo de la ecuación lo determina la matriz de coeficientes de las segundas derivadas,

$$(a_{ij}) = (c^2 \delta_{ij} - u_i u_j) = c^2 \mathbf{I} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{u},$$

cf. [CH], [We]. La matriz es definida positiva si y sólo si $c > |\mathbf{u}|$, es decir si $M < 1$ (régimen subsónico). Se dice entonces que la ecuación es *elíptica*, similar a la ecuación

de Laplace, a la que se reduce en el límite $M \rightarrow 0$ (con lo que se coincide con el caso incompresible irrotacional). En el caso supersónico en que $M > 1$, $c < |\mathbf{u}|$, la ecuación es de *tipo hiperbólico* (una ecuación de ondas no lineal).

Es aún más fácil de visualizar el resultado en la situación típica en la teoría del sonido en que la velocidad es aproximadamente constante, por ejemplo $\mathbf{u} \sim (U, 0, 0)$, y a ella se superponen las pequeñas oscilaciones de la vibración acústica con potencial Φ . Entonces podemos *linealizar* la ecuación (7.39) en la forma

$$(7.40) \quad (1 - M^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0,$$

con $M = U/c$. Obtenido el potencial, \mathbf{u} se halla por derivación. De ella se obtienen ρ y p por las leyes de conservación o dinámica. Veremos más abajo que p se puede hallar a partir de la ley de Bernoulli en versión barotrópica.

7.7 El P -sistema. Ecuaciones de ondas no lineales

Vamos a aplicar las ideas anteriores para derivar el modelo estándar para un gas barotrópico en 1D en coordenadas lagrangianas (y, t) , lo que conduce a versiones interesantes de la ecuación de ondas. La ley de conservación de masa puede escribirse como $J = \partial x / \partial y = \rho_0 / \rho$ y también como ($v = 1/\rho$):

$$(7.41) \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Del mismo modo el cálculo para el momento da

$$(7.42) \quad \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Introduciendo ahora la coordenada de masa $z = \int^y \rho_0(y) dy$,⁸ cambiando la notación de derivadas totales en t a parciales sin peligro de confusión, y usando la relación barotrópica $p = P(v)$, se llega al sistema

$$(7.43) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P(v)}{\partial z} &= 0, \end{aligned}}$$

un sistema de EDPs no lineal de primer orden. Trabajemos un poco más. En virtud de la primera ecuación (vista como una igualdad de derivadas cruzadas) existe una función "potencial" $w = w(z, t)$ tal que

$$(7.44) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = u, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = v.$$

⁸el extremo inferior de integración es indiferente.

Entonces la segunda ecuación de (7.43) es equivalente a

$$(7.45) \quad \boxed{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(P \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \right)},$$

una *ecuación de ondas no lineal* (tremendamente más difícil de resolver que la clásica). Obsérvese que para un gas ideal adiabático o isoterma se tiene una ley del tipo potencial inverso $P(v) = p_0 v^{-\alpha}$. Esta ecuación de ondas no lineal aparece también en la teoría de la elasticidad.

7.8 Teorema de Bernoulli para fluidos barotrópicos

El resultado de Bernoulli demostrado en el capítulo 5 es válido para fluidos compresibles del tipo llamado barotrópico (cf. sección 7.5) en los que ρ varía pero existe una relación entre p y ρ de la forma $p = p(\rho)$ ó $\rho = \rho(p)$. En ese caso podemos definir una nueva función mediante la fórmula diferencial

$$(7.46) \quad dW = \frac{dp}{\rho}.$$

En el caso isentrópico W es simplemente la función de estado llamada **entalpía** h , ver la definición (7.65) (salvo una constante aditiva). Si ahora repetimos el cálculo que lleva a la fórmula (5.29) pero definiendo

$$(7.47) \quad H = \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + W + U,$$

se tiene:

Proposición 7.8.1 *Para un fluido perfecto y barotrópico, si H es dado por (7.47) se tiene*

$$(7.48) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \omega \times \mathbf{u} = -\nabla H.$$

Es ahora inmediato que los teoremas 5.9.2 y 5.9.3 son válidos *mutatis mutandis*.

Teorema 7.8.2 *En un flujo estacionario, compresible e irrotacional de un fluido perfecto barotrópico con fuerza externa que deriva de un potencial la energía total H es constante en cada componente conexa del dominio de definición del flujo,*

$$(7.49) \quad \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \int \frac{dp}{\rho} + U = cte.$$

Teorema 7.8.3 *En un flujo compresible de un fluido perfecto barotrópico con potencial de fuerzas estacionario la energía total varía a lo largo de cada trayectoria de acuerdo con la fórmula*

$$(7.50) \quad \frac{dH}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Si el flujo tiene una presión estacionaria se concluye que la energía total es constante a lo largo de cada trayectoria, $dH/dt = 0$.

Observemos que para el flujo adiabático de un gas ideal se tienen las fórmulas:

$$p = k\rho^\gamma, \quad c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}, \quad h = \gamma e = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho} = \frac{c^2}{(\gamma - 1)},$$

de forma que H se escribe como

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{c^2}{\gamma - 1} + U.$$

LOS TEOREMAS DE BERNOULLI Y LA ECUACIÓN DE LA ENERGÍA. Hemos deducido los teoremas de conservación de Bernoulli para los fluidos perfectos incompresibles y los barotrópicos por un método directo. Pero, dado que la función H representa una energía, puede ser de interés deducir estos resultados de la ley de conservación de la energía, que para fuerzas conservativas con potencial estacionario viene dada por la ecuación (4.15):

$$(7.51) \quad \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{u})^2 + e + U \right) = \operatorname{div} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}) + q - \operatorname{div} \mathbf{J}.$$

Supondremos además que $q = \mathbf{J} = 0$ (es decir, no existen fuentes ni conducción de calor). Recordando que para un fluido perfecto $\mathbf{S} \cdot \mathbf{u} = -p \mathbf{u}$, se tiene como en el ejercicio 4.2

$$(7.52) \quad \operatorname{div} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}) = -\nabla p \cdot \mathbf{u} - p (\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\nabla p \cdot \mathbf{u} + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial p}{\partial t}.$$

En función de la entalpía, $h = e + p/\rho$ queda la fórmula general

$$(7.53) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{u})^2 + h + U \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}},$$

que hemos obtenido como fórmula de Bernoulli, (5.35). Recordemos que este razonamiento se aplica evidentemente a los fluidos incompresibles en que podemos poner $e = \text{constante}$, $h = p/\rho + c$, mientras que en los isentrópicos se tiene $dS = 0$, $dh = dp/\rho$ y $de = p d\rho/\rho^2$.

Parte II. Teoría matemática

7.9 Leyes de conservación. Ondas de choque

La resolución de los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden *no lineales* de la dinámica de gases es uno de los grandes retos de las matemáticas desde los tiempos de RIEMANN hasta el momento actual. En efecto, los sistemas (7.8), (7.31) admiten en general soluciones clásicas sólo localmente en el tiempo, generándose en tiempo finito discontinuidades inevitables, llamadas **ondas de choque**, donde las características se cruzan y las soluciones (funciones de estado) se hacen discontinuas, cf. [CF]. Una teoría matemática basada en la resolución de los sistemas en el sentido clásico está pues abocada a la catástrofe en tiempo finito.

Dado que la mecánica de fluidos es una ciencia aplicada, ante una situación semejante hemos de saber qué sucede experimentalmente y buscar luego la manera de crear unas matemáticas que respondan a esta información. Pues bien, al atravesar una onda de choque se observan en la práctica discontinuidades de la entropía, y además siempre en sentido creciente. Como dijimos ello es incompatible con una teoría matemática clásica para el problema formulado en los términos aquí descritos. Para explicar físicamente estas discontinuidades es preciso hacer intervenir los términos de conducción de calor y de viscosidad, despreciados en la teoría ideal tal como expusimos en la primera sección.

La teoría se sale del cuadro del análisis clásico, pues ¿cómo pueden las soluciones satisfacer las ecuaciones diferenciales si son discontinuas? El análisis funcional y la teoría de soluciones en el sentido de distribuciones, producto de las matemáticas del siglo XX, explican los nuevos conceptos de solución a emplear y las reglas del nuevo cálculo. Daremos unas ideas tras examinar el ejemplo más elemental de BURGERS.

EJERCICIO 7.4* Escribir el sistema (7.37) en la forma cuasilineal

$$(7.54) \quad \mathbf{U}_t + \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}_x = 0$$

con $\mathbf{U} = (\rho, u)^\dagger$. Identificar la matriz $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\rho, u)$ y demostrar que tiene como autovalores

$$(7.55) \quad \lambda_1 = u + c, \quad \lambda_2 = u - c.$$

Este cálculo es fundamental en el estudio del sistema (7.37) como sistema hiperbólico de ecuaciones en derivadas parciales.

7.10 La ecuación de Burgers

Dado que el estudio de los sistemas expuestos anteriormente tiene dificultades matemáticas evidentes es habitual ilustrar la aparición de singularidades en las soluciones de este tipo de sistemas como (7.8) o (7.54) con la ecuación

$$(7.56) \quad \boxed{u_t + uu_x = 0,}$$

propuesta por el matemático holandés J. M. BURGERS, [Bu], que es la más simple *ley de conservación* en que aparecen discontinuidades en tiempo finito (choques). Obsérvese que (7.56) es simplemente la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en una variable espacial tras despreciar el término de presión (y la viscosidad). Es pues razonable esperar que su problemática tenga estrecha relación con los sistemas de los gases propuestos más arriba. Se toman datos iniciales

$$(7.57) \quad u(x, 0) = f(x),$$

que podemos suponer para más comodidad positivos y C^1 (por ejemplo del tipo gaussiano).

EJERCICIO 7.5* (a) Demostrar mediante la técnica de características que las soluciones clásicas de la ecuación de Burgers en el dominio $Q = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}, t > 0\}$ se obtienen mediante la fórmula implícita

$$(7.58) \quad u(x, t) = f(x - u(x, t)t).$$

(b) Demostrar mediante el teorema de la función implícita que la fórmula (7.58) proporciona una solución C^1 de (7.56)-(7.57) durante un tiempo máximo

$$(7.59) \quad T = \min_x \frac{1}{f'(x)}.$$

(c) Calcular en concreto el tiempo máximo de existencia de solución clásica para el problema con dato

$$(7.60) \quad u(x, 0) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Dibujar las características en planta (plano (x, t)) y ver cómo se cruzan en el primer cuadrante (**choques**) y se separan en el segundo (**onda de rarefacción**).

La teoría anterior se generaliza sin dificultad a ecuaciones de la forma

$$(7.61) \quad u_t + f(u)_x = 0,$$

cuando f es estrictamente convexo, $f''(u) > 0$. Existen muchos resultados para funciones no convexas en el caso escalar. La teoría vectorial es tema arduo de investigación. \square

Un problema serio de análisis

Es muy importante observar que, a partir del tiempo en que las características empiezan a montarse unas sobre otras, el método geométrico produce soluciones $u = u(x, t)$ multivaluadas (varios valores de u para un mismo punto (x, t)). Cuando se comprueba este fenómeno sobre los sistemas reales de los gases, se observa que tales “soluciones” **no** tienen ningún sentido físico y por tanto proponer tal solución es un craso error. Llegamos así un punto culminante de la física matemática moderna, la teoría de *soluciones generalizadas discontinuas*. Veamos un momento en qué consiste: para resolver el enigma

anterior hemos de recordar que los gases ideales son el límite de gases viscosos, estudiar lo que sucede cuando existe pequeña viscosidad y pasar al límite. La regularización de las soluciones de la ecuación de Burgers se realiza añadiendo un término de viscosidad de la forma

$$(7.62) \quad u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx},$$

con $\varepsilon \approx 0$ (*método de la viscosidad evanescente*). Veremos en el próximo capítulo algunas propiedades de estas soluciones y de su comportamiento cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. La explicación de que este método se separe radicalmente del geométrico es que en el momento del choque se tienen derivadas infinitas de la función ideal y el término εu_{xx} no es en absoluto despreciable en la ecuación aproximada por mucho que $\varepsilon \approx 0$. He aquí un ejemplo de cómo la física nos obliga a repensar ciertas costumbres aparentemente seguras, ligeramente adquiridas, pero potencialmente peligrosas.

7.11 Soluciones de entropía para leyes de conservación

Apuntemos algunas ideas sobre el curso que toman las matemáticas para la ecuación de BURGERS y otras leyes de conservación. Se plantea el problema de continuación de las soluciones después de la aparición de una singularidad o, más en general, la existencia de soluciones con datos iniciales no muy regulares. Este problema fue abordado por B. RIEMANN en un trabajo fundamental, 1860, donde introdujo los famosos *invariantes de Riemann*. Para evitar los problemas de regularidad de las soluciones y mantener un cuadro funcional general, con el tiempo se introdujo el concepto de soluciones generalizadas o soluciones en el sentido de las *distribuciones* (S. L. SÓBOLEV, 1938). Pues bien, este recurso hoy clásico **no** es suficiente en las ecuaciones de los gases compresibles, pues tales soluciones generalizadas no son únicas. Es preciso pues un concepto de solución adecuado (o clase de soluciones admisibles), más amplio que el concepto de solución clásico pero más restrictivo que el de solución generalizada, y **que tenga sentido físico**, y probar luego que el problema de valores iniciales y de contorno está bien propuesto en esa clase. Avances fundamentales en la teoría matemática de “Leyes de conservación y ondas de choque” se han realizado en la segunda mitad de este siglo y se deben a OLEINIK, KRUIZHKOVA, LAX, GLIMM y otros muchos autores. Se trata de uno de los temas más activos de investigación matemática actual.

En particular, la construcción y la comprensión de las soluciones admisibles, llamadas *soluciones de entropía*, exige introducir pequeños efectos de viscosidad y conducción que luego se pasan al límite pero dejan su impronta en forma de condiciones de unicidad. Por otra parte los matemáticos aspiran a una caracterización matemática intrínseca de las “buenas soluciones”, lo que se consigue en muchos casos bajo la forma de *condiciones de entropía*. En el caso de la ecuación de Burgers, tal condición suplementaria, que caracteriza la buena solución de entropía entre todas las soluciones distribucionales, fue

formulada por O. OLEINIK como una desigualdad,

$$u_t \leq \frac{C}{t}.$$

Pero tales condiciones simples no existen en problemas en varias dimensiones o en ecuaciones vectoriales. Un artículo fundamental en el estudio de las soluciones de entropía es [Kr], 1970. Una iniciación adecuada al estudio matemático de las ondas de choque es por ejemplo el texto de Chorin y Marsden [CM]. Ver otras referencias en la bibliografía al final del capítulo.

Parte III. Complementos

7.12 Complementos sobre la termodinámica

Es quizá conveniente resumir las ideas avanzadas sobre la Termodinámica y exponer algunas otras. La Termodinámica es la ciencia que estudia los intercambios de calor y trabajo en los medios macroscópicos. Su fundamentación racional se puede buscar como límite de las teorías microscópicas (mecánica estadística, cinética de gases) cuando el número de partículas tiende a infinito⁹. Las hipótesis habituales suponen que tratamos de una sustancia única en un solo estado de agregación (una sola fase), pero la teoría general se extiende a mezclas y estados polifásicos y es fundamental en el estudio de las reacciones químicas. También suponen una situación de *equilibrio* (termodinámico local, para ser más precisos), o al menos de “cuasi-equilibrio”, conceptos que se discuten en los textos y que nosotros admitiremos, pero que no serán válidos en los gases muy enrarecidos ni en los procesos con cambios térmicos muy bruscos e irregulares. Por último, es de señalar que la Termodinámica clásica considera medios homogéneos espacialmente, cosa que no hacemos en la Mecánica de Fluidos, que por tanto generaliza la teoría clásica al introducir la dependencia espacial continua de las variables termodinámicas.

Según la ciencia termodinámica, la situación de un medio homogéneo está perfectamente determinada cuando se dan dos de las variables termodinámicas, a elegir entre una pléthora de variables, lo cual causa no poca desazón al principiante: por orden de aparición tenemos: la densidad ρ (y su inverso, el volumen específico, $v = 1/\rho$), la presión p , la energía interna e , la temperatura absoluta T , la *entropía* específica, S . No todo par es independiente, claro está. Pares independientes de uso práctico son p y ρ , ó T y p , ó S y ρ . La entropía, que involucra un concepto difícil, es muy natural a causa de los procesos adiabáticos. Tales variables se dividen en *extensivas*, que deben integrarse en un volumen dado para dar una contribución global, como ρ , e y S , e *intensivas*, como p y T , que se consideran en su valor puntual por su propia naturaleza.

⁹trabajo fundamental en este sentido se debe a L. Boltzmann (1844-1906)

En la teoría ideal no se tienen en cuenta ni la viscosidad ni la conductividad térmica ni las desviaciones del equilibrio termodinámico.

Es un hecho admitido que para cada clase de materia existe una relación entre la presión p , la temperatura (absoluta) T y la densidad ρ ,

$$(7.63) \quad F(p, T, \rho) = 0,$$

que se llama **ley de estado**. El **primer principio** es de validez general, y dice como hemos visto que

$$(7.64) \quad \delta Q = de + p dv,$$

donde Q no es una función de estado, pero S , definida mediante $\delta Q = T dS$, sí ha de serlo.

A ello se une la ley que relaciona e con T y posiblemente con p , $e = e(T, p)$, y con ello se repite para una sustancia cualquiera el desarrollo de las secciones 7.2, 7.3. Tenemos en resumen una ecuación diferencial y dos leyes de estado.

NUEVAS VARIABLES DE ESTADO. Éstas aparecen en diversas situaciones para sustituir a la energía interna. La más popular es la **entalpía**, h , pero también aparecen la **energía libre** o *función de trabajo de Helmholtz*, A , y el **potencial termodinámico de Gibbs**, también llamado *energía libre de Gibbs*, G . Sus fórmulas son bien inocentes

$$(7.65) \quad \boxed{h = e + pv, \quad A = e - TS, \quad G = h - TS.}$$

Sus diferenciales son

$$(7.66) \quad dh = TdS + vdp, \quad dA = -SdT - pdv, \quad dG = -SdT + vdp.$$

En particular, la entalpía es importante en los cálculos en que la presión o bien es constante o bien varía poco, pues entonces $dh \approx dQ$. Las transformaciones a presión constante se llaman *isobaras*, a temperatura constante *isotermas*, a volumen constante *isocoras*. Por otra parte, en una transformación o proceso adiabático se tiene que $dQ = 0$, luego

$$(7.67) \quad dh = v dp = \frac{dp}{\rho},$$

que es precisamente el término que entra en el segundo miembro de la ecuación de Euler, lo cual muestra la conveniencia de usar la entalpía. En un gas politrópico se tiene

$$(7.68) \quad h = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1) \rho}.$$

Todas las magnitudes termodinámicas, salvo ρ , su inversa v , y T , están en realidad definidas salvo una constante aditiva; lo que se mide son sus variaciones.

Segundo principio de la Termodinámica

Se enuncia en general como sigue para un medio continuo: se postula la existencia de una variable de estado $S = S(\mathbf{x}, t)$, la entropía específica, tal que para todo proceso

$$(7.69) \quad \rho \frac{dS}{dt} \geq \frac{q}{T} - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{T} \right).$$

donde q y \mathbf{J} son las fuentes de calor distribuidas y el flujo de calor definidos en el capítulo 4, y T es la temperatura absoluta. El lector escribirá fácilmente la expresión integral en un volumen material. Los procesos en que se verifica la desigualdad son irreversibles, si hay igualdad reversibles.

Líquidos perfectos

La Termodinámica no se aplica sólo a los gases como ya hemos visto, sino también a los líquidos, estado de la materia que se caracteriza por su facilidad para fluir pero su resistencia a la compresión. Se llaman líquidos perfectos aquellos en que la densidad es absolutamente constante, mientras en la realidad la densidad depende más o menos ligeramente de la temperatura, cf. (8.48). Dado que la entropía ha de ser una función de estado, la Termodinámica dice que en los líquidos perfectos $e = e(T)$, de forma que el calor específico $c = \partial e / \partial T$, es sólo función de T .

7.13 El modelo más simple de la cinética de gases

He aquí una derivación racional muy simple de la ley de Boyle-Mariotte, $p v = c$, debida a KRÖNIG (1856) y CLAUSIUS (1857), que dará al lector una idea somera de los métodos de la cinética de gases basada en la Mecánica Estadística.

Se considera un cubo de lado a y volumen $V = a^3$ conteniendo en un determinado instante N moléculas de un gas con masa m . Se desea calcular la presión ejercida sobre las caras del cubo que viene dada por

$$(7.70) \quad p = \frac{\text{fuerza}}{\text{unidad de superficie}} = \frac{\text{cantidad de movimiento}}{\text{área} \times \text{tiempo}}.$$

Para proceder es preciso hacer una hipótesis sobre la distribución de las moléculas del gas. Para conseguir la máxima sencillez suponemos que *el gas se compone de 6 haces uniformes que se mueven a velocidad constante c en cada una de los seis sentidos paralelos a las aristas del cubo*. Entonces tenemos que en un tiempo Δt una cantidad

$$(7.71) \quad \frac{1}{6} \frac{c \Delta t}{a} N$$

de moléculas golpean una cara del cubo. Dado que cada una imparte una cantidad de movimiento igual a $2mc$, la presión resulta ser

$$(7.72) \quad p = \frac{1}{6} \frac{c \Delta t}{a} N \frac{2mc}{a^2 \Delta t} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} N m c^2 \right) a^{-3}.$$

Así pues,

$$(7.73) \quad pV = \frac{2}{3}E,$$

donde $E = (1/2)Nmc^2$ es la energía cinética total del gas. Queda pues probada la ley del producto pV en condiciones isoterma.

Por supuesto, el lector objetará el carácter rudimentario de nuestra hipótesis estadística. Pero poco después MAXWELL (1860) introdujo una distribución más realista,¹⁰ con la que dedujo de nuevo la ley de Boyle. Fue BOLTZMANN (1872) quien consideró distribuciones generales y procesos de evolución, que le llevaron a la famosa ecuación de su nombre.

El lector interesado en profundizar en este tema puede consultar las referencias [GW, T].

Otros ejercicios

EJERCICIO 7.6*. CALORES ESPECÍFICOS. Supongamos que tenemos un cambio energético regido por la ley PPT (7.15). Se llama *calor específico* a la relación

$$(7.74) \quad c_e = \frac{\partial Q}{\partial T}.$$

Siendo una derivada parcial, c dependerá de cuál es la otra variable termodinámica que se mantiene constante al derivar. Así, la magnitud c_v definida en (7.24) es exactamente el *calor específico a volumen constante* según esta definición, como comprobará el lector.

Demostrar que el *calor específico a presión constante* está dado por

$$(7.75) \quad c_p = \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p,$$

que en un gas ideal vale $c_p + R$. Obtener la conocida relación

$$(7.76) \quad \gamma = c_p/c_v.$$

¿Cuál es el calor específico a entropía constante?

EJERCICIO 7.7. En el estudio de masas estelares KELVIN propone la relación no adiabática $dQ = \lambda dT$ con la que (PPT) queda

$$(7.77) \quad \lambda dT = c_v dT + pdv.$$

¹⁰que resulta ser la famosa gaussiana, llamada maxwelliana en estos contextos.

Obtener una ley constitutiva del tipo (7.27) con

$$(7.78) \quad \alpha = \frac{R}{c_v - \lambda} + 1.$$

Calcular la entropía.

EJERCICIO 7.8. ECUACIONES DE ONDAS. a) A partir de (7.45) obtener para v la ecuación

$$(7.79) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 P(v)}{\partial z^2}.$$

Para u se obtiene la ecuación

$$(7.80) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(P'(v) \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

con un coeficiente dependiente de v . Hallar también una ecuación para ρ .

(b) Deducir por comparación con la ecuación lineal de ondas ($u_t = c^2 u_{xx}$) que la velocidad de propagación c viene dada en coordenadas (z, t) por la fórmula

$$(7.81) \quad \tilde{c}^2 = -P'(v),$$

¿Cómo se reconcilia esto con la velocidad del sonido definida en (7.33)?

(c) ¿Qué tipo de ecuación se obtendría si supusiéramos $P'(v) > 0$?

EJERCICIO 7.9. Sea un líquido perfecto en que no sólo la densidad es constante sino también el calor específico. Hallar las relaciones entre las funciones de estado.

EJERCICIO 7.10. En una sustancia cuya energía interna viene dada por una ley $e = e(T, \rho)$ la entropía tiene de fórmula

$$(7.82) \quad dS = \frac{1}{T} \frac{\partial e}{\partial T} dT + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial e}{\partial \rho} - \frac{p}{\rho^2} \right) d\rho.$$

Mostrar que esta expresión es una diferencial exacta (de una función de T y ρ) si y sólo si existe una función $F = F(T, \rho)$ tal que

$$(7.83) \quad e = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T} \right), \quad p = \rho^2 \frac{\partial F}{\partial \rho},$$

y entonces

$$(7.84) \quad S = -\frac{\partial F}{\partial T}.$$

Recordamos que esta derivada se realiza para ρ constante. Deducir finalmente que F coincide con la función trabajo de Helmholtz. [Indicación: usar como variables independientes $\theta = 1/T$ y $v = 1/\rho$. Entonces $dS = \theta(de + p dv)$, $e = (\theta F_\theta)_\theta$, $p = -F_v$ y $S = -\theta^2 F_\theta$.]

Resumen

- Lista de variables termodinámicas:

densidad (ρ), presión (p), energía interna (e),
 temperatura absoluta (T), volumen específico (v),
 entalpía (h), entropía (S), energía libre de Hemholtz (A),
 energía libre de Gibbs (G).

- Leyes de estado:

$$p = p(T, \rho), \quad e = e(T, \rho).$$

- Relaciones básicas:

$$v = 1/\rho, \quad h = e + pv, \quad A = e - TS, \quad G = h - TS,$$

- Relaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} de &= TdS - pdv, & dh &= TdS + vdp, \\ dA &= -SdT - pdv, & dG &= -SdT + vdp. \end{aligned}$$

- Gases ideales:

$$p = R\rho T, \quad e = c_v T, \quad p = (\gamma - 1)\rho e = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\rho h.$$

- Flujos adiabáticos:

$$dS = 0, \quad de = -pdv = \frac{p}{\rho^2}d\rho, \quad dh = \frac{dp}{\rho}.$$

- Flujo adiabático de un gas ideal:

$$p = k\rho^\gamma, \quad c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}, \quad h = \gamma e = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho} = \frac{c^2}{(\gamma - 1)}, \quad e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} = \frac{h}{\gamma}.$$

Referencias para el capítulo

★ FUNDAMENTOS FÍSICOS

[AF] M. ALONSO, E. J. FINN, “Física”, Addison-Wesley Iberomaericana, 1995.

[Fe] E. FERMI, “Thermodynamics”, Dover, New York, 1937.

[Fe] R. P. FEYNMAN, R. B. LEIGHTON, M. SANDS, “The Feynman Lectures in Physics”, vol. 2, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1964.

[GW] A. M. GLAZER, J. S. WARK, “Statistical Mechanics”, Oxford University Press, 2001.

[T] C. J. THOMPSON, “Mathematical Statistical Mechanics”, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1972.

● LEYES DE CONSERVACIÓN Y ONDAS DE CHOQUE

[CM] A.J. CHORIN, J.E. MARSDEN, “A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics”, Springer-Verlag, 1980

[CF] R. COURANT, K.O. FRIEDRICHS, “Supersonic flow and shock waves”, Springer-Verlag, New York, 1977.

[GR] GODLEWSKI, P.A. RAVIART, “Hyperbolic systems of conservation laws”, SMAI **3/4**, Ellipses, 1991.

[Kr] S. N. KRUIZHKOVA, *First-order quasilinear equations in several independent variables*, Mat. Sbornik, **81** (1970), pp. 228-255 (en ruso); Math. USSR-Sb, **10** (1970), pp. 217-243 (traducción inglesa).

[Lx] P. LAX, “Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves”, CBMS-NSF regional Conference Series, SIAM, Philadelphia, 1973.

[LV] R. J. LEVEQUE, “Numerical methods for conservation laws”, Birkhäuser, Basel, 1990.

[Mj] A. MAJDA, “Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several variables”, Appl. Math. Sci **53**, Springer-Verlag, New York, 1984.

● MECÁNICA ESTADÍSTICA

[KH] K. HUANG, “Statistical mechanics”, Wiley, New York, 1987.

● ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

[CH] R. COURANT, D. HILBERT, “Methods of Mathematical Physics”, Wiley, New York, 1989 (primera ed., 1937).

[We] H. WEINBERGER, “Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales”, Reverté, Barcelona, 19++.

• HISTÓRICO. ECUACIÓN DE BURGERS

[Bu] J. M. BURGERS, *A mathematical model illustrating the theory of turbulence*, Adv. Appl. Mech., **1** (1948), pp. 171-199.

[Bu1] J. M. BURGERS, “The nonlinear diffusion equation”, Reidel, Dordrecht, 1974.

[Ra] LORD RAYLEIGH, J. W. STRUTT, “The theory of sound”, Primera publicación en 1877-1878. Dover, 2 volúmenes, New York, 1976.

[Ri] B. RIEMANN, “Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingung”, [“Sobre la propagación de ondas planas en el aire con amplitud finita”] Abh. Ges. der Wiss. zu Göttingen, math-phys. Klasse **8**, 43 (1860).

Capítulo 8

Los fluidos viscosos compresibles

Se plantean en este capítulo los conceptos, sistemas de ecuaciones e ideas matemáticas fundamentales en el estudio de los fluidos viscosos compresibles, estadio superior en el estudio de los fluidos newtonianos. En los complementos se tratan tres temas específicos importantes: la ecuación de Burgers viscosa con la explicación de la formación de la onda de choque de Burgers, el sistema termo-difusivo de la combustión y los modelos básicos de fluidos con convección.

8.1 Sistema de ecuaciones

El sistema de ecuaciones que determina el estado del fluido contiene las variables estándar densidad ρ , velocidad \mathbf{u} y presión p , alguna de las otras variables termodinámicas, como la energía interna e ó la temperatura T , además de los coeficientes de viscosidad μ y λ y la conductividad térmica k . Las ecuaciones que permiten determinar estas variables son la leyes de conservación y las leyes de estado. Veámoslas en detalle. Tenemos

(I) La ley de conservación de masa general:

$$(8.1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.$$

(II) Las ecuaciones de Navier-Stokes en la forma general ($i = 1, 2, 3$):

$$(8.2) \quad \rho \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + f_i.$$

(III) La ecuación de la energía (CE2), capítulo 4,

$$(8.3) \quad \rho \frac{de}{dt} = \mathbf{S} : \mathbf{D} + q - \operatorname{div} \mathbf{J},$$

donde \mathbf{S} y \mathbf{D} están dados para un fluido newtoniano por

$$(8.4) \quad \mathbf{S} = -p\mathbf{I} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T),$$

de forma que

$$(8.5) \quad \mathbf{S} : \mathbf{D} = -p(\nabla \cdot \mathbf{u}) + W_1, \quad W_1 = 2\mu\mathbf{D} : \mathbf{D} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})^2.$$

El término W_1 es la **función de disipación de Rayleigh** que representa la **disipación viscosa**. Un principio de la ciencia física, el famoso Segundo Principio de la Termodinámica, dice que debe ser positiva (ya que es irreversible). Observamos que W_1 se puede escribir como una forma cuadrática en los coeficientes de $\mathbf{D} = (d_{ij})$:

$$(8.6) \quad W_1 = 2\mu\left(\sum_i d_{ii}^2\right) + \lambda\left(\sum_i d_{ii}\right)^2 + 4\mu\left(\sum_{i<j} d_{ij}^2\right).$$

Hemos visto que μ era no negativo. Por el contrario λ puede ser negativo; así, la teoría de los gases monoatómicos implica que λ está relacionado con μ mediante la fórmula

$$(8.7) \quad \lambda = -2/3\mu,$$

que es la llamada *hipótesis de Stokes*. Obsérvese que ello equivale a absorber toda la traza de \mathbf{S} en la parte $-p\mathbf{I}$. Recordemos que en virtud de la ley de conservación de masa podemos escribir

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} e) = \rho \frac{de}{dt},$$

de forma que la conservación de la energía se escribe también como

$$(8.8) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} e) = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + W_1 + q - \text{div } \mathbf{J}.$$

(IV) las Leyes de Estado

$$(8.9) \quad e = e(T, \rho), \quad p = p(T, \rho),$$

procedentes de la termodinámica suponen la condición de equilibrio térmico local. En el caso más común se toma $e = e(T)$ y se escribe $de = c_v dT$; p puede estar dada por la ley de los gases perfectos de forma que también $dh = c_p dT$, con $c_p = c_v + R$. Podemos introducir aquí otras de las variables termodinámicas discutidas en el capítulo anterior que sean convenientes. Así, si queremos formular la ecuación energética en términos de la entropía se usa la fórmula

$$(8.10) \quad dS = \frac{1}{T}de - \frac{p}{\rho^2 T}d\rho = \frac{1}{T}dh - \frac{1}{\rho T}dp.$$

Se tiene entonces en vez de (8.3):

$$(8.11) \quad \boxed{\rho T \frac{dS}{dt} = q - \operatorname{div} J + W_1}$$

que muestra la simplicidad que se obtiene usando como variable energética la entropía.

(V) Las leyes constitutivas que permiten determinar las relaciones de las demás funciones y parámetros, \mathbf{f} , q , \mathbf{J} , μ , λ . He aquí un conjunto de hipótesis usuales sobre este conjunto de variables.

Las dos primeras se suponen dadas como funciones de \mathbf{x} y t . Pero observemos que en los procesos de combustión q es función de la incógnita T y de otras variables.

Para el flujo de calor \mathbf{J} suponemos que se compone de un *flujo por conducción* y un *flujo por radiación*,

$$(8.12) \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_r$$

La ley de FOURIER describe el flujo de calor por conducción

$$(8.13) \quad \mathbf{J}_c = -k \nabla T.$$

La conductividad térmica, k , se supone una cantidad escalar constante en el caso más simple (lineal, homogéneo e isótropo). Pero es también corriente tomar $k = k(T)$, conductividad dependiente de la temperatura. En todo caso el último término, representando la propagación térmica, en la ecuación de la energía queda

$$(8.14) \quad \dots + \nabla \cdot (k \nabla T).$$

Se olvidan aquí los efectos de radiación. Finalmente, se supone que tanto μ como λ dependen de las variables termodinámicas, por ejemplo p y T . En concreto, sólo suele ser de importancia su dependencia de la temperatura,

$$(8.15) \quad \mu = \mu(T), \quad \lambda = \lambda(T),$$

e incluso en muchas aplicaciones se las toma como constantes.

(VI) Se le añaden condiciones iniciales para ρ , \mathbf{u} y T , así como condiciones de contorno que son por ejemplo

$$(8.16) \quad \mathbf{u} = 0, \quad T = T_w,$$

donde T_w es el dato de temperatura sobre una pared rígida estacionaria. También podemos imponer condiciones adiabáticas a la temperatura

$$(8.17) \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0$$

(derivada normal nula, es decir *no flux*). Hemos llegado así a la formulación completa del problema general de la mecánica de fluidos, que toma la forma matemática de un sistema

de ecuaciones en derivadas parciales no lineal. El sistema es de tipo incompletamente parabólico: la ausencia de un término de difusión en la ecuación de continuidad le impide ser completamente parabólico.

Formulado en estos términos el problema es de una complicación matemática muy grande, casi imposible para el análisis. Dada su gran importancia práctica en las aplicaciones industriales en los últimos años, se ha realizado un enorme trabajo de tipo numérico, cf. [C4].

EJERCICIO 8.1. Escribir la ecuación energética (8.3) en función de la entalpía y de la presión. Poner $\mathbf{J}_r = \mathbf{q} = 0$ y suponer k constante y la ley de estado de los gases perfectos de exponente γ .

EJERCICIO 8.2. (a) Demostrar que la forma cuadrática W_1 en (8.6) es no negativa (en 3D) si y sólo si $\mu \geq 0$ y $\lambda \geq -2/3\mu$. Idea: demostrar que

$$(8.18) \quad W = \frac{2}{3}\mu \left(\sum_{i < j} (d_{ii} - d_{jj})^2 \right) + 4\mu \left(\sum_{i < j} d_{ij}^2 \right) + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \left(\sum_i d_{ii} \right)^2.$$

(b) Hacer los cálculos en N dimensiones. ¿Cuál es entonces el valor crítico de λ ?

8.2 Fluidos barotrópicos

Merece pues la pena examinar cómo se simplifica el sistema en algunos casos más simples que aparecen en la práctica, tal como hemos venido haciendo. Veamos el caso de un *fluido barotrópico* con una ley de estado de la forma

$$(8.19) \quad p = p(\rho),$$

si suponemos además que μ y λ dependen de la densidad, el sistema (8.1), (8.2), (8.19) es cerrado y permite calcular ρ , \mathbf{u} y p . Las ecuaciones (8.2) se simplifican como en el caso incompresible. En 1D se obtiene el sistema

$$(8.20) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) &= 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left((2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \end{aligned}}$$

con p , μ y λ funciones dadas de ρ .

8.3 Gases ideales

Para gases ideales suplementamos (8.1), (8.2) con las ecuaciones constitutivas

$$(8.21) \quad e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}, \quad p = R\rho T, \quad e = c_v T,$$

Con ello y utilizando la ley de Fourier $\mathbf{J} = -k \nabla T$, se llega a

$$(8.22) \quad \boxed{\rho c_v \frac{dT}{dt} + p (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla \cdot (k \nabla T) + q + W_1 - \operatorname{div} \mathbf{J}_r.}$$

Ésta es la forma general de la ecuación del calor, cuya derivación racional y comprensión física son uno de los objetivos del curso. En el caso usual, k constante, $\mathbf{J}_r = 0$ y $q = 0$ y se tiene

$$(8.23) \quad \rho T \frac{dS}{dt} = \rho c_v \frac{dT}{dt} - \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = k \Delta T + W_1,$$

En esta fórmula se identifican claramente los dos términos que hacen variar la entropía a lo largo de una trayectoria.

Complementos

8.4 La ecuación de Burgers viscosa

Como dijimos en el capítulo 7, la regularización de las soluciones de la ecuación de Burgers se realiza añadiendo un término de viscosidad de la forma

$$(8.24) \quad u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx},$$

con $\varepsilon \approx 0$, *método de la viscosidad evanescente*. Para $\varepsilon = 1$ esta ecuación puede ser integrada reduciéndola a la ecuación del calor en dos pasos. Mediante el cambio

$$(8.25) \quad v = \int_x^\infty u(s, t) ds.$$

obtenemos por integración de (8.24) la ecuación

$$(8.26) \quad v_t = \varepsilon v_{xx} + \frac{1}{2}(v_x)^2.$$

Haciendo ahora el cambio

$$(8.27) \quad z = \exp(v/2)$$

se llega a la ecuación del calor para z :

$$(8.28) \quad z_t = z_{xx}.$$

Estos dos pasos constituyen la llamada transformación de HOPF-COLE. Para $\varepsilon \neq 1$ podemos reducirnos al caso anterior mediante el cambio

$$(8.29) \quad u_\varepsilon(x, t) = u_1\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}\right).$$

Ondas viajeras. Veamos un ejemplo muy ilustrativo del comportamiento de las soluciones con viscosidad. Se trata de las soluciones de la forma

$$(8.30) \quad u(x, t) = U(x - ct),$$

que se llaman ondas viajeras porque la figura se desplaza con el tiempo de forma paralela con velocidad c (hacia la derecha si $c > 0$). Es claro que el perfil U debe satisfacer la ecuación

$$(8.31) \quad -cU' + UU' = U''$$

si $\varepsilon = 1$. Tomemos $c > 0$. Una primera integración y la condición de que U y U' vayan a cero cuando $\xi = x - ct \rightarrow \infty$ nos lleva a $U' = (1/2)U^2 - cU$. Integrado da

$$(8.32) \quad U(\xi) = \frac{2c}{1 + e^{c\xi+k}}.$$

EJERCICIO 8.3. (a) Comprobar todas las afirmaciones anteriores.

(b) Verificar que el perfil U es una función decreciente que une el nivel $U(-\infty) = 2c$ con el nivel $U(+\infty) = 0$.

(c) Aplicar el cambio (8.29) para escribir la expresión de la función $U = U_\varepsilon$ cuando $\varepsilon \neq 1$. Ver que en el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ se tiene el perfil $U_0(\xi) = 2c$ para $\xi < 0$, $U_0(\xi) = 0$ para $\xi > 0$. En términos de (x, t) obtenemos

$$u_0(x, t) = \begin{cases} 2c & \text{si } x < ct, \\ 0 & \text{si } x > ct. \end{cases}$$

Ésta es precisamente una **onda de choque**. Se justifican pues en el ejemplo las promesas hechas en la sección 7.10.

(d) Comprobar que la onda de choque tiene como dato inicial una función escalón. Es el llamado **problema de Riemann** para la ecuación (8.24). Dibujar las características y ver cómo entran en el choque: ésta es una propiedad importante para caracterizar los choques que son físicamente admisibles.

EJERCICIO 8.4. (a) Escribir un programa en diferencias finitas para integrar la ecuación de Burgers viscosa.

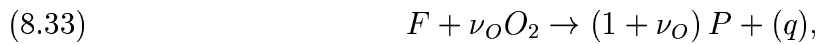
(b) Observar la formación de un pliegue u onda de choque regularizada cuando $\varepsilon \approx 0$ con diversos datos iniciales de soporte compacto. Adivinar qué hace el choque para t grande.

8.5 Sistemas de la combustión

La dificultad de la descripción de la evolución de un fluido compresible se combina en los problemas de combustión con el carácter reactivo de la mezcla fluida y el carácter exotérmico de las reacciones químicas que se desencadenan, que es además altamente variable con la temperatura. Por otra parte, se trata de mezclas de fluidos y no de un componente aislado. Ello da lugar a un teoría de una complejidad aún mayor, pero de una gran importancia científica e industrial.

Veamos un ejemplo de tales problemas en la descripción de la propagación de una *llama premezclada*. El problema de propagación puede ser escrito en toda generalidad como un sistema de EDPs del tipo anterior para las variables ρ , densidad, \mathbf{v} , velocidad media, p presión y T temperatura, todas ellas tomadas como magnitudes promedio en la mezcla. Tenemos además que introducir las variables Y_α , fracciones de masa de los diferentes componentes y productos combustibles, $\alpha = 1, 2, \dots$, y las ecuaciones de conservación correspondientes; todas ellas van conectadas por las relaciones constitutivas necesarias.

Obviamente, la química es una parte crucial del problema y hay usualmente muchas, incluso cientos de ecuaciones implicadas en el proceso, lo que tomado literalmente haría imposible el análisis. Afortunadamente, tal complicación no es necesaria en un estudio cualitativo y tomaremos como es habitual en los textos el caso simple de un solo combustible y un solo oxidante que dan lugar a un producto de acuerdo con la reacción química irreversible



donde una masa ν_O de oxígeno es consumida por unidad de masa del combustible para dar $1 + \nu_O$ unidades de productos, más la energía térmica q . El sistema es entonces como sigue. Primero tenemos las ecuaciones hidrodinámicas

$$(8.34) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$(8.35) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau',$$

donde hemos despreciado el efecto de la gravedad y τ' , el tensor de esfuerzos viscoso, está dado por la ley de Navier-Stokes. Concentrémonos en las *llamas de deflagración*, olvidando pues la teoría de la detonación. De acuerdo con la *aproximación isobárica*, usualmente aceptada en la descripción de deflagraciones lentas, las variaciones de presión pueden ser despreciadas salvo en la ecuación de la conservación del impulso (8.35). En particular, los correspondientes términos de trabajo pueden ser despreciados en la ecuación de la energía, que, escrita para la temperatura común de la llama premezclada, queda de la forma

$$(8.36) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho c_p T) + \nabla \cdot (\rho c_p \mathbf{v} T) = \nabla \cdot (k \nabla T) + q W_F.$$

Además, escribimos $k = \rho c_p D_T$, donde D_T es la *difusividad térmica*. Por último, tenemos unas ecuaciones de conservación de masa de las componentes escritas en términos de las

fracciones másicas:

$$(8.37) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho Y_\alpha) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} Y_\alpha) = \nabla \cdot (\rho D_\alpha \nabla Y_\alpha) - W_\alpha.$$

Estas leyes son un tanto especiales, pues han de tener en cuenta la difusión másica y la producción química W_α . La difusión másica es un efecto aparente debido al hecho de que las componentes no se mueven a la velocidad media, el término de difusión que utilizamos proviene de la llamada ley de FICK y es similar a la difusión térmica de la ley de FOURIER. A estas leyes diferenciales añadimos la bien sabida ley de estado

$$(8.38) \quad p = \rho RT/M.$$

Una característica destacada de la teoría de la combustión viene reflejada en la ley que gobierna la producción química, que es la ley de ARRHENIUS

$$(8.39) \quad W_F = \rho B Y_F^m Y_O^n e^{-E/RT}, \quad W_O = \nu_O W_F,$$

donde m y n son los llamados órdenes de reacción. En las fórmulas (8.36)-(8.39) las magnitudes c_p , q , D_T , R , M , B , m , n y E son en principio funciones de T , Y y ρ , pero tal dependencia no es importante en muchos casos y es a menudo olvidada en la modelización.

Modelo termo-difusivo

Existen, como es natural en la ciencia aplicada, modos de reducir la dificultad del sistema planteado restringiendo el ámbito de aplicación, sin perder el valor predictivo de la teoría. Así, en la llama de deflagración premezclada en que se tiene una mezcla homogénea de combustible y oxígeno, nos interesa considerar la situación de una sola especie reactiva en exceso de oxígeno, es decir, para $Y_O \approx 1$. Entonces sólo la cantidad de combustible $Y_F = Y$ importa en las ecuaciones, ley de la especie deficitaria. Podemos entonces escribir el sistema para la temperatura y la fracción del combustible de la forma

$$(8.40) \quad \begin{cases} \rho(T_t + \mathbf{v} \cdot \nabla T) - \nabla \cdot (\rho D_T \nabla T) = A \rho Y^m e^{-E/RT}, \\ \rho(Y_t + \mathbf{v} \cdot \nabla Y) - \nabla \cdot (\rho D_F \nabla Y) = -B \rho Y^m e^{-E/RT}. \end{cases}$$

Aquí $A = qB/c_p$. En este sistema la hidrodinámica aparece a través de las funciones ρ y \mathbf{v} . Podemos prescindir de su influencia si suponemos que p es casi constante de forma que la ley de estado (8.38) permite despejar ρ en función de T . Por otra parte las ecuaciones hidrodinámicas pueden ser resueltas independientemente dando \mathbf{v} en función de \mathbf{x} , t .

Si suponemos hallada la velocidad, exacta o aproximadamente, por este u otro método, o bien si despreciamos el término convectivo, el sistema (8.40) permite bajo apropiadas condiciones iniciales y de contorno hallar T e Y , variables fundamentales del proceso combustivo. En el sistema hemos abandonado pues todas las ecuaciones de tipo hidrodinámico, por ello se llama el modelo termo-difusivo de llamas. Es un tema de gran

actualidad en la investigación matemática. Bajo hipótesis simplificadoras, como son despreciar el efecto de \mathbf{v} , suponer ρ , D_T y D_F constantes, y generalizando las funciones de reacción se encuentra en la literatura en la forma

$$(8.41) \quad \begin{cases} T_t - D_T \Delta T = f(Y)g(T), \\ Y_t - D_F \Delta Y = -f(Y)g(T), \end{cases}$$

donde se han ajustado las constantes en forma obvia. Éste es el **sistema termo-difusivo** que ha sido intensamente estudiado por los investigadores matemáticos en las últimas décadas.

Equidifusión

La teoría del sistema termodifusivo depende en forma esencial de un parámetro adimensional del sistema, el cociente de las difusividades

$$(8.42) \quad \text{Le} = \frac{D_T}{D_F},$$

llamado *número de Lewis*. Vamos a continuar el análisis bajo la hipótesis adicional de *equidifusión*, es decir cuando el número de Lewis es la unidad. Partiendo de (8.40) introducimos la función de entalpía

$$(8.43) \quad H = T + \frac{q}{c_p} Y,$$

que para $\text{Le} = 1$ satisface la ecuación

$$(8.44) \quad \rho(H_t + \mathbf{v} \cdot \nabla H) - \nabla \cdot (\rho D \nabla H) = 0,$$

donde $D = D_T = D_F$. Trabajando en todo el espacio, $x \in \mathbb{R}^3$, y suponiendo que la entalpía inicial es constante, $H(x, 0) = H_0$, obtenemos la ley

$$(8.45) \quad H(x, t) = H_0$$

para todo x y t . Ello permite simplificar notablemente el problema pues permite despejar Y en función de T ,

$$(8.46) \quad Y = \frac{c_p}{q}(H_0 - T).$$

con lo que sustituyendo en (8.40) llegamos a la ecuación

$$(8.47) \quad \rho(T_t + \mathbf{v} \cdot \nabla T) - \nabla \cdot (\rho D_T \nabla T) = \rho f(T), \quad f(T) = d(H_0 - T)^m e^{-E/RT}.$$

Éste es un notable éxito, pues hemos conseguido una ecuación única para T , aunque aún contiene las variables ρ y \mathbf{v} . Se pide al lector que represente la función de reacción del segundo miembro.

Como dijimos, el número de Lewis es un parámetro fundamental del análisis de este proceso. Para $\text{Le} \neq 1$ la complicación matemática y física es muy notable y la teoría matemática está aún poco desarrollada.

Alta energía de activación

Existe otro parámetro que juega un papel enorme en la teoría de estas llamas, la constante E , llamada *energía de activación* de la reacción. Es habitual que E tenga valores muy elevados lo que permite realizar cálculos asintóticos que se conocen con el nombre de *límite de alta energía de activación*. Se basan en el hecho de que el factor de Arrhenius es muy sensible a la variación de temperatura, lo que obliga a la reacción combustiva a tener lugar en un estrecho frente con un margen de temperatura limitado, lo que en el límite ideal conduce a un problema de frente móvil, o en términos matemáticos, de frontera libre. El límite de alta energía de activación fue propuesto por ZELDÓVICH y FRANK-KAMENETSKI en 1938, y ha sido desde entonces muy popular en la ingeniería, habiendo sido desarrollado en nuestro país por LIÑÁN, cf. [Li]. Sólo en las últimas décadas se han realizado avances matemáticos importantes.

La teoría expuesta en esta sección puede ser ampliada en los textos clásicos, [BuL], [W], [Z4]. Para la versión matemática citemos [BE] y los surveys [BeL] y [V].

8.6 El flujo convectivo

Consideramos un estrato horizontal de fluido sometido a calentamiento por debajo. Debido a la expansión térmica el fluido es más ligero en su parte más baja. Debido al empuje gravitatorio esta situación es inestable, y surge una tendencia a la circulación de las partes más ligeras hacia arriba y las más pesadas hacia abajo, que recibe el nombre de inestabilidad térmica. Tal circulación se llama **convección**. Debido a la viscosidad, se necesita un cierto gradiente de temperaturas mínimo para que el fenómeno se ponga de manifiesto.

Los primeros experimentos para demostrar la aparición de la inestabilidad térmica en los fluidos se deben a H. BÉNARD en 1900, aunque el fenómeno había sido descrito por C. RUMFORD y J. THOMPSON. Una vez alcanzado el umbral de gradiente de temperatura, la convección térmica se pone en marcha y toma una forma celular estacionaria: aparecen unas *células* de circulación vertical, los llamados ROLLOS DE BÉNARD, de tipo hexagonal más o menos deformado. Éste es un notable fenómeno de *formación de modelos geométricos*¹ en la naturaleza.

Ecuaciones. Aproximación de Boussinesq

Las ecuaciones que controlan el fenómeno son el sistema de ecuaciones de los fluidos viscosos compresibles descrito más arriba. Pero dado que este sistema tiene una gran complejidad, es bastante inviable hacer predicciones basadas en él. Afortunadamente, la influencia de la temperatura en la expansión de los líquidos es muy moderada. La ley de estado se escribe en ese caso en la forma lineal

$$(8.48) \quad \rho = \rho_0 (1 - \alpha(T - T_0)),$$

¹*pattern formation*, en inglés

donde ρ_0 y T_0 son la densidad y temperatura de referencia y α es el coeficiente de expansión volumétrica.

Bajo la hipótesis de que α es pequeño, BOUSSINESQ sugirió despreciar todos los términos debidos a la variación de la densidad en el sistema de ecuaciones salvo el que resulta crucial, que es el término de empuje vertical de origen gravitatorio. Así, la ley de conservación de masa queda en la forma incompresible

$$(8.49) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

la ley de conservación del impulso queda en la forma

$$(8.50) \quad \rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \right) = -\nabla p + \rho_0 \nu \Delta \mathbf{u} - \rho g \mathbf{e}_z,$$

y la ley de conservación de la energía toma la forma más simple,

$$(8.51) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \kappa \Delta T,$$

donde hemos supuesto ν , c_v y k constantes, $\kappa = k/\rho_0 c_v$ es la llamada conductividad termométrica. Las ecuaciones (8.48)-(8.51) forman el sistema básico de la *aproximación de Boussinesq*.

Existe una solución estacionaria de este sistema: suponiendo que el suelo en que se apoya el fluido es $z = 0$ tenemos la solución dada por

$$\begin{aligned} u_* = v_* = w_* = 0, \quad T_* = T_0 - \beta z, \\ \rho_* = \rho_0 (1 + \alpha \beta z), \quad p_* = p_0 - g \rho_0 (z + (1/2) \alpha \beta z^2), \end{aligned}$$

donde $\beta > 0$ es el gradiente de temperatura adverso que se impone para originar el fenómeno. Así pues, no existe ningún movimiento y la temperatura varía linealmente con la profundidad (decrece al ascender).

Teoría de perturbaciones. Inestabilidad

Si ahora consideramos pequeñas perturbaciones de esta solución básica y escribimos

$$\theta = T - T_* = T - T_0 + \beta z \quad p' = p - p_*,$$

y si despreciamos términos con factores infinitésimos cuadráticos, llegamos a las ecuaciones perturbativas

$$(8.52) \quad \begin{cases} \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \Delta u_i + g \alpha \theta \delta_{iz} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = \beta u_z + \kappa \Delta \theta. \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones de la teoría perturbativa se puede reducir aún a una forma más conveniente introduciendo la variable vorticidad. Si la tercera componente de $\text{rot } \mathbf{u}$ es ζ , y si $\Delta w = \lambda$, se llega al sistema

$$(8.53) \quad \begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nu \Delta \zeta \\ \Delta w = \lambda, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial t} = \nu \Delta \lambda + g\alpha \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \Delta \zeta + \beta w. \end{cases}$$

La experiencia muestra, y el análisis matemático permite demostrar, que existen soluciones no triviales que surgen del estado estacionario cuando el gradiente de temperatura impuesto es grande con respecto a los datos del problema. Para medir cuán grande debe ser se recurre a las magnitudes adimensionales introducidas en el capítulo 6. Lord RAYLEIGH fue el primero en hacer este cálculo en 1916 y demostrar que el número adimensional pertinente es

$$(8.54) \quad R = \frac{g\alpha\beta}{\kappa\nu} d^4,$$

donde d es la profundidad del estrato fluido. Éste es el conocido *número de Rayleigh*, que controla al aparición de inestabilidades en los procesos convectivos térmicos como el descrito. Interrumpimos aquí la introducción a este fascinante tema matemático y referimos al lector a [Ch] para un estudio detallado de este sistema y en general de las *inestabilidades hidrodinámicas*.

Referencias para el capítulo

• TEORÍA MATEMÁTICA DE LOS FLUIDOS COMPRESIBLES

[PLL] P. L. LIONS, “Mathematical Topics in Fluid Mechanics”, Oxford Science Publications, vol. 2, 1998.

• MÉTODOS NUMÉRICOS

[An] J. D. ANDERSON, “Computational Fluid Mechanics”, Mc Graw Hill, New York, 1995.

[C4] C. CANUTO, M. Y. HUSSAINI, A. QUARTERONI, T. A. ZANG, “Spectral methods in fluid dynamics”, Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag, New York, 1988.

[Pi] O. PIRONNEAU, “Méthodes des éléments finis pour les fluides”, Masson, Paris, 1988.

• ECUACIÓN DE BURGERS Y PROPAGACIÓN DE ONDAS

[Wh] G. B. WHITHAM, “Linear and Nonlinear Waves”, Wiley-Interscience, 1974.

• PROBLEMAS DE COMBUSTIÓN

[BE] J. BEBERNES, D. EBERLY, “Mathematical Problems from Combustion Theory”, Appl. Math. Sci., **83**, Springer-Verlag, New York, 1989.

[BeL] H. BERESTYCKI, B. LARROUTUROU, “Mathematical modelling of planar flame propagation”, Pitman Research Notes in Mathematics, Longman, London, 1990.

[BuL] J.D. BUCKMASTER AND G.S.S. LUDFORD, “Theory of Laminar Flames”, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[Li] A. LIÑÁN, *The structure of diffusion flames*, in “Fluid dynamical aspects of combustion theory”, M. Onofri and A. Tesei eds., Pitman Research Notes in Math. Series **223**, Longman Sci. Techn., 1991.

[V] J. L. VAZQUEZ, *The free boundary problem for the heat equation with fixed gradient condition*. “Free boundary problems, theory and applications”, Pitman Research Notes in Mathematics Series **363**, M. Niezgodka and P. Strzelecki eds., Longman, 1996.

[Wi] F. A. WILLIAMS, “Combustion Theory”, 2nd. ed., Benjamin/Cummnings, Menlo Park, CA, 1985.

[Z4] YA. B. ZELDOVICH, G.I. BARENBLATT, V.B. LIBROVICH, G.M. MAKHVILADZE, "The mathematical theory of combustion and explosions", Consultants Bureau, 1984.

• CONVECCIÓN E INESTABILIDAD

[Ch] S. CHANDRASEKHAR, "Hydrodynamic and Hydromagnetic Instability", Dover, New York, 1961.

Capítulo 9

Estática de fluidos

Examinamos en este capítulo la Estática de Fluidos o Fluidoestática, históricamente llamada Hidrostática, parte de la Mecánica de Fluidos en que se supone que el fluido está en reposo, o lo que es lo mismo que el campo de velocidades es nulo, y se investiga el régimen de presiones y densidades. Los resultados que siguen se aplican también a movimientos uniformes (con velocidad constante), que pueden de todas formas reducirse al reposo por un cambio de coordenadas inercial.

La teoría matemática de la Fluidoestática puede verse como un caso particular simple de las teorías dinámicas de capítulos precedentes. Dada su mayor simplicidad es natural que la Hidrostática haya sido la primera rama del mundo de los fluidos estudiada científicamente y durante muchos siglos la única. A ella pertenece el resultado más importante obtenido en la Antigüedad clásica, el teorema de Arquímedes. Dedicamos un espacio a un tema de interés en Astronomía, el equilibrio gravitacional de una estrella.

9.1 Fluidos incompresibles

El caso más simple corresponde a los fluidos perfectos incompresibles y homogéneos. Tomando ρ constante, la ecuación de Euler se reduce a

$$(9.1) \quad \nabla p = \mathbf{f}.$$

Hemos de suponer pues en estas condiciones que la fuerza es *conservativa*, es decir que deriva de un potencial U de forma que

$$(9.2) \quad \mathbf{f} = -\rho \nabla U.$$

Tal es el caso de la fuerza gravitatoria $\mathbf{f} = -\rho g \mathbf{k}$ con potencial gravitatorio $U = gz$. Entonces la ecuación (9.1) da

$$(9.3) \quad \frac{p}{\rho} + U = cte.$$

Un EJEMPLO típico es la presión dentro de un líquido en reposo que tiene una *superficie libre* (en contacto con el aire) que suponemos a altura cero. Si $h = -z > 0$ es la profundidad de un punto del líquido se tiene entonces que

$$(9.4) \quad p = p_0 + \rho gh = p_0 - \rho gz,$$

donde p_0 es la presión atmosférica.

Observemos que en la situación de equilibrio la presión ha de ser constante en las superficies equipotenciales del campo de fuerzas externo. De no ser así, y de acuerdo con la ecuación de la conservación del impulso (3.6), no se alcanzaría el equilibrio dinámico y los términos du/dt habrían de intervenir.

NOTA SOBRE UNIDADES DE MEDIDA. La presión atmosférica equivale al peso de una columna de mercurio de 76cm. De acuerdo con la fórmula (9.4) y siendo la densidad del mercurio $13,6 \text{ gr/cm}^3$ y $g = 9,8 \text{ m/sg}^2$, se obtiene el valor de $1 \text{ atmósfera} = 1,013 \times 10^5 \text{ pascuales} = 1,033 \text{ kp/cm}^2$. En meteorología también es usado el *milibar* = 10^3 barias = 100 pascuales.

9.2 Fluidos no homogéneos

En un caso estático la característica de compresible se refleja en que la densidad es variable, pues evidentemente se cumple la condición de incompresibilidad a lo largo de las trayectorias, $d\rho/dt = 0$, ya que $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$. Consideremos el caso del aire atmosférico. De acuerdo con la ley de los gases se tiene que

$$(9.5) \quad p = R\rho T,$$

de modo que en condiciones isotermas la presión es proporcional a la densidad. Combinando esto con (9.1) y suponiendo que $\mathbf{f} = -\rho g\mathbf{k}$ se llega a la ley de decrecimiento de presiones con la altura

$$(9.6) \quad p = p_0 e^{-ch}, \quad c = \frac{g}{RT},$$

donde h es la altura sobre un nivel de referencia (el suelo) y p_0 es la presión a ese nivel.

EJERCICIO 9.1. (a) Demostrar la fórmula (9.6).

(b) Hallar la fórmula correspondiente a un γ -gas de ley $p = c\rho^\gamma$, que es de la forma

$$(9.7) \quad p^\alpha = p_0^\alpha - kh, \quad 0 \leq h \leq h_{max},$$

con $\alpha = (\gamma - 1)/\gamma$. Dar una fórmula para h_{max} .

(c) ¿Cuál es la principal diferencia cualitativa? Hacer una gráfica comparativa de las funciones $p = p(h)$. Interpretar en términos atmosféricos la existencia de una h_{max} .

Aproximación hidrostática. Las fórmulas de la presión en términos de la altura recién calculadas, (9.4) y (9.6), son de utilidad aún en fluidos que no están en reposo cuando en las ecuaciones de Euler los términos inerciales, $\rho d\mathbf{u}/dt$, no tienen relevancia comparados con los términos ∇p y \mathbf{f} . Esta aproximación suele utilizarse en la dirección vertical en que actúa la gravedad. Suponemos pues que la componente vertical de la velocidad es despreciable, $w \sim 0$, con lo que la componente z de la ley dinámica queda en primera aproximación

$$(9.8) \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g,$$

de donde integrando nos queda $p = p_0(x, y) - \rho g z$ y eliminamos la dependencia en z . Las otras dos componentes son las típicas ecuaciones de Euler. El mismo razonamiento puede aplicarse a los fluidos viscosos si los nuevos términos de viscosidad son relativamente despreciables. Veremos una aplicación de la aproximación hidrostática en el estudio de los fluidos en medios porosos, capítulo 10.

9.3 Principio de Arquímedes

Abordamos ahora el resultado sin duda más clásico de la teoría de los fluidos, el famoso Principio de ARQUÍMEDES.

Teorema 9.3.1 *Un cuerpo sumergido en un líquido sufre un empuje hacia arriba equivalente al peso del líquido que desaloja.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el cuerpo ocupa un volumen Ω con frontera Γ dentro del fluido. La fuerza de superficie ejercida sobre el cuerpo es

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= - \iint_{\Gamma} p \mathbf{n} dS = - \iiint_{\Omega} \nabla p d\mathbf{x} = \\ &= \iiint_{\Omega} \rho g \mathbf{k} d\mathbf{x} = g \left(\iiint_{\Omega} \rho d\mathbf{x} \right) \mathbf{k}. \quad \square \end{aligned}$$

La teoría desarrollada ha permitido hacer trivial la demostración de este resultado fundamental, que Arquímedes enunciaba así: “los sólidos menos pesados que un fluido y que se introducen en él son empujados hacia arriba con una fuerza igual a la del peso en que un volumen del fluido igual al del sólido supera al peso de éste último”.

9.4 Equilibrio gravitacional de una estrella

Finalmente, estudiemos la configuración de una ESTRELLA EN ESTADO DE EQUILIBRIO GRAVITACIONAL, es decir la configuración estacionaria de una masa de gas sometida

a la interacción gravitatoria. Éste es un tema básico de la astronomía moderna. Los primeros trabajos se deben a LANE (1870), RITTER (1878) y LORD KELVIN (1887). La deducción es muy sencilla: admitimos que esta configuración es radialmente simétrica y ocupa el volumen $\{\mathbf{x} : |\mathbf{x}| \leq R\}$. La fuerza externa debida a la atracción gravitatoria que actúa sobre una partícula situada a distancia $r \leq R$ del centro es, según las leyes de Newton, equivalente a la atracción ejercida por la masa $M(r)$ contenida en la bola de radio r considerada como una masa puntual situada en el origen, sin influencia neta alguna de la masa situada a distancias mayores de r .¹ Se tiene

$$(9.9) \quad \mathbf{F}(r) = -G \frac{M(r)\rho}{r^2} \mathbf{e}_r,$$

así como

$$(9.10) \quad \frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\rho r^2,$$

donde G es la constante gravitatoria. Con ello para $0 \leq r \leq R$ escribimos la ecuación (9.1) en la forma

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M(r)}{r^2},$$

con $p = P(r)$. Así llegamos a la ecuación

$$(9.11) \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G\rho.$$

que debería permitir calcular P y ρ si conocemos una relación entre ellas. Según KELVIN, tal relación es del tipo barotrópico con dependencia potencial

$$(9.12) \quad p = c\rho^\alpha,$$

siendo $\alpha > 1$ el exponente adiabático o una corrección politrópica del mismo (ver [Ch], caps. 3 y 4; cf. Ejercicio 7.7). Poniendo

$$P = \Phi^\mu, \quad \text{con } \mu = \frac{\alpha}{\alpha - 1},$$

se obtiene la ecuación para Φ :

$$(9.13) \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = -\lambda \Phi^m,$$

que es conocida como **ecuación de Lane-Emden**. λ es una constante positiva y $m = 1/(\alpha - 1)$. Obsérvese que el primer miembro es precisamente el laplaciano para funciones radiales en tres dimensiones, de forma que la ecuación se escribe de forma general como

$$(9.14) \quad \boxed{-\Delta\Phi = \lambda\Phi^m},$$

¹este es un resultado no trivial, bien conocido en mecánica.

que es un modelo de *ecuación elíptica semilineal*. Este tipo de ecuaciones siguen en el punto de mira de los investigadores matemáticos un siglo después.

EJERCICIO 9.2. Calcular una solución particular de (9.14) de la forma

$$(9.15) \quad \Phi(r) = c r^{-\beta}$$

en dimensión espacial 3. Demostrar que existe tal solución si $n > 3$ y que el exponente β es necesariamente $2/(m-1)$.

EJERCICIO 9.3. (a) Calcular la ecuación correspondiente al caso isoterma, $\alpha = 1$, y obtener

$$(9.16) \quad -\Delta\Phi = \lambda e^{\Phi},$$

con $\Phi = \log P$ (ecuación de Gelfand-Barenblatt). Esta ecuación es importante en la teoría de la combustión.

(b) Obtener una solución particular de la forma

$$(9.17) \quad \Phi = -c \log(r).$$

EJERCICIO 9.4 Probar la afirmación sobre la atracción gravitatoria hecha al comienzo de la demostración. (Éste es un ejercicio para el lector interesado en la mecánica clásica).

9.5 Estática de los fluidos viscosos

Hemos visto que el tensor de esfuerzos de los fluidos viscosos tiene términos suplementarios, pero estos dependen de las derivadas de la velocidad. Por ello las fórmulas hidrostáticas de esta sección se aplican también a tales fluidos.

Comentario histórico

ARQUÍMEDES de SIRACUSA estableció los principios relativos al equilibrio de los cuerpos flotantes en el siglo III a.C. Gran geómetra y al tiempo hombre práctico, con ello pudo determinar el peso específico de una sustancia comparando su peso en el aire con el peso tras sumergirla en agua. Hasta el Renacimiento se mantuvo la conexión de esta ciencia con los oficios mecánicos. El primer tratado moderno de hidrostática se debe a Simon STEVIN (1589), quien explicó el hecho de que la presión ejercida por un fluido sobre el fondo de un recipiente en condiciones estáticas es proporcional a la altura vertical del fluido y no a la cantidad de fluido presente (“paradoja hidrostática”). Durante el siglo XVII se analiza la presión y sus propiedades, se deduce la ecuación de los gases perfectos y se construyen tubos capilares y bombas de vacío. Aunque LEONARDO DA VINCI escribió sobre la turbulencia hacia 1500, el verdadero estudio de las ecuaciones de la dinámica empieza en el siglo XVIII.

Resumen

- Aproximación hidrostática: $p = p_0 + \rho gh$.
- Presión para fluidos barotrópicos: $p = p_0 e^{-ch}$.
- Ecuación de Lane-Emden: $-\Delta\Phi = \lambda\Phi^m$.
- Ecuación de Gelfand-Barenblatt: $-\Delta\Phi = \lambda e^\Phi$.

Referencias para el capítulo

[Ch] S. CHANDRASEKHAR, “An Introduction to the Study of Stellar Structure”, Dover, Chicago, 1939, 1969.

Capítulo 10

Fluidos en medios porosos

Se consideran los flujos a través de medios porosos. Se sustituye la ley dinámica usual por una ley de origen experimental, llamada ley de Darcy, que tiene en cuenta la interacción con el medio a través del cual fluye el fluido. Se estudian diversas aplicaciones, se deducen los modelos adecuados y se formulan los correspondientes problemas matemáticos cerrados. Hemos considerado útil hacer un amplio elenco de los problemas que aparecen con mayor frecuencia en la literatura aplicada y en la investigación. El lector es invitado a seleccionar en una primera lectura los modelos más de su gusto, quizá los primeros, que son conceptualmente más simples.

10.1 Introducción

La ecuación de Navier-Stokes es la ley fundamental que describe la dinámica de los fluidos viscosos newtonianos y junto con las leyes de conservación de masa (y de conservación de la energía y de estado si el fluido es compresible) permite describir su movimiento a partir de unas condiciones iniciales y de contorno determinadas. Esta ley se aplica a una enorme variedad de situaciones prácticas de fluidos reales. Sin embargo, no es de aplicación inmediata para describir la dinámica de los fluidos que discurren a través de medios porosos, pues el fluido avanza por los huecos que deja la estructura (o matriz) sólida y es preciso tener en cuenta la resistencia ofrecida por ésta.

Los fluidos en medios porosos son de gran importancia en diversos problemas de interés industrial o social, como son la extracción de petróleo o gas, la distribución y manejo de las aguas subterráneas, la hidráulica de los diques, los problemas de contaminación o el tratamiento de residuos y la construcción de filtros de diversos usos. Dada la gran irregularidad que ofrece la matriz sólida en muchos de los ejemplos anteriores, el análisis del flujo según las leyes clásicas de los fluidos suplementadas con la interacción fluido-estructura resulta impracticable y aún irreal.

Se plantea así una nueva problemática dentro de la mecánica de fluidos, a saber hallar

un procedimiento alternativo que permita describir de forma eficaz tales flujos. La descripción del flujo en el medio poroso, que como hemos dicho es muy complicada a escala inferior a los poros (pongamos a escalas del orden de 10^{-5}cm para fijar ideas), se torna más fácil cuando se consideran escalas grandes con respecto al tamaño de los poros, pues se da un fenómeno de promedio. Por otra parte tales flujos, o filtraciones, suceden a tan pequeñas velocidades que los términos de inercia son despreciables en comparación con los de presión y viscosos. La fuerza externa es usualmente la gravedad y se tiene en cuenta cuando el fluido es un líquido y el movimiento no es horizontal.

El ingeniero francés H. DARCY (1803-1858), que trabajaba para el consorcio de aguas de la ciudad francesa de Dijon, encontró en 1856 una ley experimental que describe adecuadamente la dinámica del flujo de un fluido incompresible en un medio poroso y esta ley ha sido ampliada posteriormente para cubrir las diversas situaciones que aparecen en la teoría de la filtración.

10.2 Ley de Darcy

Supongamos que un fluido incompresible, por ejemplo el agua, fluye por un medio poroso. La ley propuesta por DARCY relaciona en forma lineal las dos magnitudes fundamentales del flujo, la velocidad, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, y la caída de presión, $p(\mathbf{x}, t)$, según la fórmula

$$(10.1) \quad \mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla(p + \rho g z),$$

hoy día llamada **ley de Darcy**. Aquí $\mathbf{x} = (x, y, z)$ es la posición, z es la coordenada vertical, ∇ es el operador gradiente espacial, g es la aceleración de la gravedad, ρ es la densidad, aquí supuesta constante, μ es la *viscosidad dinámica*, una magnitud que es típica de cada fluido viscoso. Todas ellas son magnitudes estándar en el estudio de los fluidos viscosos. Por el contrario, k es un nuevo parámetro físico, típico del medio poroso, llamado *coeficiente de permeabilidad* del medio, por ejemplo el suelo o un filtro artificial.

Los coeficientes μ y k pueden ser en principio variables, pero es en muchos casos aceptable suponer un medio homogéneo y entonces ambos son constantes, que se determinan experimentalmente y preocupan poco al matemático aunque no así al ingeniero. Mientras que μ tiene dimensiones de $gr/cm \times sg$, k tiene dimensiones de área, se mide en cm^2 . El significado físico de k es un poco complicado, es una especie de área efectiva del poro, es extremadamente variable con el medio y su determinación es uno de los temas de debate en el estudio práctico de los fluidos en medios porosos. Tales conceptos vienen discutidos en detalle en textos como [BER], [Be], [BV], [Mu] o [PK].

Suplementada por adecuadas leyes complementarias y condiciones iniciales y de contorno, la ley de Darcy permite plantear los principales problemas de filtración en los dominios de la ingeniería antes mencionados, en forma de sistemas cerrados de ecuaciones en derivadas parciales no lineales. En cuanto a la aplicación práctica de este modelo,

una dilatada evidencia experimental permite afirmar que la ley de Darcy sustituye a la de Navier-Stokes en los medios porosos aunque sólo en circunstancias adecuadas. En particular, se aplica a flujos con bajo número de Reynolds, en que los efectos de inercia son despreciables frente a los viscosos. Como es bien sabido en mecánica de fluidos, cf. capítulo 6, el número de Reynolds, Re , es un número adimensional que representa una especie de inverso de la viscosidad normalizado por la densidad y la velocidad y longitud típicas del medio, $Re = U l \rho / \mu$.

10.3 El experimento de Darcy

El montaje experimental consiste en una columna vertical de sección A y longitud L rellena de un medio poroso (arena) por el que se hace pasar agua. Se mide el volumen de agua Q que atraviesa la columna por unidad de tiempo y las alturas piezométricas medidas por un manómetro en los extremos de la columna, h_1 y h_2 . El famoso resultado de DARCY se expresa en la forma

$$(10.2) \quad Q = \frac{KA(h_1 - h_2)}{L}.$$

El punto importante de la fórmula es que K es una constante, llamada *conductividad hidráulica*. La altura piezométrica es una medida de la llamada presión no hidrostática,

$$\pi(x, z) = p(x, z) + \rho g z,$$

normalizada para que tenga dimensión de longitud, $h = \pi / (\rho g)$. Utilizando estas definiciones podemos transformar (10.2) a la forma (10.1) pues

$$(10.3) \quad h_1 - h_2 = \frac{\Delta\pi}{\rho g} \quad (\Delta = \text{incremento}).$$

Se supone que el incremento varía linealmente, con lo que el *gradiente hidráulico*

$$(10.4) \quad J = \frac{h_1 - h_2}{L}$$

se identifica con $\nabla\pi / \rho g$. Por otra parte, $Q/A = q$ es la llamada *descarga específica*, que es una forma de medir la velocidad media del fluido. Se llega así a (10.1) con

$$(10.5) \quad K = \frac{k \rho g}{\mu}.$$

Un montaje similar se realiza en una columna inclinada, cf. [Be], [BV]. El lector comprobará que K se mide en unidades de m/sg ó cm/sg . Como dijimos, k se mide en cm^2 en el sistema c.g.s.¹

¹en honor al gran ingeniero francés en ingeniería hidráulica se utiliza como unidad el *darcy*= $9.87 \times 10^{-9} cm^2$.

10.4 Revisión de las magnitudes y ecuaciones básicas

Como es bien sabido, la mecánica de fluidos se basa en la hipótesis del continuo espacio-temporal y las magnitudes básicas: densidad, velocidad, presión, temperatura, etc., están definidas como promedios idealizados del comportamiento del fluido en un volumen elemental representativo del fluido, VER. En el estudio de los flujos en medios porosos la escala del VER resulta demasiado fina, de modo que se sustituyen estos promedios por los promedios en un *volumen elemental representativo del medio poroso*, VERMP, que se supone mucho mayor y abarca un número suficiente de poros para que tenga sentido el nuevo promedio.

Para empezar, se introduce una nueva magnitud media local, la *porosidad* m , que se define como el cociente del volumen ocupado por los poros V_p (o volumen vacío) por el volumen total V de un VERMP tomado en torno a un punto \mathbf{x} . Es decir, m es la fracción del volumen no ocupado por la matriz sólida y disponible para el paso del fluido. Este valor ha de entenderse como un límite cuando el VERMP $\Omega(\mathbf{x})$ es pequeño dentro del orden de magnitud que escogemos. Así pues, por definición $0 < m < 1$ y depende del punto, $m = m(\mathbf{x})$. En un medio poroso compresible depende también de t . En primera aproximación podemos suponer que la porosidad es constante, lo que simplifica notablemente las matemáticas, pero esta hipótesis no es realista en muchos casos dado que los suelos son altamente heterogéneos.

En cuanto a las magnitudes “clásicas”, la densidad del fluido en el medio poroso se define como el cociente entre la masa de fluido M_p contenida en el espacio vacío $\Omega_p(\mathbf{x})$ de un VERMP con respecto al volumen V_p de ese espacio,

$$(10.6) \quad \rho(\mathbf{x}) = \frac{M_p}{V_p} = \frac{\int_{\Omega_p(\mathbf{x})} \rho'(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'}{\int_{\Omega_p(\mathbf{x})} d\mathbf{x}'},$$

donde indicamos con ρ' la magnitud densidad tal como es definida y utilizada en la mecánica de fluidos estándar (a un nivel de escala más fina, pues). De nuevo se supone que la cantidad del segundo miembro tiene un límite cuando $\Omega(\mathbf{x})$ es un VERMP pequeño en torno a \mathbf{x} . En cuanto a la velocidad, ésta es un promedio en el volumen que podemos definir mediante el flujo de masa a través de una superficie S . Se suele tomar como referente el área total de la superficie A y entonces se define la *velocidad de filtración* o *descarga específica*² mediante la fórmula

$$(10.7) \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}) A} \int_S \rho(\mathbf{x}') \mathbf{u}'(x') \cdot \mathbf{n}(x') dS(x'),$$

donde \mathbf{n} es la normal a la superficie. De nuevo la primas indican cantidades definidas al nivel de escala inferior. El hecho de que existe la cantidad \mathbf{q} función de \mathbf{x} y t en el sentido de límite para S pequeño en la escala de los VERMP es una hipótesis de la teoría

²*seepage flow velocity* y *specific discharge* resp. en inglés.

idealizada, cuya justeza ha de ser comprobada experimentalmente. También se utiliza la velocidad intrínseca \mathbf{v} que está referida al área A_p ocupada por los poros,

$$(10.8) \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}) A_p} \int_S \rho(\mathbf{x}') \mathbf{u}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}') dS(\mathbf{x}').$$

Recordemos que ambas son conceptos medios y no representan la velocidad de ninguna partícula, (incluso en el sentido de partícula fluida habitual en mecánica de fluidos). Entre ambas velocidades se tiene la relación

$$(10.9) \quad \mathbf{q} = m \mathbf{v},$$

pues se demuestra que la relación de áreas es la misma que la relación de volúmenes. En los procesos de filtración es más conveniente utilizar \mathbf{q} , el volumen de agua que atraviesa una cierta superficie total por unidad de tiempo, y en términos de \mathbf{q} se escribe la ley de Darcy. Por otra parte, \mathbf{v} es conveniente para expresar el movimiento de las fronteras libres y otros fenómenos que se pueden ver como movimiento de “partículas”. En todo caso, para porosidad constante la diferencia es matemáticamente irrelevante, pero el lector quedará prevenido de diferencias notables de notación en los textos, que hacen su lectura laboriosa. De manera similar, la presión se define como

$$(10.10) \quad p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V_p(\mathbf{x})} \int_{\Omega_p(\mathbf{x})} p'(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}',$$

y del mismo modo la temperatura.

Con estas definiciones la conservación de la masa se deduce en la forma habitual en la mecánica de fluidos (ver referencias) y se llega a la fórmula

$$(10.11) \quad \frac{\partial}{\partial t}(m \rho) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) = 0,$$

con la novedad de la m . Esta ley básica admite una variante de interés práctico cuando existen fuentes o sumideros de fluido distribuidos, de intensidad $r = r(\mathbf{x}, t)$. Entonces

$$(10.12) \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial t}(m \rho) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) = r.}$$

A la ley de conservación de masa se añade la ley dinámica de Darcy. Esta, originalmente formulada para *fluidos incompresibles*, ha sido extendida a los fluidos compresibles en la forma

$$(10.13) \quad \boxed{\mathbf{q} = -\frac{k}{\mu}(\nabla p + \rho g \nabla z).}$$

Ésta es la forma usual con campo de fuerzas gravitatorio. Obsérvese que al ser ρ variable el último sumando toma una forma un tanto distinta de la enunciada en (10.1). Las leyes

anteriores se escriben suponiendo que el medio es homogéneo, anisótropo e indeformable, hipótesis de gran utilidad a la hora de simplificar el problema matemático pero que no siempre se ajustan a la realidad. La falta de homogeneidad se refleja mediante la dependencia de k, μ y ρ respecto a \mathbf{x} . La falta de isotropía se tiene en cuenta en la forma más general de la ley de Darcy

$$(10.14) \quad \mathbf{q} = -\frac{K}{\mu} \nabla \Phi,$$

donde la permeabilidad es ahora un tensor K y Φ es el *potencial hidráulico*, que se define por integración de

$$\nabla \Phi = \nabla p + \mathbf{f},$$

con \mathbf{f} un campo de fuerzas exterior. Finalmente, la deformabilidad lleva a problemas del tipo fluido-estructura de gran importancia, que exceden el rango de este texto.

En cuanto a las magnitudes termodinámicas, necesarias para cerrar el sistema de ecuaciones en los fluidos compresibles, hemos de observar que los valores medios no cumplen las leyes derivadas anteriormente, que son no lineales, salvo que las fluctuaciones de presión y temperatura respecto a los valores medios sean pequeñas en cada elemento V_p , lo cual supondremos en lo que sigue, pero puede afectar a la validez de los razonamientos en situaciones límite.

10.5 Significado de la permeabilidad

Los investigadores han descubierto diversas fórmulas que relacionan la permeabilidad k con la geometría de la matriz sólida.

Ejemplo ilustrativo. Es relativamente fácil calcular k en el caso (tremendamente simplificado, pero aún así ilustrativo y ajustado al fenómeno) en que el medio poroso se supone formado por tubitos horizontales puestos en paralelo en dimensión 2 ó 3. El flujo laminar correspondiente es el llamado *flujo de Poiseuille* estudiado en el capítulo 6, cf. ejemplo 6.2. Veamos en detalle el cálculo en 2D en un plano horizontal. Tomemos n tubos y sea $d = 2a$ el diámetro de cada tubo. Bajo la hipótesis de no turbulencia se supone una velocidad laminar del tipo

$$(10.15) \quad \mathbf{u} = (u, 0).$$

La incompresibilidad implica que $u_x = 0$, luego $u = u(y)$. Aplicando la ley de Navier-Stokes en su componente y se obtiene $p_y = 0$, es decir la presión ha de tener la forma $p = p(x)$. Ambas están relacionadas además por

$$(10.16) \quad p_x = \mu u_{yy} = -c, \text{ constante.}$$

Entonces, si L es la longitud del tubo y $2a$ su anchura:

$$(10.17) \quad p_x = -c, \quad p = -cx + c_1 \quad \text{y} \quad c = \frac{p_0 - p}{L} = -\nabla p.$$

Con datos de contorno 0 para u en $y = \pm a$ queda $u_{yy} = -c/\mu$, $u(a) = u(-a) = 0$, lo que lleva a

$$(10.18) \quad u = \frac{c}{2\mu}(a^2 - y^2).$$

Se obtiene pues

$$(10.19) \quad u_{\max} = \frac{ca^2}{2\mu}, \quad u_{\min} = 0,$$

mientras que la velocidad media (a través de todos los tubos, el esquema se repite) es

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{nd} \int u(y) dy = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \frac{c}{2\mu}(a^2 - y^2) dy \\ &= \frac{c}{2a\mu} \int_0^a (a^2 - y^2) dy = \frac{ca^2}{3\mu} = \frac{2}{3}u_{\max}. \end{aligned}$$

Con ello podemos escribir

$$(10.20) \quad \bar{u} = \frac{a^2}{3\mu}c = -\frac{d^2}{12\mu}\nabla p,$$

que es la ley de Darcy con permeabilidad

$$(10.21) \quad k = \frac{a^2}{3} = \frac{d^2}{12}.$$

Esta es una fórmula notable. La fórmula y sus coeficientes aparecen en otros contextos de los fluidos viscosos.

EJERCICIO 10.1. Considérese el problema en 3D, tomando tubos tridimensionales de sección cilíndrica o cuadrada. Hallar las fórmulas teóricas correspondientes de la permeabilidad.

Nota 1. En los ejemplos anteriores con geometría lineal la permeabilidad es función del área de la sección elemental o poro. Pero en geometrías curvilíneas se observa que la permeabilidad disminuye con la *tortuosidad* o enrevesamiento de las trayectorias a disposición del fluido, que es un parámetro a tener en cuenta.

Nota 2. Más en general, la teoría de la *homogeneización* permite obtener leyes de Darcy para medios con estructura periódica, pasando al límite cuando el tamaño de la "célula elemental" tiende a cero (y con ello el número de células a infinito). Ello es de utilidad en el estudio de medios artificiales, como los filtros, que tienen una estructura aceptablemente periódica. En los medios naturales, con una distribución bastante caótica de tamaños, forma y disposición de los poros, un análisis estadístico del medio es necesario y la teoría correspondiente es muy difícil y está comparativamente poco avanzada. De gran importancia es la consideración de las *fisuras*, que son direcciones privilegiadas de flujo. Matemáticamente, ello se traduce en la introducción de *métodos estocásticos* y las citadas técnicas de homogeneización.

10.6 Flujo incompresible en un medio poroso

En este caso se tienen las ecuaciones (con \mathbf{u} tomada en el sentido de \mathbf{q})

$$(10.22) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla \pi,$$

donde $\pi = p + \rho g z$ es la llamada presión no hidrostática (o presión corregida). Tenemos 4 ecuaciones con 4 incógnitas (si estamos en 3D; $n + 1$ ecuaciones e incógnitas en n dimensiones de espacio). Se tiene entonces que

$$(10.23) \quad \nabla \cdot \left(-\frac{k}{\mu} \nabla \pi \right) = 0.$$

Supongamos que k y μ son constantes. Llegamos a la ecuación

$$(10.24) \quad \Delta \pi = 0.$$

Así pues la ecuación para la presión de un fluido incompresible en un medio poroso es la ECUACIÓN DE LAPLACE. En el caso en que el medio no es homogéneo si ponemos $k/\mu = a(\mathbf{x})$ queda

$$(10.25) \quad \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a(\mathbf{x}) \frac{\partial \pi}{\partial x_i} \right) = 0,$$

que es un caso de ECUACIÓN ELÍPTICA que generaliza la ecuación de Laplace y cuyo estudio forma parte de los cursos avanzados de EDPs, cf. [GT]. De existir fuentes o sumideros de fluido de intensidad $r = r(\mathbf{x}, t)$ llegamos a la ecuación más general

$$(10.26) \quad \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a(\mathbf{x}) \frac{\partial \pi}{\partial x_i} \right) = r.$$

Si las fuentes o sumideros son puntuales se representan mediante deltas de Dirac. Ésta no es la única dificultad de una teoría aparentemente simple, como veremos a continuación.

10.7 Filtración en un dique. Problema de frontera libre

El ejemplo más típico de aplicación del modelo precedente sucede cuando tratamos de describir el proceso de filtración del agua de un embalse a través de la pared del dique que lo cierra. Se trata evidentemente de un caso de filtración de un fluido incompresible (el agua) a través de un medio poroso (el cemento). Para más sencillez tomaremos una geometría simplificada, el “dique rectangular”, y suponemos un problema bidimensional en variables espaciales (x, z) , es decir ignoramos la anchura del frente del dique que suponemos tan

grande que no afecta esencialmente a los cálculos. El eje x está situado horizontalmente perpendicular al dique, de forma que la semirrecta $x < 0$ corresponde al embalse, el segmento $0 < x < a$ a la pared del dique y la semirrecta $x > a$ al desagüe exterior que también puede ser otro embalse. Suponemos además un lecho inferior impermeable horizontal situado en $z = 0$ y que el dique tiene una altura $L > 0$. Por último nos restringimos a describir el estado estacionario.

La situación es (en primera aproximación) trivial en las dos regiones (embalses) a ambos lados del dique. Dado que la filtración a través del dique es muy lenta, podemos suponer que la situación fuera del dique es a efectos prácticos estacionaria y por tanto la altura del agua es constante

$$(10.27) \quad z = H \quad \text{si } x < 0, \quad z = h \quad \text{si } x > a,$$

donde $0 < h < H < L$. Consecuentemente la presión viene dada por la fórmula hidrostática

$$(10.28) \quad p(x, z) + \rho gz = \rho gH + p_a \quad \text{para } x < 0, \quad 0 \leq z \leq H,$$

$$(10.29) \quad p(x, z) + \rho gz = \rho gh + p_a \quad \text{para } x > a, \quad 0 \leq z \leq h.$$

Podemos suponer que la presión atmosférica p_a es constante e incluso igualarla a cero (desplazando el origen de medición de presiones). Pasemos ahora a describir la situación en la región no trivial, el dique, para $0 < x < a$ y $0 < z < L$. Al realizar este estudio es preciso hacer una importante observación: a efectos hidrodinámicos el dique se compone de dos regiones, una región ocupada por el fluido (*región mojada*), que como resulta bastante evidente no será todo el rectángulo $R = [0, a] \times [0, L]$ sino una cierta subregión Ω , y otra región *seca*, donde supondremos con aproximación razonable que rige la presión atmosférica, $p = p_a = 0$ (que se propaga a través de los poros). Nuestro interés se circunscribe pues a la descripción del flujo en la región Ω . La variable a considerar es $\pi = p + \rho gz$, que como hemos visto en la sección anterior ha de satisfacer la ecuación

$$(10.30) \quad \Delta\pi = 0.$$

De acuerdo con la teoría de la ecuación de Laplace, si conocemos el dominio y damos datos de contorno suficientes podremos hallar π , y con ella p y \mathbf{u} . Ahora bien, la región Ω puede ser descrita de la forma

$$(10.31) \quad \Omega = \{(x, z) \in R : z \leq \phi(x)\}.$$

La curva $z = \phi(x)$, *frontera libre* del problema, es una incógnita del problema, lo mismo que son π , p y \mathbf{u} . Nos encontramos pues con un problema de dominio variable, o por usar la terminología usual, de *frontera libre*.

Procedamos ahora al examen de las condiciones de contorno que determinen unívocamente π . En los trozos de frontera fija procedemos de la forma usual e imponemos condiciones

del tipo Dirichlet o Neumann. A través de la separación de los medios aplicaremos la ley de continuidad de la presión. Así, en la pared vertical izquierda, $\Gamma_1 = \{x = 0, 0 \leq z \leq H\}$, impondremos la continuidad de la presión a través del cambio de medio, lo que implica que

$$(10.32) \quad \pi(0, z) = \rho g H \quad \text{para } 0 \leq z \leq H.$$

Esto también nos dice que $\phi(0) = H$. En la pared izquierda, $\Gamma_2 = \{x = a, 0 \leq z \leq H\}$, tendremos por un razonamiento análogo

$$(10.33) \quad \pi(a, z) = \rho g h \quad \text{para } 0 \leq z \leq h.$$

Por otra parte hemos de prevenir la posibilidad (que se demuestra correcta) de que $\phi(a) > h$, es decir que haya una parte de pared externa mojada. En esa parte, $\Gamma_3 = \{x = a, h \leq z \leq \phi(a)\}$, la presión p es cero, de forma que

$$(10.34) \quad \pi(a, z) = \rho g z \quad \text{si } h \leq z \leq \phi(a).$$

En el fondo: $\Gamma_4 = \{0 \leq x \leq a, z = 0\}$, impondremos condiciones de flujo deslizante (o no penetración), $w = 0$, que por la ley de Darcy lleva a

$$(10.35) \quad \frac{\partial \pi}{\partial z} = 0 \quad \text{si } 0 \leq x \leq a, z = 0.$$

Finalmente, examinamos la frontera libre $\Gamma = \{(x, \phi(x))\}$. Dado que la presión por encima es cero tenemos por la hipótesis de continuidad de la presión

$$(10.36) \quad \pi = \rho g \phi(x),$$

CONDICIÓN EXTRA EN LA FRONTERA LIBRE. Hemos completado así un conjunto suficiente de condiciones de contorno que permite calcular π si Γ es conocida. Pero habíamos dicho que Γ es desconocida. Necesitamos pues nuevos datos que determinen Γ . Éstos toman la forma de una *condición de contorno extra* sobre Γ , que en este caso es la condición de flujo tangencial: \mathbf{u} ha de fluir tangente a la curva $z = \phi(x)$, o usando Darcy,

$$(10.37) \quad \frac{\partial \pi}{\partial \nu} = 0,$$

donde ν es la normal a Γ , en otras palabras $-\pi_x \phi'(x) + \pi_z = 0$. Un problema de Laplace en que damos a la vez datos de Dirichlet y Neumann está sobredeterminado y no tiene en general solución. El hecho crucial es que existe un único dominio Ω en que tal casualidad se da y este dominio es el que buscamos.

Teoría. La teoría rigurosa demuestra que el problema (10.30)-(10.37) está bien propuesto en el marco de las soluciones débiles utilizando como técnica las *desigualdades variacionales* introducidas por G. STAMPACCHIA en los años 60, cf. [KS]. La solución fue obtenida en 1972 por C. BAIOCCHI, [Ba]. Los principales resultados matemáticos pueden consultarse

en [F] o [KS]. Diversas cuestiones de unicidad en geometrías generales y para el problema de evolución fueron resueltas por nuestro colega J. CARRILLO, cf. [Ca].

Modelización y aproximación. El estudio del problema anterior ilustra el modo de operar de la matemática aplicada. Problemas cuya modelización matemática ajustada a los principios físicos conduce a dificultades inabordables se reducen mediante hipótesis razonables a problemas abordables por el análisis matemático. Estos problemas son en algunos casos resolubles por métodos ya conocidos, pero en otros casos como el presente abren nuevos campos de investigación matemática. Terminado el análisis de uno de tales modelos es preciso evaluar la adecuación de los resultados obtenidos a la situación que se describe y la justeza de las aproximaciones dentro del modelo propuesto. Si el resultado no es satisfactorio se procede a revisar la deducción, introduciendo en el modelo las mejoras necesarias a la luz de las conclusiones obtenidas y los defectos observados, lo que da lugar a un nuevo modelo y a una nueva teoría. En un proceso iterativo se obtiene ante exigencias crecientes una *jerarquía de modelos* de creciente complejidad.

Tras un somero análisis de su experiencia en la vida diaria no le costará al lector convencerse de los siguientes principios filosóficos que rigen la matemática aplicada: un modelo teóricamente más correcto puede no ser más útil, incluso nada útil, si es demasiado complejo, un buen modelo simple puede pagar con creces en intuición y eficacia de cálculo por los errores que comete, la elección del modelo óptimo es un proceso delicado que depende de la aplicación prevista.

EJERCICIO 10.2. Hacer un listado de las hipótesis simplificadoras realizadas en la modelización anterior y examinar sus consecuencias tanto físicas como matemáticas.

10.8 Filtraciones en el suelo. Ecuación de Boussinesq

Modelización. Examinemos ahora la teoría de la filtración de un líquido (en el caso típico, agua) a través de un estrato poroso en régimen no estacionario. De nuevo impondremos hipótesis simplificadoras, a saber:

- 1) el estrato, de altura H , se asienta sobre un lecho impermeable horizontal que suponemos es $z = 0$,
- 2) ignoramos la variable transversal y , y
- 3) la masa de agua que se filtra ocupa una región del tipo

$$(10.38) \quad \Omega = \{(x, z) \in R : z \leq h(x, t)\}.$$

Éste es un modelo de evolución. Se tiene por supuesto $0 \leq h(x, t) \leq H$ y la frontera libre h es también una incógnita del problema. En estas condiciones llegamos aún a un sistema de 3 ecuaciones con incógnitas u , w y p en un dominio variable, innecesariamente complicado: ecuación para la conservación de la masa de un fluido incompresible más las

dos ecuaciones de Euler para la conservación del impulso en x y z , todo ello junto con las condiciones iniciales y de contorno.

El cálculo práctico es mucho más sencillo tras unas simplificaciones que se adaptan bien a la realidad. Para ello introducimos la *hipótesis de pequeña inclinación*, es decir suponemos que h tiene pequeños gradientes, lo que se traduce en que el flujo tiene velocidad casi horizontal $\mathbf{u} \sim (u, 0)$, de forma que en la componente vertical de las ecuaciones del impulso

$$\rho \left(\frac{du_z}{dt} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_z \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g,$$

se desprecia el término inercial (el primer miembro) e integrando en z se tiene en primera aproximación $p + \rho g z = \text{constante}$. Calculamos esta constante en la superficie libre $z = h(x, t)$ en que $p = 0$ para obtener

$$(10.39) \quad p = \rho g (h - z).$$

En otras palabras, la presión se determina por la *aproximación hidrostática* y nos resulta un gradiente de presiones vertical en primera aproximación. El lector objetará que este método no es exacto y tendrá razón. Pero habrá de admitir que la aproximación comete errores mínimos a la hora de calcular la altura $h(x, t)$, que es nuestro objetivo, y simplifica el sistema hasta hacerlo fácilmente integrable. Este difícil equilibrio es precisamente el meollo de la modelización.

Reescribamos ahora la ley de conservación de masa. Tomamos una sección $S = (x, x + a) \times (0, C)$. Se tiene

$$(10.40) \quad m \frac{\partial}{\partial t} \int_x^{x+a} \int_0^h dy dx = - \int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl,$$

donde m es la porosidad del medio, fracción de volumen disponible para el paso del fluido, y \mathbf{u} es la velocidad dada por la ley de Darcy

$$(10.41) \quad \mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla (p + \rho g z).$$

En la superficie lateral derecha $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \approx (u, 0) \cdot (1, 0) = u$ que es $-(k/\mu)p_x$, mientras en la izquierda da $-u$. Utilizando la fórmula para p y diferenciando en x se tiene

$$(10.42) \quad m \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\rho g k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} h dz.$$

Obtenemos así la *ecuación de Boussinesq*

$$(10.43) \quad h_t = \kappa (h^2)_{xx}$$

con la constante $\kappa = \rho g k / 2m\mu$. Esta ecuación fundamental en el estudio del fluir de aguas subterráneas fue propuesta por J. BOUSSINESQ en 1903. Es una variante no lineal de la

ecuación del calor. Hemos realizado la proeza de simplificar el problema consistente en un sistema de ecuaciones planteado en un dominio variable obteniendo una sola ecuación que determina la frontera libre. A partir de h calculamos la presión p mediante (10.39) y luego la velocidad \mathbf{u} mediante la ley de Darcy.

La ecuación de Boussinesq se generaliza a varias dimensiones de espacio como

$$(10.44) \quad h_t = \kappa \Delta(h^2).$$

En dos dimensiones representa el movimiento de una capa de agua sobre un lecho impermeable horizontal sin la hipótesis de simetría a lo largo del eje z . Cuando existen en el estrato entradas de agua (por recarga, natural o artificial) o salidas (por bombeo), la ecuación toma la forma

$$(10.45) \quad h_t = \kappa \Delta(h^2) + f,$$

donde la función $f(x, z, t)$ refleja estos efectos, siendo positiva la contribución de la recarga, negativa la del bombeo, $f = R - P$. En un contexto idealizado podemos suponer efectos puntuales, lo que da lugar a masas de Dirac, con la consiguiente dificultad matemática.

Notas. 1) La hipótesis de pequeña inclinación, con la consiguiente fórmula hidrostática para la presión, es atribuida al científico francés DUPUIT, [Du]. Como hemos visto, implica que las líneas equipotenciales son verticales, lo que es experimentalmente correcto salvo en situaciones extremas. La *aproximación de Dupuit* es un útil fundamental en el estudio de los flujos de aguas subterráneas, pues el sistema original es de muy difícil análisis.

2) Nótese el curioso hecho de que hemos encontrado en un problema de filtración de fluidos el mismo tipo de ecuación del calor no lineal que encontramos en el transporte de calor a altas temperaturas, cf. capítulo 4, un contexto totalmente distinto. De nuevo vamos a encontrar tal modelo con exponente general a continuación en el estudio de los fluidos compresibles. Una prueba más de la versatilidad de los modelos matemáticos.

EJERCICIO 10.3. Escribir el sistema completo de ecuaciones de la filtración en un estrato horizontal y sus condiciones adicionales.

EJERCICIO 10.4. Deducir la ecuación (10.44) con $h = h(x, y, t)$ cuando se considera un estrato horizontal tridimensional.

10.9 Fluido compresible en un medio poroso

Modelización. Utilizamos las leyes de los medios porosos para describir el flujo de un gas en un medio poroso despreciando la gravedad. Se tienen las ecuaciones

$$(10.46) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(m\rho) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla p. \end{cases}$$

Éste es un sistema aún indeterminado. Lo cerramos mediante una hipótesis termodinámica, que en el caso más simple es una γ -ley para el gas:

$$(10.47) \quad p = c\rho^\gamma, \quad \gamma \geq 1.$$

Recordemos que $\gamma = 1$ para procesos isotermos y $\gamma > 1$ para procesos adiabáticos. En los gases podemos despreciar el término de gravedad. Con m , k y μ constantes queda:

$$(10.48) \quad m \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \frac{kc}{\mu} \nabla \cdot (\rho \nabla \rho^\gamma),$$

$$(10.49) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{ck\gamma}{m\mu(\gamma+1)} \Delta(\rho^{\gamma+1}).$$

Las constantes no influyen ya que podemos hacerlas desaparecer por cambio de escala en las variables. Así llegamos a

$$(10.50) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta(\rho^m).$$

Se tiene $m = \gamma + 1 > 1$. En el caso isotermo $\gamma = 1$ de modo que $m = 2$ y volvemos a encontrar la ecuación de Boussinesq. En el caso adiabático tenemos $\gamma \approx 1,4$ de modo que $m \approx 2,4$, aún mayor. Desde el punto de vista matemático no hay ningún inconveniente en tomar un m cualquiera mayor que 1 (algunas propiedades menos esenciales dependen de si $1 < m < 2$, $m = 2$ ó $m > 2$). En general esta ecuación con $m > 1$ recibe el nombre de *ecuación de los medios porosos*,

Extensión. El modelo anterior puede generalizarse aún a la llamada *ecuación de filtración*

$$(10.51) \quad u_t = \Delta \Phi(u),$$

donde Φ es una función real continua y creciente. Recuérdese que la ecuación es clasificada como tipo parabólico siempre que $\Phi'(u) > 0$. En general aparecen funciones Φ que no son estrictamente crecientes e incluso pueden tener discontinuidades de salto. Aún así se mantiene en cierto sentido el tipo parabólico ya que $\Phi'(u) \geq 0$, y se dice que la ecuación es *degenerada parabólica*.

EJERCICIO 10.5. Deducir una ecuación de filtración del tipo (10.51) con un término suplementario cuando en la derivación anterior: 1) no se desprecia el término de gravedad, 2) se supone que el gas tiene de ley barotrópica general, $p = p(\rho)$, y 3) se supone que μ es función de ρ .

Teoría. En el capítulo 17 se expondrán los principales resultados y características del análisis matemático de esta ecuación, cuyo caso $m = 2$ es la ecuación de Boussinesq de la sección precedente.

10.10 Filtración de dos fluidos inmiscibles. Ecuaciones utilizadas en la extracción de petróleo

Los problemas en medios porosos tienen una gran variedad de aplicaciones y dan lugar a diversos tipos de problemas matemáticos. Veamos a continuación un modelo multifase de interés en la ingeniería, a saber, el flujo de agua y aceite en los sedimentos petrolíferos. Más en general, el modelo se aplica al flujo de mezclas de dos fluidos inmiscibles, uno que moja y otro que no, a través de un medio poroso.

Modelización. La situación se puede describir por medio del *esquema de Muskat y Leverett* (propuesto por M. MUSKAT y M. C. LEVERETT en los años 30), que se basa en las leyes físicas siguientes:

(i) La ley de conservación de masa para las dos fases, que se escribe

$$(10.52) \quad \partial_t(m \rho_1 s_1) + \operatorname{div}(\rho_1 \mathbf{u}_1) = 0, \quad \partial_t(m \rho_2 s_2) + \operatorname{div}(\rho_2 \mathbf{u}_2) = 0,$$

donde los índices 1 y 2 corresponden respectivamente al agua y al aceite y la nueva variable s_i es la *saturación* de la fase i , $i = 1, 2$, que se define como el volumen relativo ocupado por cada fase dentro del volumen de los poros. Se tiene pues que

$$(10.53) \quad s_1 + s_2 = 1,$$

de modo que podemos tomar $s = s_1$ como incógnita y despejar $s_2 = 1 - s$. Las \mathbf{u}_i son las descargas específicas \mathbf{q}_i y m es la porosidad. Además si suponemos los fluidos aproximadamente incompresibles podemos cancelar las densidades ρ_1, ρ_2 de las ecuaciones, que quedan así para m constante:

$$(10.54) \quad m \partial_t s + \operatorname{div}(\mathbf{u}_1) = 0, \quad m \partial_t(1 - s) + \operatorname{div}(\mathbf{u}_2) = 0.$$

(ii) Una ley de Darcy generalizada

$$(10.55) \quad \mathbf{u}_1 = -\frac{K}{\mu_1} f_1(\nabla p_1 + \rho_1 g \nabla z), \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{K}{\mu_2} f_2(\nabla p_2 + \rho_2 g \nabla z),$$

donde μ_i es la *viscosidad dinámica*, p_i la *presión*, K la *permeabilidad absoluta* del medio poroso, f_i la *permeabilidad relativa*.

(iii) La relación de *capilaridad* entre las presiones

$$(10.56) \quad p_2 - p_1 = p_c, \quad p_c = \gamma \sqrt{\frac{m}{K}} J = p_0 J,$$

donde γ es la *tensión interfacial* y J es la *presión capilar* adimensional. La capilaridad es un fenómeno importante en la teoría de los fluidos en medios porosos que tiene aquí su primera aparición.

Suponemos que el medio es homogéneo y que todos los parámetros son constantes. En el modelo clásico de MUSKAT y LEVERETT de fluidos bifásicos, cf. [BER], se supone que tales funciones son universales, es decir que son funciones idénticas de la saturación s para todos los procesos en el mismo medio poroso:

$$(10.57) \quad f_1 = f_1(s), \quad f_2 = f_2(s), \quad J = J(s).$$

Tales funciones universales pueden entonces ser halladas mediante experimentos adecuados, dado que no existe una teoría que deduzca tales funciones de los principios fundamentales de la física. Este es un paso fundamental en la modelización que se da con cierta frecuencia en la ingeniería. Cuando se adopta tal aproximación al problema es pues de crucial importancia disponer de la suficiente evidencia experimental sobre las leyes constitutivas postuladas. En este caso el lector puede consultar tal evidencia en la literatura, cf. [Be], [BER].

Una vez conocidas estas funciones, el sistema de ecuaciones queda cerrado y permite en principio hallar las velocidades, presiones y saturación. Por supuesto necesitamos algunos datos iniciales y de contorno. Así se pide la condición inicial para la saturación del agua

$$(10.58) \quad s(\mathbf{x}, 0) = s_0(\mathbf{x})$$

junto con condiciones de contorno para la saturación y una de las presiones o componentes normales de las velocidades de filtración.

Transformación matemática. Ecuaciones medias. Para simplificar los cálculos despreciamos los efectos de gravedad. De las ecuaciones (10.54)-(10.56) se obtiene un sistema de ecuaciones para un *fluido ficticio medio* que se mueve con velocidad

$$(10.59) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2.$$

La presión media es definida como

$$(10.60) \quad P = p_1 F(s) + p_2(1 - F(s)) - \int_s^1 p_c(s) F'(s) ds,$$

con

$$(10.61) \quad F(s) = \frac{f_1(s)}{f_1(s) + \mu f_2(s)}, \quad \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

en vez de la elección más natural, $\hat{p} = p_1 s + p_2(1 - s)$. La expresión (10.60) es complicada pero resulta ser la elección conveniente para continuar el cálculo. La *función de flujo fraccional* $F(s)$ tiene una forma característica en S con un punto de inflexión, y derivadas con cero múltiple en $s = s_*$ y $s = s^*$. Entonces se tiene que

$$p_1 = P + \int_s^1 p_c(s) F'(s) ds - p_c(s)(1 - F(s)),$$

$$p_2 = P + \int_s^1 p_c(s) F'(s) ds + p_c(s) F(s).$$

Llegamos así a las ecuaciones para las variables medias. De (10.54) se sigue que \mathbf{u} es incompresible

$$(10.62) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

De (10.55), (10.56) y (10.60) se deriva una “ley media de Darcy”

$$(10.63) \quad \mathbf{u} = -K\phi(s)\nabla P, \quad \phi(s) = \frac{f_1}{\mu_1} + \frac{f_2}{\mu_2}.$$

A ello se añade la ley de evolución para la saturación que toma la forma

$$(10.64) \quad \partial_t(m s) + \operatorname{div}(F(s)\mathbf{u}) = \frac{K p_0}{\mu_2} \Delta \Phi(s),$$

especie de ecuación del calor no lineal, más precisamente una ecuación de filtración con convección, donde la no linealidad

$$(10.65) \quad \Phi(s) = - \int_0^s F(\xi) f_2(\xi) J'(\xi) d\xi$$

es una función monótona no decreciente, idénticamente igual a cero para $0 \leq s \leq s_*$, que tiene múltiples derivadas nulas en $s = s_*$ y $s = s^*$. De este sistema podemos eliminar \mathbf{u} del modo siguiente. De (10.62) y (10.63) se deduce que

$$(10.66) \quad \operatorname{div}(K\phi(s)\nabla P) = 0.$$

Por otra parte, de (10.63) y (10.64) se tiene que

$$(10.67) \quad \partial_t(m s) = \operatorname{div}\left[\frac{K f_1}{\mu_1} \nabla P\right] + \frac{K p_0}{\mu_2} \Delta \Phi(s).$$

Queda pues reducido el problema a resolver el sistema (10.66), (10.67) para P y s , denominado *sistema saturación-presión*, que combina ecuaciones de tipo elíptico y parabólico degeneradas.

Situación límite. Normalizando la función Φ y pasando a variables adimensionales, de modo que

$$(10.68) \quad \varphi(s) = \frac{\Phi(s)}{\Phi(s^*)}, \quad \mathbf{u} = \frac{L}{T} \mathbf{V}, \quad \theta = \frac{t}{T}, \quad \xi = \frac{\mathbf{x}}{L},$$

reducimos el sistema (10.62), (10.64) a la forma

$$(10.69) \quad m \frac{\partial s}{\partial \theta} + \mathbf{V} \cdot \nabla F(s) = \varepsilon \Delta \varphi(s),$$

$$(10.70) \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0,$$

donde los operadores ∇ y Δ son expresados vía variables adimensionales y el parámetro adimensional ε está determinado como

$$(10.71) \quad \varepsilon = \frac{Kp_0T}{\mu_2L^2} \Phi(s^*).$$

Las estimaciones muestran que ε es un parámetro pequeño lo que da lugar a capas límite. En el resto del dominio tendremos en el límite $\varepsilon = 0$ una ecuación hiperbólica de primer orden del tipo

$$(10.72) \quad m \frac{\partial s}{\partial \theta} + \mathbf{V} \cdot \nabla F(s) = 0,$$

como las encontradas en la cinética de gases. Se puede ver entonces (10.66) como una regularizada por viscosidad.

Caso de velocidad media nula. En circunstancias especiales se puede suponer que la velocidad media es nula, como en los flujos que proceden por *embebimiento capilar*. Entonces la ecuación (10.67) queda en la forma

$$(10.73) \quad \partial_t(m s) = \frac{Kp_0}{\mu_2} \Delta \Phi(s),$$

que es otra forma de la *ecuación de filtración* aparecida en la sección anterior.

REFERENCIAS: [BER], [CJ], [EW1], [GMT].

10.11 Ecuaciones del medio no saturado

Queremos ahora analizar un tipo de flujo bifásico en que podemos simplificar notablemente el planteamiento matemático, dada la diferencia de comportamiento de los dos medios. Se trata de un problema que se origina en estudio del flujo de aguas subterráneas, a saber, la filtración de aguas en el medio no saturado. El flujo de agua en los acuíferos se suele distribuir en dos zonas diferenciadas, una inferior llamada *zona saturada* en que el medio poroso está completamente ocupado por el agua y de cuya descripción nos hemos ocupado, y una superior llamada la *zona no saturada* en que coexisten el aire y el agua. Ésta última es una zona de gran importancia para las ciencias aplicadas porque en ella suceden fenómenos físicos, químicos y biológicos de gran interés para la vida.

Modelización. Se desea describir una filtración no estacionaria considerando al agua como incompresible. Despreciamos los posibles efectos energéticos debidos a diferencias de temperatura. La coexistencia de ambas fases da lugar a fenómenos de diferencia de presión en las interfases entre ambos medios, la presión capilar, de modo que, como ya hemos visto,

$$(10.74) \quad p_{aire} - p_{agua} = p_c$$

y $p_c > 0$ depende de las curvaturas del menisco formado. Se sigue de ello que la presión intersticial es menor que la atmosférica. A la hora de describir el medio se introduce la variable θ , contenido de agua del medio, que es el tanto por ciento de agua en cada volumen elemental representativo

$$(10.75) \quad \theta = \frac{\text{Volumen de agua en un VERMP}}{\text{Volumen total del VERMP}}$$

y se relaciona con la saturación de agua por la fórmula

$$(10.76) \quad s = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}$$

con θ_s contenido de humedad del medio saturado y θ_r humedad en saturación irreductible. A efectos matemáticos la diferencia no es esencial. Evidentemente, en el medio no saturado $0 < \theta < 1$. De acuerdo con las hipótesis fundamentales del medio continuo de que hablamos en las secciones 1.1 y 10.4, suponemos idealmente que θ es una función continua definida en todo el medio no saturado. Se tiene la ley de continuidad

$$(10.77) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = r,$$

donde r es un posible término de fuente o sumidero. Tenemos además una ley de Darcy

$$(10.78) \quad \mathbf{q} = -K(\theta)\nabla H, \quad H = -\Phi + z,$$

donde $K(\theta)$ es la *conductividad hidráulica*, H es el *potencial total*, que es suma del *potencial capilar de succión* $-\Phi$ y del *potencial gravitacional*. El sistema se cierra con una ley de dependencia entre Φ y s llamada *curva de retención*,

$$(10.79) \quad s = F(\Phi),$$

derivada del estudio de la influencia de las presiones capilares, que junto con (10.76) permite relacionar θ y Φ . Así se llega a **ecuación de Richards**

$$(10.80) \quad \frac{\partial \theta(\Phi)}{\partial t} = \nabla \cdot (K(\theta(\Phi)) \nabla \Phi) + \frac{\partial}{\partial z}(K(\theta(\Phi))) + r,$$

que es una generalización de la ecuación de filtración (10.51), la cual se obtiene cuando se desprecia el término convectivo de gravedad, el término fuente y escribimos Φ en función de θ :

$$(10.81) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (K(\theta) \nabla \Phi(\theta)) = \nabla \cdot (D(\theta) \nabla \theta) = \Delta F(\theta),$$

con $D(\theta) = K(\theta)\Phi'(\theta)$ y $F'(\theta) = D(\theta)$. Con respecto al tratamiento de los flujos bifásicos que se ha expuesto en la sección precedente, la ecuación de Richards puede verse como un límite cuando suponemos que el aire está a presión constante (atmosférica), $p_1 = 0$.

El concepto de potencial capilar para medios no saturados fue introducido por BUCKINGHAM, físico americano, en 1907. La definición del potencial total como suma del potencial del potencial capilar y del gravitacional se debe a L. RICHARDS, 1931, quien escribió el sistema de ecuaciones.

REFERENCIAS: [Be], [R], [Sm].

10.12 Transporte de contaminantes

Veamos para terminar un sistema simple que describe el transporte de un contaminante disuelto en agua que fluye a través de un medio poroso (el suelo) en régimen saturado. En condiciones estacionarias tenemos las ecuaciones de conservación de masa y de Darcy para el flujo de agua

$$(10.82) \quad \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = F, \quad \mathbf{u} = -\frac{K}{\mu}(\nabla p - \rho g \nabla z),$$

donde las notaciones son como en secciones precedentes, con F una fuente o sumidero de fluido. El transporte de contaminante disuelto en el agua está gobernado por una ecuación de difusión que escribimos en términos de la variable c , concentración de contaminante:

$$(10.83) \quad \frac{\partial(\theta c)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} c) - \nabla \cdot (\theta \mathbf{D} \nabla c) + \beta \theta c = G(c),$$

Aquí $\theta = m \rho$ con m la porosidad, \mathbf{D} es el tensor de dispersión, β es la velocidad de reacción y G es un término fuente/sumidero. El sistema se resuelve añadiendo condiciones iniciales y de contorno adecuadas.

Para más detalles ver [Ew2], también [BV]. Estas referencias discuten los métodos numéricos empleados en la práctica.

10.13 Sistemas con interacción flujo-energía

Como es de rigor en la mecánica de fluidos compresibles, las ecuaciones dinámicas han de ser acopladas con las leyes termodinámicas para obtener un sistema completo de ecuaciones que describa los flujos cuando la variación de temperaturas y presiones implica que existe una interacción no despreciable entre el transporte de masa y el de energía. Planteamos a continuación un modelo que describe tal interacción. Tomamos la ley de conservación de masa usual

$$(10.84) \quad \frac{\partial}{\partial t}(m \rho) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

y la ley de Darcy

$$(10.85) \quad \mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla P,$$

y les añadimos la ley de conservación de la energía

$$(10.86) \quad (\rho C_p) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T),$$

donde $T(x, t)$ es el campo de temperaturas; C_p es el calor específico a presión constante y λ es la conductividad térmica y ambos pueden ser funciones de T . Finalmente, el sistema

se cierra mediante la ley de estado

$$(10.87) \quad P = \rho R T,$$

donde R es la constante de los gases. Este modelo es de utilidad en la industria aeronáutica y espacial para describir el flujo compresible con transferencia de calor en un medio poroso sometido a presurización y despresurización. Se supone por mor de la simplicidad que los materiales son isotrópicos, homogéneos y no deformables y que los gases son ideales.

Existen asimismo modelos incompresibles en que la ley de conservación (10.84) se escribe $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ y el acoplamiento entre la ecuación de la energía y la ley de Darcy sucede a través de la dependencia de los parámetros, especialmente μ , respecto a la temperatura, quedando por ejemplo en forma normalizada

$$(10.88) \quad \mu(T) \mathbf{u} = -K (\nabla p - \text{Ra} \rho(T) \mathbf{e}_z),$$

donde Ra es el número de Rayleigh de la filtración y \mathbf{e}_z es el vector unitario vertical.

REFERENCIA: [BPB].

10.14 Límites de validez de la ley de Darcy

La ley de Darcy es una ley experimental y su deducción racional sucede bajo hipótesis de gran simplificación. Siendo sus aplicaciones variadas es natural que los estudiosos de los fluidos se pregunten por sus límites de validez. Se descubre que ello depende de los valores relativos de la velocidad, la viscosidad y el tamaño medio de los granos, cantidades que se combinan para dar un número de Reynolds adaptado al flujo en un conducto poroso. según la fórmula

$$(10.89) \quad \text{Re} = \frac{a \rho u}{\mu},$$

siendo a el tamaño medio de los granos y $u = |\mathbf{u}|$, cf. (6.14). Se observan entonces fuertes desviaciones respecto a la dependencia lineal de \mathbf{q} respecto a $\nabla \pi$ para valores de Re desde 100 en adelante, que se suelen explicar por la aparición de un régimen turbulento. Se han propuesto entonces fórmulas del tipo

$$(10.90) \quad \nabla \pi = -\frac{\mu}{k} f(\text{Re}, m) \mathbf{u}$$

en que $f \sim c$ para $\text{Re} \sim 0$ mientras $f \sim u$ para $\text{Re} \rightarrow \infty$ (ley cuadrática del flujo turbulento). Un ejemplo es la llamada ley de FORCHHEIMER

$$(10.91) \quad -\frac{k}{\mu} \nabla p = \mathbf{u} + \frac{\beta k^{1/2} \rho}{\mu} u \mathbf{u}.$$

De hecho, las anomalías empiezan para Re del orden de 10 en adelante, zona de transición entre el flujo laminar y el turbulento. Por el contrario, para Re menores el flujo es

laminar, las fuerzas viscosas predominan y la ley de Darcy describe perfectamente al flujo. Por último, en el extremo inferior del rango de números de Reynolds, para $\text{Re} \sim 0$, vuelven a presentarse anomalías en forma de un gradiente hidráulico mínimo por debajo del cual el flujo es prácticamente nulo. La correspondencia $\mathbf{u} \mapsto \nabla\pi$ tiene la forma de una discontinuidad de salto en $\mathbf{u} = 0$.

REFERENCIAS: [BER], [Be].

Comentario final

Cuando estos problemas fueron formulados en clave matemática en la primera mitad del siglo pasado faltaban los métodos teóricos y prácticos para atacar tal tipo de dificultades, y sólo los avances de las matemáticas a lo largo del siglo los han hecho accesibles. Es de señalar que los problemas de la mecánica de fluidos como los que estamos apuntando han sido una motivación importante en el desarrollo de diversas ramas de las matemáticas, notablemente las Ecuaciones Diferenciales, el Análisis Funcional y el Cálculo Numérico, y han dado además lugar a subdisciplinas con gran vigor como los Problemas de Frontera Libre.

Referencias para el capítulo

SOBRE LOS FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS

- [BER] G.I. BARENBLATT, V.M. ENTOV, V.M. RYZHIK, “Flow of fluids through natural rocks”, Kluwer Academic Publ. (1990).
- [Be] J. BEAR, “Dynamics of Fluids in Porous Media”, Dover, New York, 1972.
- [BV] J. BEAR, A. VERRUIJT, “ Modeling ground-water flow and pollution”, D. Reidel Pub. Co., Dordrecht, 1987.
- [CJ] G. CHAVENT, J. JAFFRE, “Mathematical models and finite elements for reservoir simulation. Single phase, multiphase and multicomponent flows through porous media”, Studies in Contemporary Mathematics and its Appl. **17**, North-Holland Publ. Co., 1986.
- [Ew1] R. EWING, “The mathematics of reservoir simulation”, Frontiers in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1983.
- [Ew2] R. EWING, *Computational Sciences in Environmental Applications*, en “Computational Science for the XXI Century”, M.O. Bristeau et al. eds., John Wiley 1997. Pp. 250-259.
- [GMT] G. GAGNEUX, M. MADAUNE-TORT, “Analyse mathématique des modèles non linéaires de l’ingénierie pétrolière”, Springer Vlg, Berlin, 1996.
- [Mu] M. MUSKAT, “The flow of homogeneous fluids through porous media”, McGraw-Hill, New York, 1939.
- [PK] P. YA. POLUBARINOVA-KOCHINA, “Theory of Ground Water Movement”, Princeton Univ. Press, Princeton, 1962.

SOBRE EL PROBLEMA DEL DIQUE

- [B] C. BAIOCCHI, *Su un problema a frontiera libera connesso a questioni di idraulica*, Ann. mat. Pura Appl., 92 (1972), pp. 107-127.
- [Ca] J. CARRILLO, *An Introduction to Free Boundary Problems*, en “Current Trends in Applied Mathematics”, M.A. Herrero y E. Zuazua eds., Editorial Univ. Complutense, 1996.
- [F] A. FRIEDMAN, “Variational Principles and Free Boundary Problems”, Wiley Interscience, New York, 1982.

[KS] D. KINDERLEHER, G: STAMPACCHIA, “An Introduction to Variational Inequalities and their Applications”, Academic Press, New York, 1980.

SOBRE LA TEORÍA DE ECUACIONES

[GT] D. GILBARG, N.S. TRUDINGER, “Elliptic Partial Differential Equations of Second Order”, Springer-Verlag, New York, 1983.

REFERENCIAS HISTÓRICAS

[Dr] H. DARCY, “Les fontaines publiques de la ville de Dijon”, V. Dalmont, Paris, 1856, pp. 305-401.

[R] L. RICHARDS, *Capillary conduction of liquids in porous media*, Physics **1** (1931), pp. 318-333.

Resumen

- Nuevas variables y conceptos:

volumen elemental representativo del medio poroso: VERMP.

Permeabilidad: k , K , se mide en cm^2 (sistema c.g.s), en darcy = $9.87 \times 10^{-9} cm^2$.

porosidad: m , $0 \leq m \leq 1$.

descarga específica: q .

saturación: s , $0 \leq s \leq 1$.

potencial hidráulico: Φ .

- Ecuaciones:

Ley de Darcy general: $\mathbf{q} = -\frac{k}{\mu}(\nabla p + \rho g \nabla z)$, $\mathbf{q} = -\frac{K}{\mu}\nabla\Phi$.

Ecuación de Boussinesq: $h_t = \kappa \Delta(h^2)$, $h_t = \kappa \Delta(h^2) + f$.

Ecuación de los medios porosos: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta(\rho^m)$.

Ecuación de filtración: $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta(\Phi(u))$.

Ecuación de Richards: $\frac{\partial \theta(\Phi)}{\partial t} = \nabla \cdot (K(\theta(\Phi)) \nabla \Phi) + \frac{\partial}{\partial z}(K(\theta(\Phi))) + r$.

Sistema saturación-presión:

$$\begin{cases} \partial_t(m s) = \operatorname{div} \left[\frac{K f_1}{\mu_1} \nabla P \right] + \frac{K p_0}{\mu_2} \Delta \Phi(s), \\ \operatorname{div} (K \phi(s) \nabla P) = 0. \end{cases}$$