

LAS ECUACIONES DE LA FILTRACION DE FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS

JUAN LUIS VAZQUEZ
DEPTO. DE MATEMÁTICAS
UNIV. AUTÓNOMA DE MADRID
28049 MADRID, SPAIN

RESUMEN

El artículo es una aproximación a los problemas matemáticos de la teoría de los flujos en medios porosos, presentada desde el punto de vista de la matemática aplicada y enfocada hacia la investigación actual. Consta de dos capítulos, uno centrado en la modelización, el otro en algunos aspectos de la teoría matemática.

Más en concreto, en el primer capítulo se considera la descripción mecánica de los flujos a través de medios porosos. Se sustituye la ley dinámica usual de Navier-Stokes por una ley de origen experimental, la llamada ley de Darcy, que tiene en cuenta la interacción con el medio a través del cual fluye el fluido. Se estudian diversas aplicaciones, se deducen los modelos adecuados y se formulan los correspondientes problemas matemáticos cerrados. Hemos considerado útil hacer un amplio elenco de los problemas que aparecen con mayor frecuencia en la literatura aplicada y en la investigación. El lector no especializado es invitado a seleccionar los modelos más de su gusto, quizá los primeros, que son conceptualmente más simples.

En el segundo capítulo se estudian algunas de las propiedades matemáticas de uno de los modelos más representativos y estudiados, la llamada “ecuación de los medios porosos”, lo que permite discutir los conceptos de solución generalizada, régimen autosemejante y frontera libre. Se presentan algunas de las líneas de investigación matemática.

Siendo el presente un campo en plena actividad, existen sin duda multitud de aspectos de interés que escapan a estas notas y a los conocimientos del autor. El texto se ha orientado más hacia la presentación y coherencia de la teoría matemática que hacia el análisis de su efectividad y en el cálculo concreto, aspectos que en ningún modo deben ser descuidados y que el lector habituado al estilo de trabajo e intereses de la ingeniería echará en falta. En todo caso el autor agradece los comentarios y sugerencias y espera que el texto sea útil como invitación a lecturas más detalladas y profundas.

Capítulo 1

ECUACIONES DE LOS MEDIOS POROSOS

1.1 Introducción

La ecuación de Navier-Stokes es la ley fundamental que describe la dinámica de los fluidos viscosos más usuales, los fluidos newtonianos, y junto con las leyes de conservación de masa (y de conservación de la energía y de estado si el fluido es compresible) permite describir su movimiento a partir de unas condiciones iniciales y de contorno determinadas. Esta ley se aplica a una enorme variedad de situaciones prácticas de fluidos reales. Sin embargo, no es de aplicación inmediata para describir la dinámica de los fluidos que discurren a través de medios porosos, pues el fluido avanza por los huecos que deja la estructura (o matriz) sólida y es preciso tener en cuenta la muy compleja geometría y la resistencia ofrecida por la estructura. Los fluidos en medios porosos son de gran importancia en diversos problemas de interés industrial o social, como son la extracción de petróleo o gas, el control y distribución de las aguas subterráneas, la hidráulica de los diques, los problemas de contaminación o tratamiento de residuos y la construcción de filtros de diversos usos. Dada la gran irregularidad que ofrece la matriz sólida en muchos de los ejemplos anteriores, el análisis del flujo según las leyes clásicas de los fluidos suplementadas con la interacción fluido-estructura resulta impracticable y aún irreal. Se plantea así una nueva problemática dentro de la mecánica de fluidos, a saber, hallar un procedimiento alternativo que permita describir de forma eficaz tales flujos. Pretendemos en estas notas dar unas ideas sobre el estado de la cuestión y los progresos habidos en su vertiente matemática.

La descripción del flujo en el medio poroso, que como hemos dicho es muy complicada a escala inferior a los poros (pongamos a escalas del orden de 10^{-5} cm para fijar ideas), se torna más fácil cuando se consideran escalas grandes con respecto al tamaño de los poros, pues se da un fenómeno de promedio. Por otra parte tales flujos, o filtraciones, suceden a tan pequeñas velocidades que los términos de inercia son despreciables en comparación con los de presión y viscosos. La fuerza externa es usualmente la gravedad y se tiene en cuenta

cuando el fluido es un líquido y el movimiento no es horizontal. El ingeniero francés HENRI DARCY (1803-1858), que trabajaba para el consorcio de aguas de la ciudad francesa de Dijon, propuso en 1856 una ley basada en sus experimentos en las “fuentes públicas de la villa”, como dice la memoria. Esta ley, que describe adecuadamente la dinámica del flujo de un fluido incompresible en un medio poroso, abrió el camino al análisis racional de los flujos de las aguas subterráneas y otros fluidos que fluyen a través de medios porosos. La ley ha sido ampliada posteriormente para cubrir las diversas situaciones que aparecen en la teoría de la filtración.

1.2 Ley de Darcy

Supongamos pues que un fluido incompresible, por ejemplo el agua, fluye por un medio poroso. La ley propuesta por DARCY relaciona en forma lineal las dos magnitudes fundamentales del flujo, la velocidad, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, y la caída de presión, $p(\mathbf{x}, t)$ según la fórmula

$$(1.2.1) \quad \mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla(p + \rho g z),$$

hoy día llamada **ley de Darcy**. Aquí $\mathbf{x} = (x, y, z)$ es la posición, z es la coordenada vertical, ∇ es el operador gradiente espacial, g es la aceleración de la gravedad, ρ es la densidad, aquí supuesta constante, μ es la *viscosidad dinámica*, una magnitud típica de cada fluido viscoso. Todas ellas son magnitudes estándar en el estudio de los fluidos viscosos. Por el contrario, k es un nuevo parámetro físico, típico del medio poroso, llamado *coeficiente de permeabilidad* del medio, en general se piensa en el suelo pero también puede ser un filtro artificial. Los coeficientes μ y k pueden ser en principio variables, pero es en muchos casos aceptable suponer un medio homogéneo y entonces ambos son constantes, que se determinan experimentalmente, lo cual preocupa poco al matemático aunque no así al ingeniero. Mientras que μ tiene dimensiones de $gr/cm \times sg$, k tiene dimensiones de área, se mide en cm^2 . El significado físico de k es un poco complicado, es una especie de área efectiva del poro, es extremadamente variable con el medio y su determinación es uno de los temas de debate en el estudio práctico de los fluidos en medios porosos. Tales conceptos vienen discutidos en detalle en textos como [BER], [Be], [BV], [Mu] ó [PK].

Suplementada por adecuadas leyes complementarias y condiciones iniciales y de contorno, la ley de Darcy permite plantear los principales problemas de filtración en los dominios de la ingeniería antes mencionados, en forma de sistemas cerrados de ecuaciones en derivadas parciales no lineales. Cuando estos problemas fueron formulados en clave matemática en la primera mitad de este siglo faltaban los métodos teóricos y prácticos para atacar tal tipo de problemas, que sólo los avances de las matemáticas a lo largo del siglo han hecho accesibles. Hablando más en general, es de señalar que los problemas de la mecánica de fluidos han sido una motivación importante en el desarrollo de diversas ramas de las matemáticas, notablemente las ecuaciones diferenciales, el análisis funcional

y el cálculo numérico, y han dado además lugar a subdisciplinas con gran vigor como los problemas de frontera libre.

En cuanto a la aplicación a la mecánica de fluidos, una dilatada evidencia experimental permite afirmar que la ley de Darcy sustituye ajustadamente a la de Navier-Stokes en los medios porosos aunque sólo en circunstancias adecuadas. En particular, se aplica a flujos con bajo número de Reynolds, en que los efectos de inercia son despreciables frente a los viscosos. Como es bien sabido en mecánica de fluidos, el número de Reynolds, Re , es un número adimensional que representa una especie de inverso de la viscosidad normalizado por la densidad y la velocidad y longitud típicas del medio, $\text{Re} = U l \rho / \mu$. Continuaremos esta discusión de este tema en la sección 1.14.

1.3 El experimento de Darcy

El montaje experimental consiste en una columna vertical de sección A y longitud L rellena de un medio poroso (arena) por el que se hace pasar agua. Se mide el volumen de agua Q que atraviesa la columna por unidad de tiempo y las alturas piezométricas medidas por un manómetro en los extremos de la columna, h_1 y h_2 . El famoso resultado de DARCY se expresa en la forma

$$(1.3.1) \quad Q = \frac{KA(h_1 - h_2)}{L}.$$

El punto importante de la fórmula es que K es una constante, llamada *conductividad hidráulica*. La altura piezométrica es una medida de la llamada presión no hidrostática,

$$\pi(x, t) = p(x, t) + \rho g z,$$

normalizada para que tenga dimensión de longitud, $h = \pi / (\rho g)$. Utilizando estas definiciones podemos transformar (1.3.1) a la forma (1.2.1) pues

$$(1.3.2) \quad h_1 - h_2 = \frac{\Delta\pi}{\rho g}, \quad (\Delta = \text{incremento}).$$

Se supone que el incremento varía linealmente, con lo que el *gradiente hidráulico*

$$(1.3.3) \quad J = \frac{h_1 - h_2}{L}$$

se identifica con $-\nabla\pi / \rho g$. Por otra parte, $Q/A = q$ es la llamada *descarga específica*, que es una forma de medir la velocidad media del fluido. Se llega así a (1.2.1) con

$$(1.3.4) \quad K = \frac{k \rho g}{\mu}.$$

Un montaje similar se realiza en una columna inclinada, cf. [Be], [BV].

El lector comprobará que K se mide en unidades de m/sg ó cm/sg . Como dijimos, k se mide en cm^2 en el sistema c.g.s. En honor al gran ingeniero francés en ingeniería hidráulica se utiliza como unidad el *darcy* = $9.87 \times 10^{-9} cm^2$.

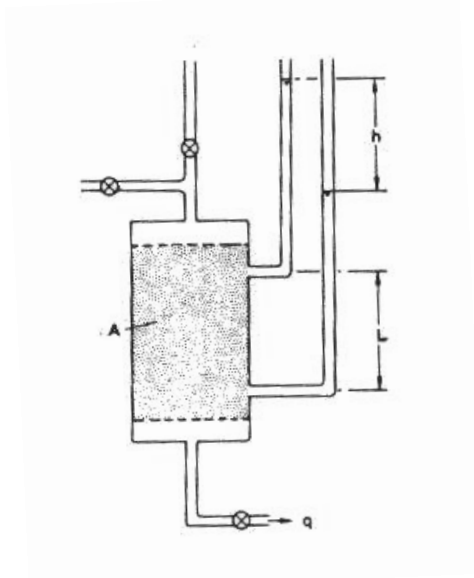


Figura 1.1. Montaje experimental para la ley de Darcy

1.4 Revisión de las magnitudes y ecuaciones básicas

Como es bien sabido, la mecánica de fluidos se basa en la hipótesis del continuo espacio-temporal y las magnitudes básicas: densidad, velocidad, presión, temperatura, etc., están definidas como promedios idealizados del comportamiento del fluido en un volumen elemental representativo del fluido, VER, que se asimila idealmente a una *partícula fluida*. En el estudio de los flujos en medios porosos la escala del VER resulta demasiado fina, de modo que se sustituyen estos promedios por los promedios en un *volumen elemental representativo del medio poroso*, VERMP, que se supone mucho mayor y abarca un número suficiente de poros para que tenga sentido el nuevo promedio.

Para empezar, se introduce una nueva magnitud media local, la *porosidad* m , que se define como el cociente del volumen ocupado por los poros V_p (o volumen vacío) por el volumen total V de un VERMP tomado en torno a un punto \mathbf{x} . Es decir, m es la fracción del volumen no ocupado por la matriz sólida y disponible para el paso del fluido. Este valor ha de entenderse como un límite cuando el VERMP $\Omega(\mathbf{x})$ es pequeño dentro del orden de magnitud que escogemos. Así pues, por definición $0 < m < 1$ y depende del punto, $m = m(\mathbf{x})$. En un medio poroso compresible depende también de t . En primera aproximación podemos suponer que la porosidad es constante, lo que simplifica notablemente las matemáticas, pero esta hipótesis no es realista en muchos casos dado

que los suelos son altamente heterogéneos. Para algunos medios porosos m es función de la presión media p .

En cuanto a las magnitudes “clásicas”, la densidad del fluido en el medio poroso se define como el cociente entre la masa de fluido M_p contenida en el espacio vacío $\Omega_p(\mathbf{x})$ de un VERMP con respecto al volumen V_p de ese espacio,

$$(1.4.1) \quad \rho(\mathbf{x}) = \frac{M_p}{V_p} = \frac{\int_{\Omega_p(\mathbf{x})} \rho'(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'}{\int_{\Omega_p(\mathbf{x})} d\mathbf{x}'},$$

donde indicamos con ρ' la magnitud densidad tal como es definida y utilizada en la mecánica de fluidos estándar (a un nivel de escala inferior, pues). De nuevo se supone que la cantidad del segundo miembro tiene un límite cuando $\Omega(\mathbf{x})$ es un VERMP pequeño en torno a \mathbf{x} . En cuanto a la velocidad, ésta es un promedio en el volumen que podemos definir mediante el flujo de masa a través de una superficie S . Se suele tomar como referente el área total de la superficie A y entonces se define la *velocidad de filtración* (*seepage flow velocity*) o *descarga específica* (*specific discharge*) mediante la fórmula

$$(1.4.2) \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}) A} \int_S \rho(\mathbf{x}') \mathbf{u}'(x') \cdot \mathbf{n}(x') dS(x'),$$

donde \mathbf{n} es la normal a la superficie. De nuevo la primas indican cantidades definidas al nivel de escala inferior. El hecho de que existe la cantidad \mathbf{q} función de \mathbf{x} y t en el sentido de límite para S pequeño en la escala de los VERMP es una hipótesis de la teoría idealizada, cuya justeza ha de ser comprobada experimentalmente. También se utiliza la velocidad intrínseca \mathbf{v} que está referida al área A_p ocupada por los poros,

$$(1.4.3) \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}) A_p} \int_S \rho(\mathbf{x}') \mathbf{u}'(x') \cdot \mathbf{n}(x') dS(x').$$

Recordemos que ambas son conceptos medios y no representan la velocidad de ninguna partícula (incluso en el sentido de partícula fluida habitual en mecánica de fluidos). Entre ambas velocidades se tiene la relación

$$(1.4.4) \quad \mathbf{q} = m \mathbf{v},$$

pues se demuestra que la relación de áreas es la misma que la relación de volúmenes. En los procesos de filtración es más conveniente utilizar \mathbf{q} , el volumen de agua que atraviesa una cierta superficie total por unidad de tiempo, y en términos de \mathbf{q} se escribe la ley de Darcy. Por otra parte, \mathbf{v} es conveniente para expresar el movimiento de las fronteras libres y otros fenómenos que se pueden ver como movimiento de “partículas”. En todo caso, para porosidad constante la diferencia es matemáticamente irrelevante, pero el lector quedará prevenido de diferencias notables de notación en los textos, que hacen su lectura laboriosa. De manera similar la presión se define como

$$(1.4.5) \quad p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V_p(\mathbf{x})} \int_{\Omega_p(\mathbf{x})} p'(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}',$$

y del mismo modo la temperatura. Con estas definiciones la conservación de la masa se deduce en la forma habitual en la mecánica de fluidos (ver referencias) y se llega a la fórmula

$$(1.4.6) \quad \frac{\partial}{\partial t}(m \rho) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) = 0,$$

con la novedad de la m . Esta ley básica admite una variante de interés práctico cuando existen fuentes o sumideros de fluido distribuidos, de intensidad $r = r(\mathbf{x}, t)$. Entonces

$$(1.4.7) \quad \frac{\partial}{\partial t}(m \rho) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) = r.$$

A la ley de conservación de masa se añade la ley dinámica de Darcy. Esta, originalmente formulada para *fluidos incompresibles*, ha sido extendida a los fluidos compresibles en la forma

$$(1.4.8) \quad \mathbf{q} = -\frac{k}{\mu}(\nabla p + \rho g \nabla z).$$

Esta es la forma usual con campo de fuerzas gravitatorio. Obsérvese que al ser ρ variable el último sumando toma una forma un tanto distinta de la enunciada en (1.2.1). Las leyes anteriores se escriben suponiendo que el medio es homogéneo, anisótropo e indeformable, hipótesis de gran utilidad a la hora de simplificar el problema matemático pero que no siempre se ajustan a la realidad. La falta de homogeneidad se refleja mediante la dependencia de k, μ y ρ respecto a \mathbf{x} . La falta de isotropía se tiene en cuenta en la forma más general de la ley de Darcy

$$(1.4.9) \quad \mathbf{q} = -\frac{\mathbb{K}}{\mu} \nabla \Phi$$

donde la permeabilidad es ahora un tensor $\mathbb{K} = (K_{ij})$ y Φ es el *potencial hidráulico*, que se define por integración de

$$\nabla \Phi = \nabla p - \mathbf{f},$$

con \mathbf{f} un campo de fuerzas exterior. Finalmente, la deformabilidad lleva a problemas del tipo fluido-estructura que exceden el rango de estas notas. Con todo, una primera hipótesis consiste en suponer que la porosidad depende de la presión $m = m(p)$ en forma aproximadamente lineal.

En cuanto a las magnitudes termodinámicas, necesarias para cerrar el sistema de ecuaciones en los fluidos compresibles, hemos de observar que los valores medios no cumplen las leyes derivadas anteriormente, que son no lineales, salvo que las fluctuaciones de presión y temperatura respecto a los valores medios sean pequeñas en cada elemento V_p , lo cual supondremos en lo que sigue, pero puede afectar a la validez de los razonamientos en situaciones límite.

1.5 Significado de la permeabilidad

Los investigadores han descubierto diversas fórmulas que relacionan la permeabilidad k con la geometría de la matriz sólida.

Ejemplo ilustrativo. Es relativamente fácil calcular k en el caso (tremendamente simplificado, pero aún así ilustrativo y ajustado al fenómeno) en que el medio poroso se supone formado por tubitos horizontales puestos en paralelo en dimensión 2 ó 3. El flujo laminar correspondiente es el llamado *flujo de Poiseuille*. Veamos en detalle el cálculo en 2D en un plano horizontal. Tomemos n tubos y sea $d = 2a$ el diámetro de cada tubo. Bajo la hipótesis de no turbulencia se supone una velocidad laminar del tipo

$$(1.5.1) \quad \mathbf{u} = (u, 0).$$

La incompresibilidad implica que $u_x = 0$, luego $u = u(y)$. Aplicando la ley de Navier-Stokes en su componente y se obtiene $p_y = 0$, es decir la presión ha de tener la forma $p = p(x)$. Para obtener la relación entre p y u recurrimos a la componente x de las ecuaciones del impulso que dan

$$0 = -p_x + \mu u_{yy} = 0.$$

Dadas las dependencias de p y u esto lleva a la separación de variables

$$(1.5.2) \quad p_x = \mu u_{yy} = -c, \text{ constante.}$$

Entonces, si L es la longitud del tubo y $2a$ su anchura:

$$(1.5.3) \quad p_x = -c, \quad p = -cx + c_1 \quad \text{y} \quad c = \frac{p_0 - p}{L} = -\nabla p.$$

Con datos de contorno 0 para u en $y = \pm a$ queda $u_{yy} = -c/\mu$, $u(a) = u(-a) = 0$, lo que lleva a

$$(1.5.4) \quad u = \frac{c}{2\mu}(a^2 - y^2).$$

Se obtiene pues

$$(1.5.5) \quad u_{\max} = \frac{ca^2}{2\mu}, \quad u_{\min} = 0,$$

mientras que la velocidad media (a través de todos los tubos, el esquema se repite) es

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{nd} \int u(y) dy = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \frac{c}{2\mu}(a^2 - y^2) dy \\ &= \frac{c}{2a\mu} \int_0^a (a^2 - y^2) dy = \frac{ca^2}{3\mu} = \frac{2}{3} u_{\max}. \end{aligned}$$

Con ello podemos escribir

$$(1.5.6) \quad \bar{u} = \frac{a^2}{3\mu} c = -\frac{d^2}{12\mu} \nabla p,$$

que es la ley de Darcy con permeabilidad

$$(1.5.7) \quad k = \frac{a^2}{3} = \frac{d^2}{12}.$$

Esta es una fórmula notable. La fórmula y su coeficiente aparecen en otros contextos de los fluidos viscosos.

Se invita al lector a considerar el problema en 3D, tomando tubos tridimensionales de sección cilíndrica o cuadrada y a hallar las fórmulas teóricas correspondientes de la permeabilidad.

Nota 1. En los ejemplos anteriores con geometría lineal la permeabilidad es función del área de la sección elemental o poro. Pero en geometrías curvilíneas se observa que la permeabilidad disminuye con la *tortuosidad* o enrevesamiento de las trayectorias a disposición del fluido, que es un parámetro a tener en cuenta.

Nota 2. La teoría de la *homogeneización* permite obtener leyes de Darcy para medios con estructura periódica, pasando al límite cuando el tamaño de la “célula elemental” tiende a cero (y con ello el número de células a infinito). Un trabajo pionero en esta dirección se debe a L. TARTAR, [Ta]. Ello es de utilidad en el estudio de medios artificiales, como los filtros, que tienen una estructura aceptablemente periódica. En los medios naturales, con una distribución bastante caótica de tamaños, forma y disposición de los poros, un análisis estadístico del medio es necesario y la teoría correspondiente es muy difícil y está comparativamente poco avanzada. Matemáticamente, ello se traduce en la introducción de *métodos estocásticos* junto a las citadas técnicas de homogeneización. De gran importancia es la consideración de las *fisuras*, que son direcciones privilegiadas de flujo, lo que lleva a interesantes tratamientos matemáticos.

1.6 Flujo incompresible en un medio poroso

En este caso comparativamente más simple se tienen las ecuaciones (con \mathbf{u} tomada en el sentido de \mathbf{q})

$$(1.6.1) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla \pi,$$

donde $\pi = p + \rho g z$ es la llamada presión no hidrostática (o presión corregida). Tenemos 4 ecuaciones con 4 incógnitas (si estamos en 3D; $n + 1$ ecuaciones e incógnitas en n dimensiones de espacio). Se tiene entonces que

$$(1.6.2) \quad \nabla \cdot \left(-\frac{k}{\mu} \nabla \pi \right) = 0.$$

Supongamos que k y μ son constantes. Llegamos a la ecuación

$$(1.6.3) \quad \Delta \pi = 0.$$

Así pues, la ecuación para la presión de un fluido incompresible en un medio poroso es la ECUACIÓN DE LAPLACE, la más clásica de las ecuaciones en derivadas parciales. En el caso en que el medio no es homogéneo ni isótropo, si sustituimos k/μ por $K/\mu = (a_{ij}(\mathbf{x}))$ queda

$$(1.6.4) \quad \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial \pi}{\partial x_j} \right) = 0.$$

que es un caso de ECUACIÓN ELÍPTICA que generaliza la ecuación de Laplace y cuyo estudio forma parte de los cursos avanzados de EDPs, cf. [GT]. De existir fuentes o sumideros de fluido de intensidad $r = r(\mathbf{x})$ llegamos a la ecuación más general

$$(1.6.5) \quad \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial \pi}{\partial x_j} \right) = r(\mathbf{x}).$$

Si las fuentes o sumideros son puntuales se representan mediante deltas de Dirac. Esta no es la única dificultad matemática de una teoría aparentemente simple, como veremos a continuación.

1.7 Filtración en un dique. Problema de frontera libre

El ejemplo más típico de aplicación del modelo precedente sucede cuando tratamos de describir el proceso de filtración del agua de un embalse a través de la pared del dique que lo cierra. Se trata evidentemente de un caso de filtración de un fluido incompresible (el agua) a través de un medio poroso (el cemento). Para más sencillez tomaremos una geometría simplificada, el “dique rectangular”, y suponemos un problema bidimensional en variables espaciales (x, z) , es decir ignoramos la anchura del frente del dique que suponemos tan grande que no afecta esencialmente a los cálculos. El eje x está situado horizontalmente perpendicular al dique, de forma que la semirrecta $x < 0$ corresponde al embalse, el segmento $0 < x < a$ a la pared del dique y la semirrecta $x > a$ al desagüe exterior que también puede ser otro embalse. Suponemos además un lecho inferior impermeable horizontal situado en $z = 0$ y que el dique tiene una altura $L > 0$. Por último, nos restringimos a describir el estado estacionario.

La situación es (en primera aproximación) trivial en las dos regiones (embalses) a ambos lados del dique. Dado que la filtración a través del dique es muy lenta podemos suponer que la situación fuera del dique es a efectos prácticos estacionaria y por tanto la altura del agua es constante

$$(1.7.1) \quad z = H \quad \text{si } x < 0, \quad z = h \quad \text{si } x > a,$$

donde $0 < h < H \leq L$. Consecuentemente la presión viene dada por la fórmula hidrostática

$$(1.7.2) \quad p(x, z) + \rho gz = \rho gH + p_a \quad \text{para } x < 0, 0 \leq z \leq H,$$

$$(1.7.3) \quad p(x, z) + \rho gz = \rho gh + p_a \quad \text{para } x > a, 0 \leq z \leq h.$$

Podemos suponer que la presión atmosférica p_a es constante e incluso igualarla a cero (desplazando el origen de medición de presiones). Pasemos ahora a describir la situación en la región no trivial, el dique, para $0 < x < a$ y $0 < z < L$. Al realizar este estudio es preciso hacer una importante observación: a efectos hidrodinámicos el dique se compone de dos regiones, una región ocupada por el fluido (*región mojada*), que como resulta bastante evidente no será todo el rectángulo $R = [0, a] \times [0, L]$ sino una cierta subregión Ω , y otra *región seca*, en donde supondremos con aproximación razonable que rige la presión atmosférica, $p = p_a = 0$ (pues los poros están llenos de aire). Nuestro interés se circunscribe pues a la descripción del flujo en la región Ω . La variable a considerar es $\pi = p + \rho gz$, que como hemos visto en la sección anterior ha de satisfacer la ecuación

$$(1.7.4) \quad \Delta\pi = 0.$$

De acuerdo con la teoría de la ecuación de Laplace, si conocemos el dominio y damos datos de contorno suficientes podremos hallar π , y con ella p y \mathbf{u} . Ahora bien, la región Ω puede ser descrita de la forma

$$(1.7.5) \quad \Omega = \{(x, z) \in R : z \leq \phi(x)\}.$$

La curva $z = \phi(x)$, *frontera libre* del problema, es una incógnita del problema, lo mismo que son π , p y \mathbf{u} . Nos encontramos pues con un problema de dominio variable o, por usar la terminología usual, un *problema de frontera libre*.

Procedamos ahora al examen de las condiciones de contorno que determinen unívocamente π . En los trozos de frontera fija procedemos de la forma usual e imponemos condiciones del tipo Dirichlet o Neumann. A través de la separación de los medios aplicaremos la ley de continuidad de la presión. Así, en la pared vertical izquierda, $\Gamma_1 = \{x = 0, 0 \leq z \leq L\}$, impondremos la continuidad de la presión a través del cambio de medio, lo que implica que

$$(1.7.6) \quad \pi(0, z) = \rho gH \quad \text{para } 0 \leq z \leq H.$$

Esto también nos dice que $\phi(0) = H$. En la pared derecha, $\Gamma_2 = \{x = a, 0 \leq z \leq L\}$, tendremos por un razonamiento análogo

$$(1.7.7) \quad \pi(a, z) = \rho gh \quad \text{para } 0 \leq z \leq h.$$

Por otra parte hemos de prever la posibilidad (que se demuestra correcta) de que $\phi(a) > h$, es decir que haya una parte de pared externa mojada. En esa parte, $\Gamma_3 = \{x = a, h \leq z \leq \phi(a)\}$, la presión p es cero de forma que

$$(1.7.8) \quad \pi(a, z) = \rho gz \quad \text{si } h \leq z \leq \phi(a).$$

En el fondo $\Gamma_4 = \{0 \leq x \leq a, z = 0\}$ imponemos condiciones de flujo deslizante o no penetración, es decir la componente vertical de la velocidad es nula, $w = 0$, que por la ley de Darcy lleva a

$$(1.7.9) \quad \frac{\partial \pi}{\partial z} = 0 \quad \text{si } 0 \leq x \leq a, z = 0.$$

Finalmente, examinamos la frontera libre $\Gamma = \{(x, \phi(x))\}$. Dado que la presión por encima es cero tenemos por la hipótesis de continuidad de la presión

$$(1.7.10) \quad \pi = \rho g \phi(x).$$

CONDICIÓN EXTRA EN LA FRONTERA LIBRE. Hemos completado así un conjunto suficiente de condiciones de contorno que permite calcular π si Γ es conocida. Pero habíamos dicho que Γ es desconocida. Necesitamos pues nuevos datos que determinen Γ . Estos toman la forma de una *condición de contorno extra* sobre Γ , que en este caso es la condición de flujo tangencial: \mathbf{u} ha de fluir tangente a la curva $z = \phi(x)$, o usando Darcy,

$$(1.7.11) \quad \frac{\partial \pi}{\partial \nu} = 0,$$

donde ν es la normal a Γ , en otras palabras $-\pi_x \phi'(x) + \pi_z = 0$. Un problema de Laplace en que damos a la vez datos de Dirichlet y Neumann está sobredeterminado y no tiene en general solución. El hecho crucial es que *existe un único dominio Ω en que tal casualidad se da y este dominio es el que buscamos.*

Teoría. La teoría rigurosa demuestra que el problema (1.7.4)-(1.7.11) está bien planteado en el marco de las soluciones débiles utilizando como técnica las *desigualdades variacionales* introducidas por G. STAMPACCHIA en los años 60, cf. [KS]. La solución fue obtenida en 1972 por C. BAIOCCHI, [Ba]. Los principales resultados matemáticos pueden consultarse en [F] o [KS]. Diversas cuestiones de unicidad en geometrías generales y para el problema de evolución fueron resueltas por nuestro colega J. CARRILLO, cf. [Ca].

1.8 Filtraciones en el suelo. Ecuación de Boussinesq

Modelización. Examinemos ahora la teoría de la filtración de un líquido (en el caso típico agua) a través de un estrato poroso. De nuevo imponemos hipótesis simplificadoras, a saber: 1) el estrato, de altura H , se asienta sobre un lecho impermeable horizontal que suponemos es $z = 0$, 2) ignoramos la variable transversal y y 3) la masa de agua que se filtra ocupa una región del tipo

$$(1.8.1) \quad \Omega = \{(x, z) \in R : z \leq h(x, t)\}.$$

Este es un modelo de evolución. Se tiene por supuesto $0 \leq h(x, t) \leq H$ y la frontera libre h es también una incógnita del problema. En estas condiciones llegamos aún a un

sistema de 3 ecuaciones con incógnitas u, w y p en un dominio variable, innecesariamente complicado: ecuación para la conservación de la masa de un fluido incompresible más las dos ecuaciones de Euler para la conservación del impulso en x y z , todo ello junto con las condiciones iniciales y de contorno.

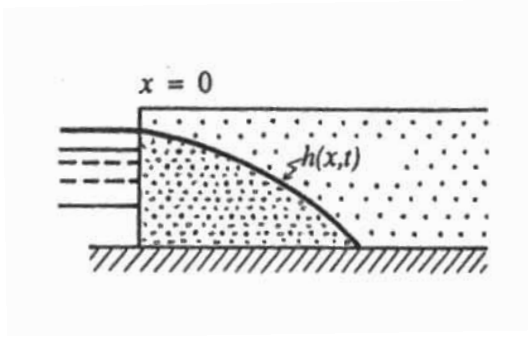


Figura 1.2. Filtración con inyección lateral

El cálculo práctico es mucho más sencillo tras unas simplificaciones que se adaptan bien a la realidad. Para ello introducimos la *hipótesis de pequeña inclinación*, es decir suponemos que h tiene pequeños gradientes, lo que se traduce en que el flujo tiene velocidad casi horizontal $\mathbf{u} \sim (u, 0)$, de forma que en la componente vertical de las ecuaciones del impulso

$$\rho \left(\frac{du_z}{dt} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_z \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g,$$

se desprecia el término inercial (el primer miembro) e integrando en z se tiene en primera aproximación $p + \rho g z = \text{constante}$. Calculamos esta constante en la superficie libre $z = h(x, t)$ en que $p = 0$ (la presión atmosférica) para obtener

$$(1.8.2) \quad p = \rho g (h - z).$$

En otras palabras, la presión se determina por la *aproximación hidrostática* y nos resulta un gradiente de presiones vertical en primera aproximación. El lector objetará que este método no es exacto y tendrá razón. Pero, si examina los resultados computados, habrá de admitir que la aproximación comete errores mínimos a la hora de calcular la altura $h(x, t)$, que es nuestro objetivo, y simplifica el sistema hasta hacerlo fácilmente integrable. Este difícil equilibrio es precisamente el meollo de la modelización. Reescribamos ahora la ley de conservación de masa. Tomamos una sección $S = (x, x + a) \times (0, C)$. Se tiene

$$(1.8.3) \quad m \frac{\partial}{\partial t} \int_x^{x+a} \int_0^h dy dx = - \int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl,$$

donde m es la porosidad del medio, fracción de volumen disponible para el paso del fluido, y \mathbf{u} es la velocidad dada por la ley de Darcy

$$(1.8.4) \quad \mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla (p + \rho g z).$$

En la superficie lateral derecha $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \approx (u, 0) \cdot (1, 0) = u$ que es $-(k/\mu)p_x$, mientras en la izquierda da $-u$. Utilizando la fórmula para p y diferenciando en x se tiene

$$(1.8.5) \quad m \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\rho g k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} h dz.$$

Obtenemos así la *ecuación de Boussinesq*

$$(1.8.6) \quad h_t = \kappa (h^2)_{xx}$$

con la constante $\kappa = \rho g k / 2m\mu$. Esta ecuación fundamental en el estudio del flujo de aguas subterráneas fue propuesta por J. BOUSSINESQ en 1903. Es una variante no lineal de la ecuación del calor. Hemos realizado la proeza de simplificar el problema consistente en un sistema de ecuaciones planteado en un dominio variable obteniendo una sola ecuación que determina la frontera libre. A partir de h calculamos la presión p mediante (1.8.2) y luego la velocidad \mathbf{u} mediante la ley de Darcy.

Extensión. La ecuación de Boussinesq se generaliza a varias dimensiones de espacio como

$$(1.8.7) \quad h_t = \kappa \Delta (h^2).$$

En dos dimensiones representa el movimiento de una capa de agua sobre un lecho impermeable horizontal sin la hipótesis de simetría a lo largo del eje z . El lector es invitado a deducir la ecuación de filtración en este caso.

Cuando existen en el estrato entradas de agua (por recarga, natural o artificial) o salidas (por bombeo), la ecuación toma la forma

$$(1.8.8) \quad h_t = \kappa \Delta (h^2) + f,$$

donde la función $f(x, z, t)$ refleja estos efectos, siendo positiva la contribución de la recarga, negativa la del bombeo, $f = R - P$. En un contexto idealizado podemos suponer efectos puntuales, lo que da lugar a masas de Dirac, con la consiguiente dificultad matemática.

Notas. 1) La hipótesis de pequeña inclinación, con la consiguiente fórmula hidrostática para la presión, es atribuida al científico francés DUPUIT, [Du]. Como hemos visto implica que las líneas equipotenciales son verticales, lo que es experimentalmente correcto salvo en situaciones extremas. La *aproximación de Dupuit* es un útil fundamental en el estudio de los flujos de aguas subterráneas, pues el sistema original es de difícil análisis.

2) Nótese el curioso hecho de que hemos encontrado en un problema de filtración de fluidos el mismo tipo de ecuación del calor no lineal que se utiliza en el transporte de calor a muy altas temperaturas, [ZR], un contexto totalmente distinto. De nuevo vamos a encontrar tal modelo con exponente general a continuación en el estudio de los fluidos compresibles. Una prueba más de la versatilidad de los modelos matemáticos.

1.9 Fluido compresible en un medio poroso

Modelización. Utilizamos las leyes de los medios porosos para describir el flujo de un gas en un medio poroso despreciando la gravedad. Se tienen las ecuaciones

$$(1.9.1) \quad \begin{cases} -\partial_t(m\rho) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla p. \end{cases}$$

Este es un sistema aún indeterminado. Lo cerramos mediante una hipótesis termodinámica, que en el caso más simple es una γ -ley para el gas:

$$(1.9.2) \quad p = c\rho^\gamma, \quad \gamma \geq 1.$$

Recordemos que $\gamma = 1$ para procesos isotermos y $\gamma > 1$ para procesos adiabáticos. En los gases podemos despreciar el término de gravedad. Con m , k y μ constantes queda:

$$(1.9.3) \quad m \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \frac{kc}{\mu} \nabla \cdot (\rho \nabla \rho^\gamma),$$

$$(1.9.4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{ck\gamma}{m\mu(\gamma+1)} \Delta(\rho^{\gamma+1}).$$

Las constantes no influyen, ya que podemos hacerlas desaparecer por cambio de escala en las variables. Así llegamos a

$$(1.9.5) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta(\rho^m).$$

Se tiene $m = \gamma + 1 > 1$. En el caso isotermo $\gamma = 1$ de modo que $m = 2$ y volvemos a encontrar la ecuación de Boussinesq. En el caso adiabático tenemos $\gamma \approx 1.4$ de modo que $m \approx 2.4$, aún mayor. Desde el punto de vista matemático no hay ningún inconveniente en tomar un m cualquiera mayor que 1 (algunas propiedades menos esenciales dependen de si $1 < m < 2$, $m = 2$ ó $m > 2$). En general esta ecuación con $m > 1$ recibe el nombre de *ecuación de los medios porosos*, (EMP).

Extensión. El modelo anterior puede generalizarse aún a la llamada *ecuación de filtración*

$$(1.9.6) \quad u_t = \Delta \Phi(u),$$

donde Φ es una función real continua y creciente. Recuérdese que la ecuación es clasificada como de tipo parabólico siempre que $\Phi'(u) > 0$. En general aparecen funciones Φ que no son estrictamente crecientes e incluso pueden tener discontinuidades de salto. Aún así se mantiene en cierto sentido el tipo parabólico ya que $\Phi'(u) \geq 0$, y se dice que la ecuación es *degenerada parabólica*.

Se propone al lector deducir una ecuación de filtración del tipo (1.9.6) con un término suplementario cuando en la derivación anterior: 1) no se desprecia el término de gravedad,

2) se supone que el gas tiene de ley barotrópica general, $p = p(\rho)$, y 3) se supone que μ es función de ρ .

Teoría. El segundo capítulo del presente trabajo está dedicado a exponer los principales resultados y características del análisis matemático de esta ecuación, cuyo caso $m = 2$ es la ecuación de Boussinesq de la sección precedente.

1.10 Filtración de dos fluidos inmiscibles. Ecuaciones utilizadas en la extracción de petróleo

Los problemas en medios porosos tienen una gran variedad de aplicaciones y dan lugar a diversos tipos de problemas matemáticos. Veamos a continuación un modelo multifase de interés en la ingeniería, a saber, el flujo de agua y aceite en los sedimentos petrolíferos. Más en general, el modelo se aplica al flujo de mezclas de dos fluidos inmiscibles, uno que moja y otro que no, a través de un medio poroso.

Modelización. La situación se puede describir por medio del *esquema de Muskat y Leverett* (propuesto por M. MUSKAT y M.C. LEVERETT en los años 30), que se basa en las leyes físicas siguientes:

(i) La ley de conservación de masa para las dos fases, que se escribe

$$(1.10.1) \quad \partial_t(m \rho_1 s_1) + \operatorname{div}(\rho_1 \mathbf{u}_1) = 0, \quad \partial_t(m \rho_2 s_2) + \operatorname{div}(\rho_2 \mathbf{u}_2) = 0,$$

donde los índices 1 y 2 corresponden respectivamente al agua y al aceite y la nueva variable s_i es la *saturación* de la fase i , $i = 1, 2$, que se define como el volumen relativo ocupado por cada fase dentro del volumen de los poros. Se tiene pues que

$$(1.10.2) \quad s_1 + s_2 = 1,$$

de modo que podemos tomar $s = s_1$ como incógnita y despejar $s_2 = 1 - s$. Las \mathbf{u}_i son las descargas específicas (las \mathbf{q}_i de la Sección 1.4) y m es la porosidad. Además si suponemos los fluidos aproximadamente incompresibles podemos cancelar las densidades ρ_1, ρ_2 de las ecuaciones, que quedan así para m constante

$$(1.10.3) \quad m \partial_t s + \operatorname{div}(\mathbf{u}_1) = 0, \quad m \partial_t(1 - s) + \operatorname{div}(\mathbf{u}_2) = 0.$$

(ii) Una ley de Darcy generalizada

$$(1.10.4) \quad \mathbf{u}_1 = -\frac{K}{\mu_1} f_1(\nabla p_1 + \rho_1 g \nabla z), \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{K}{\mu_2} f_2(\nabla p_2 + \rho_2 g \nabla z),$$

donde μ_i es la *viscosidad dinámica*, p_i la *presión*, K la *permeabilidad absoluta* del medio poroso, f_i la *permeabilidad relativa*.

(iii) La relación de *capilaridad* entre las presiones

$$(1.10.5) \quad p_2 - p_1 = p_c, \quad p_c = \gamma \sqrt{\frac{m}{K}} J = p_0 J,$$

donde γ es la *tensión interfacial* y J es la *presión capilar* adimensional. La capilaridad es un fenómeno importante en la teoría de los fluidos en medios porosos que tiene aquí su primera aparición.

Suponemos que el medio es homogéneo y que todos los parámetros son constantes. En el modelo clásico de MUSKAT y LEVERETT de fluidos bifásicos, cf. [BER], se supone que tales funciones son universales, es decir que son funciones idénticas de la saturación s para todos los procesos en el mismo medio poroso.

$$(1.10.6) \quad f_1 = f_1(s), \quad f_2 = f_2(s), \quad J = J(s).$$

Tales funciones universales pueden entonces ser halladas mediante experimentos adecuados, dado que no existe una teoría que deduzca tales funciones de los principios fundamentales de la física. Este es un paso fundamental en la modelización que se da con cierta frecuencia en la ingeniería. Cuando se adopta tal aproximación al problema es pues de crucial importancia disponer de la suficiente evidencia experimental sobre las *leyes constitutivas* postuladas. En este caso el lector puede consultar tal evidencia en la literatura, cf. [Be], [BER]. Una vez conocidas, el sistema de ecuaciones queda cerrado y permite en principio hallar las velocidades, presiones y saturación. Por supuesto necesitamos algunos datos iniciales y de contorno. Así se pide la condición inicial para la saturación del agua

$$(1.10.7) \quad s(\mathbf{x}, 0) = s_0(\mathbf{x})$$

junto con condiciones de contorno para la saturación y una de las presiones o componentes normales de las velocidades de filtración

Transformación matemática. Ecuaciones medias. Para simplificar los cálculos despreciamos los efectos de gravedad. De las ecuaciones (1.10.3)-(1.10.5) se obtiene un sistema de ecuaciones para un *fluido ficticio medio* que se mueve con velocidad

$$(1.10.8) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2.$$

La presión media es definida como

$$(1.10.9) \quad P = p_1 F(s) + p_2(1 - F(s)) - \int_s^1 p_c(s) F'(s) ds,$$

con

$$(1.10.10) \quad F(s) = \frac{f_1(s)}{f_1(s) + \mu f_2(s)}, \quad \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

en vez de la elección en principio más natural, $\hat{p} = p_1 s + p_2(1 - s)$. La expresión (1.10.9) es complicada pero resulta ser la elección conveniente para continuar el cálculo. La *función*

de flujo fraccional $F(s)$ es monótona no decreciente y tiene una forma característica en S con un punto de inflexión, y derivadas con cero múltiple en $s = s_*$ y $s = s^*$, $0 \leq s_* < s^* \leq 1$, $F(s_*) = 0$, $F(s^*) = 1$. Entonces se tiene que

$$p_1 = P + \int_s^1 p_c(s)F'(s) ds - p_c(s)(1 - F(s)),$$

$$p_2 = P + \int_s^1 p_c(s)F'(s) ds + p_c(s)F(s).$$

Llegamos así a las ecuaciones para las variables medias. De (1.10.3) se sigue que \mathbf{u} es incompresible

$$(1.10.11) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

De (1.10.4), (1.10.5) y (1.10.9) se deriva una “ley media de Darcy”

$$(1.10.12) \quad \mathbf{u} = -K\phi(s)\nabla P, \quad \phi(s) = \frac{f_1}{\mu_1} + \frac{f_2}{\mu_2}.$$

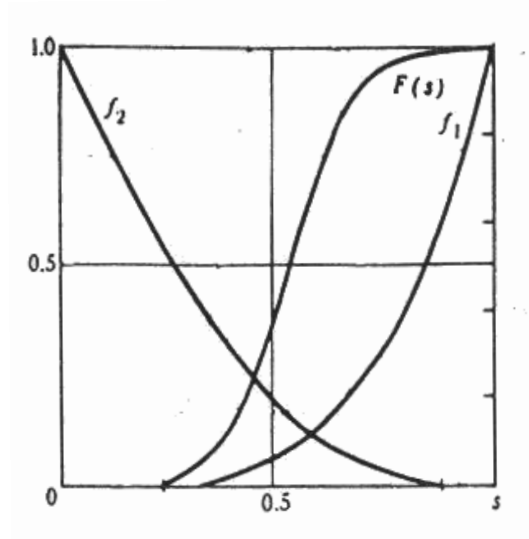


Figura 1.3. Funciones de permeabilidad relativa y función de Buckley-Leverett típicas

A ello se añade la ley de evolución para la saturación que toma la forma

$$(1.10.13) \quad \partial_t(m s) + \operatorname{div}(F(s)\mathbf{u}) = \frac{Kp_0}{\mu_2}\Delta\Phi(s),$$

especie de ecuación del calor no lineal donde la no linealidad

$$(1.10.14) \quad \Phi(s) = - \int_0^s F(\xi)f_2(\xi)J'(\xi) d\xi$$

es una función monótona no decreciente, idénticamente igual a cero para $0 \leq s \leq s_*$, que tiene múltiples derivadas nulas en $s = s_*$ y $s = s^*$. De este sistema podemos eliminar \mathbf{u} del modo siguiente. De (1.10.11) y (1.10.12) se deduce que

$$(1.10.15) \quad \operatorname{div}(K\phi(s)\nabla P) = 0.$$

Por otra parte, de (1.10.12) y (1.10.13) se tiene que

$$(1.10.16) \quad \partial_t(m s) = \operatorname{div} \left[\frac{K f_1}{\mu_1} \nabla P \right] + \frac{K p_0}{\mu_2} \Delta \Phi(s).$$

Queda pues reducido el problema a resolver el sistema (1.10.15), (1.10.16) para P y s , denominado *sistema saturación-presión*, problema matemático formidable que combina ecuaciones de tipo elíptico y parabólico degenerados.

Situación límite. Normalizando la función Φ y pasando a variables adimensionales, de modo que

$$(1.10.17) \quad \varphi(s) = \frac{\Phi(s)}{\Phi(s^*)}, \quad \mathbf{u} = \frac{L}{T} \mathbf{V}, \quad \theta = \frac{t}{T}, \quad \xi = \frac{\mathbf{x}}{L},$$

reducimos el sistema (1.10.11), (1.10.13) a la forma

$$(1.10.18) \quad m \frac{\partial s}{\partial \theta} + \mathbf{V} \cdot \nabla F(s) = \varepsilon \Delta \varphi(s).$$

$$(1.10.19) \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0,$$

donde los operadores ∇ y Δ son expresados via variables adimensionales y el parámetro adimensional ε está determinado como

$$(1.10.20) \quad \varepsilon = \frac{K p_0 T}{\mu_2 L^2} \Phi(s^*).$$

Las estimaciones muestran que ε es un parámetro pequeño lo que da lugar a capas límite. En el resto del dominio tendremos en el límite $\varepsilon = 0$ una ecuación hiperbólica de primer orden del tipo

$$(1.10.21) \quad m \frac{\partial s}{\partial \theta} + \mathbf{V} \cdot \nabla F(s) = 0,$$

como las encontradas en la cinética de gases. Se puede ver entonces (1.10.15) como una ecuación regularizada de (1.10.21) por viscosidad.

Caso de velocidad media nula. En circunstancias especiales se puede suponer que la velocidad media es nula, como en los flujos que proceden por *embebimiento capilar*. Entonces la ecuación (1.10.16) queda en la forma

$$(1.10.22) \quad \frac{\partial(m s)}{\partial t} = \frac{K p_0}{\mu_2} \Delta \Phi(s),$$

que es otra forma de la *ecuación de filtración* aparecida en la sección anterior.

REFERENCIAS: [BER], [CJ], [Ew1], [GMT].

1.11 Ecuaciones del medio no saturado

Queremos ahora analizar un tipo de flujo bifásico en que podemos simplificar notablemente el planteamiento matemático dada la diferencia de comportamiento de los dos medios. Se trata de un problema que se origina en el estudio del flujo de aguas subterráneas, a saber, la filtración de aguas en el medio no saturado. El flujo de agua en los acuíferos se suele distribuir en primera aproximación en dos zonas diferenciadas, una inferior llamada *zona saturada* en que el medio poroso está completamente ocupado por el agua y de cuya descripción nos hemos ocupado, y una superior llamada la *zona no saturada* en que coexisten el aire y el agua. Esta última es una zona de gran importancia para las ciencias aplicadas porque en ella suceden fenómenos físicos, químicos y biológicos de gran interés para la vida.

Modelización. Se desea describir una filtración no estacionaria considerando al agua como incompresible. Despreciamos los posibles efectos energéticos debidos a diferencias de temperatura. La coexistencia de ambas fases da lugar a fenómenos de diferencia de presión en las interfases entre ambos medios, la presión capilar, de modo que, como ya hemos visto,

$$(1.11.1) \quad p_{aire} - p_{agua} = p_c$$

y $p_c > 0$ depende de la curvaturas del menisco formado. Se sigue de ello que la presión intersticial es menor que la atmosférica. A la hora de describir el medio se introduce la variable θ , contenido de agua del medio, que es el tanto por ciento de agua en cada volumen elemental representativo

$$(1.11.2) \quad \theta = \frac{\text{Volumen de agua en un VERMP}}{\text{Volumen total del VERMP}}$$

y se relaciona con la saturación de agua por la fórmula

$$(1.11.3) \quad s = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}$$

con θ_s contenido de humedad del medio saturado y θ_r humedad en saturación irreductible. A efectos matemáticos la diferencia es inessential. Evidentemente, en el medio no saturado $0 < \theta < 1$. De acuerdo con las hipótesis fundamentales del medio continuo de que hablamos en la Sección 1.4 suponemos idealmente que θ es una función continua definida en todo el medio no saturado. Veamos ahora el sistema de ecuaciones que rigen los flujos en el medio no saturado. Se tiene la ley de continuidad

$$(1.11.4) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = r,$$

donde r es un posible término de fuente o sumidero. Tenemos además una ley de Darcy

$$(1.11.5) \quad \mathbf{q} = -K(\theta)\nabla H, \quad H = -\Phi + z,$$

donde $K(\theta)$ es la *conductividad hidráulica*, H es el *potencial total*, que es suma del *potencial capilar de succión* $-\Phi$ y del *potencial gravitacional*. El sistema se cierra con una ley de dependencia entre Φ y s llamada *curva de retención*,

$$(1.11.6) \quad s = F(\Phi),$$

derivada del estudio de la influencia de las presiones capilares, que junto con (1.11.3) permite relacionar θ y Φ . Así se llega a la *ecuación de Richards*

$$(1.11.7) \quad \frac{\partial \theta(\Phi)}{\partial t} = \nabla \cdot (K(\theta(\Phi)) \nabla \Phi) + \frac{\partial}{\partial z} K(\theta(\Phi)) + r,$$

que es una generalización de la ecuación de filtración (1.9.6), la cual se obtiene cuando se desprecia el término convectivo de gravedad, el término fuente y escribimos Φ en función de θ :

$$(1.11.8) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (K(\theta) \nabla \Phi(\theta)) = \nabla \cdot (D(\theta) \nabla \theta) = \Delta F(\theta),$$

con $D(\theta) = K(\theta)\Phi'(\theta)$ y $F'(\theta) = D(\theta)$. La formulación más detallada tiene en cuenta los flujos individuales de la fase líquida y la gaseosa y la deformación de la matriz sólida. Con respecto al tratamiento de los flujos bifásicos que se ha expuesto en la sección precedente la ecuación de Richards puede verse como un límite cuando suponemos que el aire está a presión constante (atmosférica), $p_1 = 0$.

El concepto de potencial capilar para medios no saturados fue introducido por BUCKINGHAM, físico americano, en 1907. La definición del potencial total como suma del potencial capilar y del gravitacional se debe a L. RICHARDS, 1931, quien escribió el sistema de ecuaciones.

REFERENCIAS: [Be], [G], [R], [Sm].

1.12 Transporte de contaminantes

Veamos a continuación un sistema simple que describe el transporte de un contaminante disuelto en agua que fluye a través de un medio poroso (como el suelo) en régimen saturado. En condiciones estacionarias tenemos las ecuaciones de conservación de masa y de Darcy para el flujo de agua

$$(1.12.1) \quad \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = r, \quad \mathbf{u} = -\frac{K}{\mu}(\nabla p + \rho g \nabla z),$$

donde las notaciones son como en secciones precedentes, con r una fuente o sumidero de fluido. El transporte de contaminante disuelto en el agua está gobernado por una ecuación de difusión que escribimos en términos de la variable c , concentración de contaminante:

$$(1.12.2) \quad \frac{\partial(\theta c)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} c) - \nabla \cdot (\theta \mathbf{D} \nabla c) + \beta \theta c = F(c).$$

Aquí $\theta = m \rho$ con m la porosidad, \mathbf{D} es el tensor de dispersión, β es la velocidad de reacción y F es un término fuente/sumidero. El sistema se resuelve añadiendo condiciones iniciales y de contorno adecuadas.

Para más detalles ver [Ew2], también [BV]. Estas referencias discuten los métodos numéricos empleados en la práctica.

1.13 Sistemas con interacción flujo-energía

Como es de rigor, en la mecánica de fluidos compresible las ecuaciones dinámicas han de ser acopladas con las leyes termodinámicas para obtener un sistema completo de ecuaciones que describa los flujos cuando la variación de temperaturas y presiones implica que existe una interacción no despreciable entre el transporte de masa y el flujo de energía. Planteamos a continuación un modelo que describe tal interacción. Tomamos la ley de conservación de masa usual

$$(1.13.1) \quad \frac{\partial}{\partial t}(m \rho) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

y la ley de Darcy

$$(1.13.2) \quad \mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla P,$$

y les añadimos la ley de conservación de la energía

$$(1.13.3) \quad (\rho C_p) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T),$$

donde $T(x, t)$ es el campo de temperaturas; C_p es el calor específico a presión constante y λ es la conductividad térmica y ambos pueden ser funciones de T . Finalmente, el sistema se cierra mediante la ley de estado

$$(1.13.4) \quad P = \rho R T,$$

donde R es la constante de los gases. Estos modelos son de utilidad en la industria aeronáutica y espacial para describir el flujo compresible con transferencia de calor en un medio poroso sometido a presurización y despresurización. Se supone por mor de la simplicidad que los materiales son isotrópicos, homogéneos y no deformables y que los gases son ideales.

Existen asimismo modelos incompresibles en que la ley de conservación (1.13.1) se escribe $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ y el acoplamiento entre la ecuación de la energía y la ley de Darcy sucede a través de la dependencia de los parámetros, especialmente μ , respecto a la temperatura, quedando por ejemplo en forma normalizada

$$(1.13.5) \quad \mu(T) \mathbf{u} = -\mathbf{K} (\nabla p - \text{Ra} \rho(T) \mathbf{e}_z),$$

donde Re es el número de Rayleigh de la filtración y \mathbf{e}_z es el vector unitario vertical.

REFERENCIA: [BPB].

1.14 Límites de validez de la ley de Darcy

La ley de Darcy es una ley experimental y su deducción racional sucede bajo hipótesis de gran simplificación. Siendo sus aplicaciones muy variadas es natural que los estudiosos de los fluidos se pregunten por sus límites de validez. Fue O. REYNOLDS (1883) quien primero observó que el hecho de que el flujo proceda en forma ordenada, es decir en forma laminar, depende de la velocidad, más precisamente de los valores relativos de la velocidad, la viscosidad y el tamaño medio de los granos, cantidades que se combinan para dar un número de Reynolds adaptado al flujo en un conducto poroso según la fórmula

$$(1.14.1) \quad \text{Re} = \frac{a\rho u}{\mu},$$

siendo a el tamaño medio de los granos y $u = |\mathbf{u}|$. En la realidad se observan fuertes desviaciones respecto a la dependencia lineal de \mathbf{q} respecto a $\nabla\pi$ para valores de Re desde 100 en adelante, que se suelen explicar por la aparición de un régimen turbulento. Se han propuesto entonces fórmulas del tipo

$$(1.14.2) \quad \nabla\pi = -\frac{\mu}{k} f(\text{Re}, m) \mathbf{u}$$

en que $f \sim c$ para $\text{Re} \sim 0$ mientras $f \sim u$ para $\text{Re} \rightarrow \infty$ (ley cuadrática del flujo turbulento). Un ejemplo es la llamada ley de FORCHHEIMER

$$(1.14.3) \quad -\frac{k}{\mu} \nabla p = \mathbf{u} + \frac{\beta k^{1/2} \rho}{\mu} u \mathbf{u}.$$

De hecho las anomalías empiezan para Re del orden de 10 en adelante, zona de transición entre el flujo laminar y el turbulento. Por el contrario, para Re menores el flujo es laminar, las fuerzas viscosas predominan y la ley de Darcy describe perfectamente al flujo. Por último, en el extremo inferior del rango de números de Reynolds, para $\text{Re} \sim 0$, vuelven a presentarse anomalías en forma de un *gradiente hidráulico mínimo* por debajo del cual el flujo es prácticamente nulo. La gráfica de la correspondencia $\nabla\pi \mapsto \mathbf{u}$ tiene un tramo horizontal $0 \leq \nabla\pi \leq a$ con $\mathbf{u} = 0$.

REFERENCIAS: [BER], [Be], [Fl], [V1].

1.15 Nota cultural

Siendo Darcy un nombre poco común, resulta curioso que exista otro científico muy famoso de nombre análogo (con distinta grafía). Se trata de D'ARCY WENTWORTH THOMPSON, cuyo libro *On Growth and Form*, 1917, [DWT] es una piedra angular de la morfogénesis, estudio de las formas naturales y su origen. Al contrario de nuestro Darcy de Dijon, D.W.T., escocés, fue académico, profesor de la Univ. de St Andrews. La teoría de la filtración y la morfogénesis son áreas de la ciencia en principio alejadas, pero ambas nos pueden servir de ejemplo de la amplitud de intereses de la matemática actual. Estas disciplinas estuvieron en su origen bastante lejos del mundo del análisis matemático y han venido a ser al final del siglo XX objeto de activo interés de la matemática y el cálculo científico. Hace sólo 30 años no existían aún los métodos matemáticos necesarios para proceder al estudio eficiente de estos problemas.

Referencias del capítulo

Estas referencias, seleccionadas de una extensa bibliografía, recogen el material utilizado para confeccionar el presente texto.

TEXTOS SOBRE LOS FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS

- [BER] G.I. BARENBLATT, V.M. ENTOV, V.M. RYZHIK, "Flow of fluids through natural rocks", Kluwer Academic Publ. (1990).
- [Be] J. BEAR, "Dynamics of Fluids in Porous Media", Dover, New York, 1972.
- [BV] J. BEAR, A. VERRUIJT, "Modeling ground-water flow and pollution", D. Reidel Pub. Co., Dordrecht, 1987.
- [CJ] G. CHAVENT, J. JAFFRE, "Mathematical models and finite elements for reservoir simulation. Single phase, multiphase and multicomponent flows through porous media", Studies in Contemporary Mathematics and its Appl. **17**, North-Holland Publ. Co., 1986.
- [Ew1] R. EWING, "The mathematics of reservoir simulation", Frontiers in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1983.
- [GMT] G. GAGNEUX, M. MADAUNE-TORT, "Analyse mathématique des modèles non linéaires de l'ingénierie pétrolière", Springer Vlg, Berlin, 1996.
- [Gr] R. A. GREENKORN, "Flow Phenomena in Porous Media", Marcel Dekker, New York, 1983.
- [He] R. HELMIG, "Multiphase flow and transport processes in the subsurface", Springer, New York, 1996.
- [Le] T. C. LEE, "Applied mathematics in Hydrogeology", Lewis Pub., Boca Raton, Fa, 1999.

- [Mu] M. MUSKAT, “The flow of homogeneous fluids through porous media”, McGraw-Hill, New York, 1939.
- [Pc] D. W. PEACEMAN, “Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation”, Elsevier, New York, 1977.
- [PK] P. YA. POLUBARINOVA-KOCHINA, “Theory of Ground Water Movement”, Princeton Univ. Press, Princeton, 1962.
- [Sh] M. SAHIMI, “Flow and transport in porous media and fractured rock”, VCH, Weinheim, New York, 1995.
- [W] M. F. WHEELER, “Environmental studies”, IMA Volumes in Maths and its Applications, Springer, New York, 1996
- [XS] XIAO SHUTIE, editor, “Flow and transport in porous media”, World Scientific, Singapore, 1992.

ALGUNOS ARTÍCULOS SOBRE FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS

- [BGPV] G.I. BARENBLATT, J. GARCIA-AZORERO, A. DE PABLO, J.L. VAZQUEZ, *The mathematical model for two-phase non-equilibrium flows in porous media*, in “Mathematical modelling of flow through porous media”, A. Bourgeat, C. Carasso, S. Luckhaus, A. Mikelic eds., World Scientific, 1995, pages 59-74.
- [BGPV2] G.I. BARENBLATT, J. GARCIA-AZORERO, A. DE PABLO, J.L. VAZQUEZ, *Mathematical model of the non-equilibrium water-oil displacement in porous strata*, *Applicable Analysis*, **65** (1997), 19-45.
- [BVa] G.I. BARENBLATT, J.L. VAZQUEZ, *On a new free boundary problem for unsteady flows in porous media*, *European Jnl. Appl. Math.*, **9** (1998), 37-54.
- [BPB] A. BOUHOUC, M. PRAT, S. BORIES, *Transient compressible flow and heat transfer within a heterogeneous porous medium*, *Journal Thermophys. Heat Transfer* **9** (1995), pp. 144-150.
- [Ew2] R. EWING, *Computational Sciences in Environmental Applications*, en “Computational Science for the XXI Century”, M.O. Bristeau et al. eds., John Wiley 1997. Pp. 250-259.
- [FG] P. FABRIE, TH. GALLOUET, *Modelling wells in porous medium flows*, *aparecerá*.
- [Fl] V.A. FLORIN, *Earth compaction and seepage with variable porosity, taking into account the influence of bound water*, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR, Otdel. Tekhn. Nauk*, No. bf 11 (1951) pp. 1625-1649 (in Russian).
- [G] B. GILDING, *Qualitative mathematical analysis of the Richards equation*, *Transport in Porous Media*, **5** (1991), 651-666.
- [Sm] F.J. SAMPER, *Flujo de agua y transporte de masa en el medio no saturado: estado del arte*, en “Curso Internacional de hidrología subterránea”, F. Anguita et al. eds., CIMNE, Barcelona, 1991.

[V1] J.L. VAZQUEZ, *The free boundary problem for the heat equation with fixed gradient condition*, en "Free boundary problems, theory and applications", Pitman Research Notes in Mathematics Series **363** (Actas de Zakopane Congress '95), M. Niezgodka and P. Strzelecki eds., Longman, 1996.

SOBRE LA MECÁNICA DE FLUIDOS

- [CM] A.J. CHORIN, J.E. MARSDEN, "A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics", Springer-Verlag, 1980
- [LL] L.D. LANDAU, E.M. LIFSHITZ, "Mecánica de Fluidos", Reverté, Barcelona, 1991.
- [Li] A. LIÑÁN MARTÍNEZ, "Mecánica de fluidos", Publicaciones ETSI Aeronáuticos, Un. Politécnica de Madrid, 1967.
- [PL] P.L. LIONS, "Introduction to Mathematical Fluid Mechanics", 2 volúmenes, Oxford Univ. Press, 1995 y 1998.
- [St] V.L. STREETER, "Handbook of Fluid Dynamics", McGraw-Hill, New York, 1982.
- [T] R. TEMAM, "Navier-Stokes equations", North-Holland, New York, 1979.
- [V2] J.L. VAZQUEZ, "Lecciones de Mecánica de Fluidos", Notas de Curso, Univ. Autónoma de Madrid, 1997.
- [ZR] YA. B. ZEL'DOVICH, YU. P. RAIZER, "Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena", vol. II, Academic Press, New York, 1966.

SOBRE LA HOMOGENEIZACIÓN

- [Ho] U. HORNUNG, *Applications of the homogeization method to flow and transport in porous media*, in [XS], páginas 167–222.
- [Ta] L. TARTAR, *Incompresible fluid flow in a porous medium - convergence of the homogenization process*, en "Non-Homogeneous Media and Vibration Theory", E. Sánchez-Palencia editor, Lecture Notes in Physics **127** Springer, Berlin, 1980. Páginas 368–377.

SOBRE EL PROBLEMA DEL DIQUE

- [B] C. BAIOCCHI, *Su un problema a frontiera libera conesso a questioni di idraulica*, Ann. mat. Pura Appl., **92** (1972), pp. 107-127.
- [Ca] J. CARRILLO, *An Introduction to Free Boundary Problems*, en "Current Trends in Applied Mathematics", M.A. Herrero y E. Zuazua eds., Editorial Univ. Complutense, 1996.
- [F] A. FRIEDMAN, "Variational Principles and Free Boundary Problems", Wiley Interscience, New York, 1982.
- [KS] D. KINDERLEHER, G. STAMPACCHIA, "An Introduction to Variational Inequalities and their Applications", Academic Press, New York, 1980.

[GT] D. GILBARG, N.S. TRUDINGER, “Elliptic Partial Differential Equations of Second Order”, Springer-Verlag, New York, 1983.

[LSU] O.A. LADYZHENSKAYA, V.A. SOLONNIKOV, N.N. URAL'CEVA, “Linear and quasilinear equations of parabolic type”, Izd. Nauka, Moscow, 1967.

REFERENCIAS HISTÓRICAS

[Dr] H. DARCY, “Les fontaines publiques de la ville de Dijon”, V. Dalmont, Paris, 1856, pp. 305-401.

[DT] D'ARCY W. THOMPSON, “On Growth and Form”, Cambridge Univ. Press, 1917. En español: “Crecimiento y forma”, H. Blume ed., Madrid, 1980.

[Du] J. DUPUIT, “Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans les canaux découverts et à travers les terrains perméables”, Dunod, Paris.

[R] L. RICHARDS, *Capillary conduction of liquids in porous media*, Physics **1** (1931), pp. 318-333.

Capítulo 2

Estudio Matemático de la EMP

Dedicamos este capítulo al estudio matemático de la EMP

$$(2.0.1) \quad u_t = \Delta(u^m), \quad m > 1,$$

como modelo del que existe una extensa teoría matemática, que admite interesantes comparaciones con la bien conocida teoría de ecuación del calor clásica y donde aparecen en forma muy ilustrativa algunos de los conceptos matemáticos más interesantes y novedosos de la problemática de fluidos en medios porosos, como las soluciones generalizadas, las fronteras libres y la relevancia de los regímenes autosemejantes como límites asintóticos.

2.1 Primeras ideas sobre el análisis matemático.

Tomemos como paradigma el caso más simple, el exponente $m = 2$, en dimensión espacial $n = 1$, para tratar de mostrar los problemas y características más importantes. Podemos en este caso volver al problema de Boussinesq y tratar de hallar la solución u (altura de la frontera libre, y a partir de ella velocidad y presión). Tras añadir datos iniciales y de contorno convenientes para u , es de esperar que exista entonces una solución única. De hecho, la ecuación entra a primera vista dentro de la clasificación usual de las EDPs como ecuación parabólica por su semejanza con la ecuación clásica del calor, $u_t = u_{xx}$, y cumple de hecho la condición de parabolicidad en todos los puntos en que u es positiva, lo que nos da la esperanza de utilizar la teoría de *ecuaciones parabólicas cuasilineales* desarrollada en la segunda parte de este siglo, cf. el texto clásico [LSU]. Lamentablemente, deja de ser parabólica en los puntos en que $u = 0$, como el lector observará escribiéndola en la forma equivalente

$$(2.1.1) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2.$$

Ello tiene consecuencias no desdeñables. Una de ellas es que no tiene en general soluciones clásicas, aunque veremos que sí las tiene *generalizadas*. En realidad la fórmula (2.1.1)

indica que la ecuación *degenera* en una ecuación de primer orden. El hecho de que la ecuación degenerada es (salvo constantes) $u_t = (u_x)^2$, una ecuación bien conocida de primer orden que se puede integrar por características, explica la sorprendente *propiedad de propagación finita*, que se enuncia como sigue:

“Si el dato inicial $h(x, 0)$ tiene soporte compacto también tiene soporte compacto la solución, $h(x, t)$, como función de x para todo $t > 0$ fijo”.

Este soporte crece con el tiempo. Se puede definir en consecuencia una *interfaz* o *frontera libre* $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, que separa los conjuntos $\{u > 0\}$ (hasta donde se extiende la masa de agua) y $\{u = 0\}$ (la región seca). Digamos que tal propiedad es sorprendente en una ecuación en principio parabólica (pues es falsa para la ecuación del calor, modelo de tales ecuaciones), pero es bien natural para el problema físico que tratamos. En realidad la propiedad de velocidad de propagación infinita de la ecuación clásica del calor es físicamente un contratiempo en un modelo por otra parte tan bello y eficaz.

El método de análisis que adoptamos es el siguiente: un primer nivel elemental de estudio, previo a la construcción de una teoría general, consiste en obtener un número suficiente de soluciones explícitas o casi explícitas. Para ello se recurre a soluciones de formas especiales. He aquí los principales tipos particulares de solución a investigar:

- (A) Funciones de una sola variable: $u = u(t)$, $u = u(x)$. Estas últimas se denominan *soluciones estacionarias*.
- (B) Tipo *separación de variables*: $u = X(x)T(t)$.
- (C) Tipo *ondas viajeras* : $u = f(x - ct)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (D) Tipo *soluciones autosemejantes*: $u = t^{-\alpha} f(xt^{-\beta})$.

Posteriormente se selecciona el tipo de problema inicial y/o de contorno que interesa, se introduce un concepto de solución generalizada motivado por nuestra experiencia con las soluciones especiales y se establece la existencia y unicidad de la solución, así como su estabilidad. Por último se analizan las propiedades específicas de tales soluciones, especialmente aquellas que tienen un significado de interés para las aplicaciones.

2.2 Ondas viajeras. Propiedad de propagación finita

Dejando al lector que investigue la existencia de soluciones de los dos primeros tipos, veamos con algún detalle la curiosa problemática planteada por las soluciones en forma de onda viajera

$$(2.2.1) \quad u = f(\eta), \quad \eta = x_1 - ct \in \mathbb{R}.$$

Este tipo de solución representa un onda que se desplaza en el tiempo paralelamente a sí misma a lo largo de un eje coordenado, aquí el x_1 . El parámetro c es la velocidad de la onda. Podemos suponer que $c \neq 0$, pues para $c = 0$ hallamos estados estacionarios que son más bien triviales como habrá comprobado el lector. Además podemos reducir

el caso $c < 0$ al $c > 0$ por una simetría en la solución (sustituyendo $u(x, t)$ por $u(-x, t)$ se haya otra solución de la ecuación que se desplace en sentido opuesto). Por último señalemos que las ondas viajeras son uni-dimensionales, es decir se toma como variable espacial uno de los ejes coordenados, por ejemplo el x_1 . Es evidente que mediante una rotación podemos hallar una onda que camine en cualquier dirección \mathbf{n} del espacio \mathbb{R}^n . Entonces valdría la fórmula (2.2.1) con $\eta = \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct$.

Poniendo pues $c > 0$ fijo y sustituyendo la forma (2.2.1) en la ecuación $u_t = \Delta u^m$ se llega a

$$(2.2.2) \quad (f^m)'' + cf' = 0,$$

donde las primas indican derivadas respecto a η . Integrando una vez se tiene

$$(2.2.3) \quad (f^m)' + cf = K,$$

con constante de integración $K \in \mathbb{R}$. Estamos interesados en hallar un onda que avance contra una región vacía, es decir que para $\eta \gg 0$ queremos que $f = f' = 0$. Esta condición de contorno parece imponer la condición $K = 0$ con lo que (2.2.3) se reduce a

$$(2.2.4) \quad mf^{m-2}f' + c = 0,$$

que se puede integrar para obtener

$$(2.2.5) \quad \frac{m}{m-1}f^{m-1} = -c\eta + K_1.$$

• *Problemas inesperados. Fracaso del marco clásico.* Aparentemente hemos tenido completo éxito en la tarea de integrar la ecuación, pero este éxito se ve empañado inmediatamente cuando observamos que la fórmula (2.2.5) es incapaz de cumplir nuestra condición de contorno en $\eta = +\infty$. Más aún, nuestra solución se hace inevitablemente negativa para todo η grande, lo cual va contra la física del problema. Un matemático *conservador* se verá tentado de arrojar todo el cálculo por la borda. Por el contrario, una de las ideas motrices de la matemática aplicada es la idea de que no debemos abandonar sin más un buen cálculo, pues las dificultades encontradas son la puerta que nos abre el camino a un nuevo contexto en que podemos salvar lo obtenido y resolver en forma novedosa y útil el problema planteado. Abordaremos tal incursión en lo desconocido guiados por la combinación de la experiencia matemática y la evidencia que proviene de las aplicaciones que se tienen en mente. Vemos a continuación como se materializa esta tarea en el caso presente.

La vía de solución es relativamente fácil (una vez hallada). Se denomina *estrategia del problema límite*: existe un cálculo próximo al nuestro que tiene sentido, realicemos este nuevo cálculo y pasemos al límite. Pasar al límite en modelos aproximados es, junto con la integración por partes, uno de los recursos clave de la matemática aplicada. En concreto tomamos como condición de contorno en (2.2.3)

$$(2.2.6) \quad f(\infty) = \varepsilon, \quad f'(\infty) = 0,$$

con lo que obtenemos para la constante K el valor $K = \varepsilon c > 0$. Entonces escribimos (2.2.3) como

$$(2.2.7) \quad f' = c \frac{\varepsilon - f}{m f^{m-1}}$$

que es una E.D.O. de variables separadas y se puede integrar fácilmente, al menos gráficamente. Para $m = 2$ la integración es explícita y da

$$(2.2.8) \quad -c\eta + K_1 = 2 \int \frac{f df}{f - \varepsilon} = 2f + 2\varepsilon \log(f - \varepsilon).$$

Podemos poner $K_1 = 0$ sin pérdida de generalidad. Dibuje el lector la gráfica para convencerse de que hemos obtenido una onda que une los niveles $f = \infty$ para $\eta = -\infty$ con $f = \varepsilon$ para $\eta = \infty$. Podemos pues pasar el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. El resultado es sorprendente pues no obtenemos (2.2.5) sino

$$(2.2.9) \quad 2f = (-c\eta)_+ = \max\{-c\eta, 0\}.$$

Es evidente que este límite tiene sentido físico. Tiene el inconveniente de no ser una solución de la ecuación (2.0.1) en el sentido clásico, pues tiene derivada discontinua en la línea $\eta = 0$. Nosotros sostenemos que es una *buena solución* y para justificar esta pretensión introduciremos en la sección 2.4 un concepto de “solución generalizada” o “solución débil” que se aplica en un contexto general y permite aceptar en particular la fórmula (2.2.9). En general para todo $m > 1$ la solución límite es

$$(2.2.10) \quad \frac{m}{m-1} f^{m-1} = (c(-\eta) + K_1)_+,$$

lo cual es un poquito más difícil de demostrar pero no imposible si se utiliza el plano de fase adecuadamente. Es de señalar que la función $(m/(m-1))f^{m-1}$ coincide en la derivación del modelo de gases en medios porosos (sección 1.9) con la presión y la función $-mf^{m-2}f'$ con la velocidad. Así pues, las ondas viajeras son *frentes de velocidad constante* c cuando $u > 0$ y tienen velocidad nula en la parte vacía (donde el valor asignado por nosotros a la velocidad es en realidad irrelevante). Ello recuerda, y con razón, las soluciones discontinuas de la dinámica de gases, cf. [CM], [LL].

Analizada la solución geoméricamente, se observa que estamos en presencia de un fenómeno de propagación a velocidad finita y coexisten dos regiones, la ocupada por el fluido y la vacía, separadas por una *frontera libre* sobre la cual la solución no es regular. Todas estas propiedades son contrarias a lo que sucede en la ecuación del calor lineal en que no aparece ninguna frontera libre que separe una región ocupada de una vacía. De hecho todo el espacio está más o menos ocupado por las soluciones de la ecuación lineal, lo que impide visualizar con nitidez los frentes de propagación que son de gran interés para el investigador atento a la aplicación.

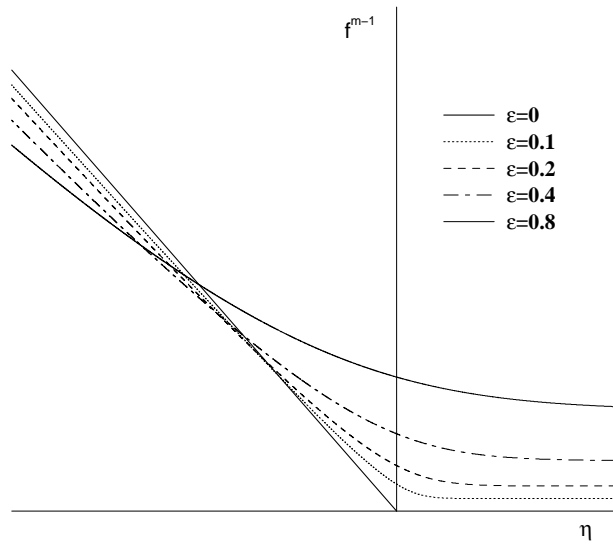


Figura 2.1. Ondas viajeras con $\varepsilon > 0$ y su límite

2.3 Soluciones autosemejantes. Solución fundamental de Barenblatt

Este tipo de soluciones es de estudio menos trivial. Tienen aún mayor importancia en la teoría general, en realidad la auto semejanza es una propiedad de importancia capital en la mecánica de fluidos. Ser autosemejantes quiere decir que se pueden escribir como soluciones constantes en el tiempo tras un cambio de escala (o *zoom*), como sigue:

$$(2.3.1) \quad u' = f(x') \quad \text{con} \quad u' = ut^\alpha, \quad x' = xt^{-\beta}.$$

Los exponentes α y β se llaman *exponentes de semejanza*. La función f se llama el *perfil*. Hay diversos exponentes α y β para los que existen soluciones, pero queremos buscar la *solución fundamental*, algo parecido a la solución fundamental de la ecuación del calor lineal, que es, como todos saben:

$$(2.3.2) \quad U(x, t) = ct^{-n/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$$

Vemos que esta fórmula es autosemejante y tiene exponentes de semejanza: $\alpha = n/2$, $\beta = 1/2$. Para la solución de la EMP los pasos para buscar la solución son:

- Tomar u autosemejante: $U(x, t) = t^{-\alpha} f(\eta)$, con $\eta = xt^{-\beta}$ y f función radial.
- Sustituir esta forma en la ecuación. Dado que

$$U_t = -\alpha t^{-\alpha-1} f(\eta) + t^{-\alpha} \nabla f(\eta) \cdot xt^{-\beta-1} (-\beta) = -\alpha t^{-\alpha-1} f(\eta) - \beta t^{-\alpha-1} \nabla f(\eta) \cdot \eta,$$

y

$$\Delta(U^m) = t^{-\alpha m} \Delta_x(f^m)(xt^{-\beta}) = t^{-\alpha m} t^{-2\beta} \Delta_\eta(f^m)(\eta),$$

la ecuación $U_t = \Delta U^m$ equivale a

$$(2.3.3) \quad t^{-\alpha-1}(-\alpha f(\eta) - \beta \eta \cdot \nabla f(\eta)) = t^{-\alpha m-2\beta} \Delta f^m(\eta).$$

• Eliminar la dependencia del tiempo, para lo que es preciso imponer una 1ª relación de exponentes, a saber

$$(2.3.4) \quad \alpha(m-1) + 2\beta = 1,$$

lo que permite despejar un exponente (por ejemplo α) en función del otro. Para el perfil f nos queda una ecuación elíptica no lineal:

$$(2.3.5) \quad \Delta f^m + \beta \eta \cdot \nabla f + \alpha f = 0,$$

que depende aún del parámetro libre (β ó α , uno de los dos).

• Es preciso determinar aún cual es el valor adecuado del exponente libre. Para ello volvamos a la ecuación del calor clásica, en que $m = 1$ y la relación anterior da

$$(2.3.6) \quad \beta = 1/2, \quad \eta = x/\sqrt{t}.$$

Vimos más arriba que la solución fundamental corresponde a $\alpha = n/2$. ¿Cómo se obtiene esta segunda relación? Observamos primero que en el caso lineal la solución es la gaussiana, que es la única solución no negativa de la ecuación del calor *autosemejante* tal que $u \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$. Una propiedad más prometedora es la siguiente: satisface una ley de variación de la energía como sigue:

$$(2.3.7) \quad \frac{d}{dt} \int_B u dx = \int_B u_t dx = \int_B \Delta u dx = \int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial n} dS \rightarrow 0,$$

cuando $r \rightarrow \infty$, donde $B = B_r(0)$ es la bola de radio r . Entonces, se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) dx = 0.$$

Esta es una ley de conservación, que quiere decir que la energía (llamada también masa) es un *invariante del movimiento*:

$$(2.3.8) \quad \int u(x, t) dx = C.$$

Copiamos la misma idea para la EMP:

$$(2.3.9) \quad \frac{d}{dt} \int_B u dx = \int_B u_t dx = \int_B \Delta u^m dx = \int_{\partial B} \frac{\partial u^m}{\partial n} dS \rightarrow 0$$

cuando $r \rightarrow \infty$. Lo aplicamos a la solución autosemejante y queda:

$$(2.3.10) \quad \int U(x, t) dx = \int t^{-\alpha} f(xt^{-\beta}) dx = t^{-\alpha} t^{\beta n} \int f(\eta) d\eta = \text{const}(t),$$

lo que implica que necesariamente que $\alpha = \beta n$. Se obtienen en resumen las condiciones:

$$(2.3.11) \quad \alpha(m-1) + 2\beta = 1, \quad \alpha = \beta n,$$

que determinan los exponentes:

$$(2.3.12) \quad \beta = \frac{1}{n(m-1) + 2}, \quad \alpha = \frac{n}{n(m-1) + 2},$$

y la ecuación del perfil f es siempre (2.3.5), un problema elíptico no lineal.

• Ahora hemos de calcular f resolviendo este problema con datos cero en el infinito. Se tiene:

$$\frac{1}{r^{n-1}}(r^{n-1}(f^m)')' + \beta r f' + n\beta f = 0,$$

es decir,

$$(r^{n-1}(f^m)')' + \beta r^n f' + n\beta r^{n-1} f = 0,$$

y finalmente,

$$(r^{n-1}(f^m)' + \beta r^n f)' = 0.$$

Esto se llama un cálculo afortunado, pues integrando llegamos a:

$$(2.3.13) \quad r^{n-1}(f^m)' + \beta(r^n f) = C.$$

Dado que queremos $f \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$ tomamos $C = 0$, llegando a

$$(2.3.14) \quad (f^m)' + \beta r f = 0, \quad m f^{m-2} f' = -\beta r,$$

luego

$$(2.3.15) \quad \frac{m}{m-1} f^{m-1} = -\frac{\beta}{2} r^2 + C, \quad f^{m-1} = A - \frac{\beta(m-1)}{2m} r^2.$$

• *Problemas de nuevo.* Observamos que f^{m-1} es una parábola hacia abajo, lo que nos crea una cierta angustia porque estábamos pensando en soluciones *no negativas*. Estamos en la situación que ya hemos afrontado en el estudio de las ondas viajeras. Históricamente, este ejemplo fue estudiado antes. Así pues, el mundo no se hundirá y buscaremos una salida no estándar. Revisemos la situación: gracias a la motivación física hemos detectado que algo iba mal; recurriendo al análisis aproximado o al cálculo numérico (que permite integrar la ecuación un poco a las bravas, por diferencias finitas por ejemplo, a partir de unos datos iniciales adecuados del tipo campana de Gauss con soporte finito) se observa un resultado de la evolución a largo plazo que coincide con cortar la parábola al nivel $u = 0$ y quedarnos con la parte positiva. El precio que pagamos es el perder el sentido de solución clásica. En la sección siguiente veremos qué es una solución “generalizada” y comprobaremos que la parábola cortada es una solución generalizada.

Dando por buena esta propuesta por el momento nuestra función queda

$$(2.3.16) \quad f = (A - b|\eta|^2)_+^{\frac{1}{m-1}}, \quad b = \beta(m-1)/(2m).$$

Observamos que f^{m-1} no es C^1 en el punto $|\eta| = r_0$ en que se anula, lo que implica que la solución no es clásica. Por otra parte, $f \rightarrow 0$ cuando $\eta \rightarrow \infty$, más aún la solución tiene soporte compacto. La solución completa de $u_t = \Delta u^m$ queda:

$$(2.3.17) \quad U(x, t) = t^{-\beta n} \left(A - \frac{bx^2}{t^{2\beta}} \right)_+^{1/m-1}$$

con los valores de β y b antedichos.

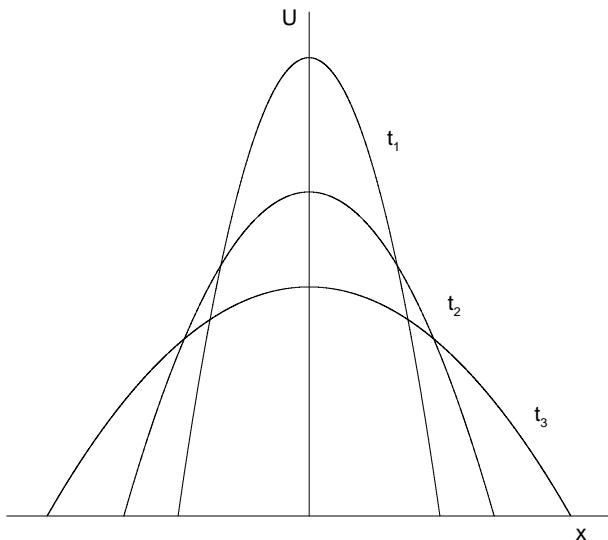


Figura 2.2. Solución fundamental para varios valores de t

Como hemos dicho estas soluciones tienen masa constante en el tiempo:

$$(2.3.18) \quad M = \int_0^\infty U dx = \int_0^\infty f(\eta) d\eta = A^{\frac{1}{m-1} + \frac{n}{2}} \int_0^\infty (1 - bs^2)^{\frac{1}{m-1}} ds,$$

de donde se deduce la relación entre A y la masa M

$$(2.3.19) \quad CA^{\frac{n}{2} + \frac{1}{m-1}} = M.$$

Obsérvese además que la masa inicial es una delta de Dirac,

$$(2.3.20) \quad \lim_{t \rightarrow 0} U(x, t) = M\delta(x),$$

de forma que nuestra solución, denominada en adelante como $U(x, t; M)$, describe la evolución de una distribución de masa M concentrada en el instante inicial en un punto (el origen de coordenadas). Por ello recibe el nombre usual en la literatura de *solución de tipo fuente* con preferencia al de *solución fundamental* propuesto por nosotros. Recibe también el nombre de *solución de Barenblatt* en honor al gran científico ruso.

NOTA HISTÓRICA. Estas soluciones fueron halladas alrededor de 1950 en Moscú por YA. ZEL'DOVICH y A. KOMPANEETS [ZK] y por G. BARENBLATT [B] independientemente.

Este realizó un estudio general y las soluciones suelen ir asociadas a su nombre. La motivación de Zeldóvich era un problema de física del plasma, ¡nada que ver con los medios porosos!

2.4 Concepto de solución generalizada

Habría algunos a quienes preocupe este salto adelante, nada más lógico. Les recordaremos que sin pagar un precio la respuesta al problema de construir una solución especial sería: “no hay solución”, una manera de confesar nuestra incapacidad para comprender el problema. Pero el problema tiene perfecto sentido en la aplicación práctica de estos modelos de la física de fluidos, se trata de la evolución de un frente de onda o de una masa puntual y la evidencia analítica aproximada, numérica y experimental apuntan a que las configuraciones halladas son correctas. La propuesta que se ha hecho es pues novedosa: admitir soluciones no clásicas, admitir en particular que las parábolas cortadas son una solución no-clásica admisible físicamente. Tal propuesta abre un marco conceptual perfectamente razonable y admitido hoy día por la comunidad científica, a condición de enmarcarse en un contexto general. Por ello buscamos una teoría más amplia que nos proporcione soluciones para una extensa clase de datos iniciales y de contorno. Siguiendo a SÓBOLEV se estudian soluciones en el sentido de las distribuciones, que estando definidas por ejemplo en $Q = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t \in (0, \infty)\}$, verifican las igualdades siguientes

$$(2.4.1) \quad \int \int u \varphi_t dx dt + \int \int u^m \Delta \varphi dx dt = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(Q)$$

correspondientes a verificar la ecuación en sentido débil contra el conjunto de las *funciones test*. Dado que el concepto de distribución es muy amplio y no siempre compatible con las no linealidades presentes, las soluciones se eligen dentro de un espacio funcional adecuado.

Olga OLEINIK (Moscú, 1958) [OKC] y sus colaboradores demuestran que existe solución única generalizada del tipo débil que es una función continua no negativa y acotada para el problema de Cauchy en una dimensión de espacio, con datos iniciales $u_0(x)$ continuos, acotados, no negativos y tales que $(u_0^m)_x$ es acotado. Tal resultado ha sido mejorado por estudios sucesivos y se puede enunciar así un resultado óptimo

Teorema 2.4.1 *Para toda función no negativa $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$(2.4.2) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^\gamma} \int_{|x| \leq R} u_0(x) dx = 0, \quad \gamma = n + \frac{2}{m-1},$$

existe una única función no negativa $u \in C([0, \infty) : L^1_{loc}(\mathbb{R}^n))$ tal que para todo $t > 0$ $(1 + |x|^2)^{-1/(m-1)} u(x, t)$ es acotado, que la ecuación se verifica en el sentido de las distribuciones en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ y que

$$(2.4.3) \quad u(\cdot, t) \rightarrow u_0 \quad \text{en } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Resultados aún más generales incluyen el caso en que el límite (2.4.2) es finito no nulo y entonces la solución existe solamente durante un tiempo finito, y el caso en que el dato es una medida de Borel y no una función, siempre bajo una condición análoga a (2.4.2), y el resultado de existencia y la propiedades son análogas. Además, la solución es una función continua de las variables (x, t) para $t > 0$. En el caso en que el dato es integrable entonces la solución está en el espacio natural $u \in C([0, \infty) : L^1(\mathbb{R}^n))$ y es continua y acotada para $t \geq \tau > 0$. Estos resultados están expuestos en [A].

Es fácil ver que toda solución clásica sería también generalizada en el sentido anterior y que las soluciones fundamentales son generalizadas para $t \geq \tau > 0$ (¡obsérvese que para $t \rightarrow 0$ se hacen no acotadas!). Compruébese también que las ondas viajeras son auténticas soluciones débiles.

Un interesante resultado señala a las soluciones fundamentales de Barenblatt como los modelos asintóticos de todas las soluciones generalizadas con datos integrables, lo que justifica el esfuerzo que les hemos dedicado.

Teorema 2.4.2 *Sea $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $u_0 \geq 0$ y $\int u_0(x) ds = M > 0$. Entonces para todo $p \in [1, \infty]$ se tiene*

$$(2.4.4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\alpha_p} \|u(x, t) - U(x, t; M)\|_p \rightarrow 0, \quad \alpha_p = \frac{n(p-1)}{p(n(m-1)+2)}.$$

La demostración, debida esencialmente a KAMIN y FRIEDMAN, puede verse completa en esta forma en [V5]. El resultado es válido incluso para soluciones de signo cualquiera, cf. [KV]. Para $p = \infty$ obtenemos convergencia en la norma uniforme con exponente $\alpha = n/(n(m-1)+2)$. La velocidad de convergencia óptima (para clases de datos algo más restringidas) ha sido estudiada recientemente por diversos autores, cf. [CT]. Por supuesto, también se plantea el problema de comportamiento asintótico para dominios acotados, cf. [AP], [V5], o en dominios exteriores, cf. [QV].

2.5 La frontera libre

Un resultado importante establecido también por OLEINIK y colaboradores es la *propiedad de propagación finita*, mencionada en secciones anteriores. Problemas matemáticos fundamentales son entonces el determinar la forma y regularidad de estas fronteras libres y su comportamiento cuando avanza el tiempo. Resultados clásicos sobre la primera cuestión se deben a Luis A. CAFFARELLI y colaboradores.

En cuanto a la cuestión asintótica se tiene que en el problema en todo el espacio una solución con soporte inicial compacto tiende a ocupar para $t \rightarrow \infty$ un dominio de tipo esférico cuyo radio se puede estimar como

$$(2.5.1) \quad R(t) \sim ct^\sigma,$$

con un exponente de expansión dado por $\sigma = 1/(n(m-1) + 2) < 1/2$ que decrece con m . La constante $c > 0$ depende solo de la masa inicial $M = \int u(x, 0) dx$. En particular vemos que el soporte se simetriza. De hecho la solución se parece cada vez más a la solución fundamental de Barenblatt también en cuanto al soporte, cf. [V5]. En dimensión espacial $n = 1$ tenemos información más precisa.

Teorema 2.5.1 *Sea $u_0 \geq 0$ una distribución de masa no negativa de soporte compacto en \mathbb{R} y sean $M = \int u_0(x) dx > 0$ la masa total y*

$$(2.5.2) \quad x_0 = \frac{1}{M} \int x u_0(x) dx$$

el centro de masas, los dos invariantes del movimiento. Entonces para todo $t \geq 1$ la solución $u(\cdot, t)$ es positiva en el intervalo comprendido entre las dos fronteras libres $s(t)$ y se tiene el desarrollo

$$(2.5.3) \quad s(t) = x_0 \pm c(m) M^{\frac{m-1}{m+1}} t^{\frac{1}{m+1}} + O(t^{-\frac{m}{m+1}}),$$

en que los coeficientes son óptimos.

Este resultado está esencialmente probado en [V3]. Un resultado análogo en precisión es desconocido aún en varias dimensiones espaciales.

Nota final. Las teorías de regularidad de la solución generalizada y de la interfaz o frontera libre han sido objeto de investigación de los especialistas hasta el día presente. Gran parte de las cuestiones básicas han sido resueltas (¡pero no todas!). Entre los aspectos más llamativos están las *fronteras metaestables*, que se mueven solamente tras un cierto *tiempo de espera*, y la regularidad analítica de las interfaces de soluciones con soporte compacto en una dimensión espacial, resultado que no es conocido en varias dimensiones. La ecuación (2.0.1) y sus generalizaciones han sido estudiadas por numerosos investigadores españoles, siendo en particular un tema popular en las universidades madrileñas, debiéndose los primeros trabajos a I. DÍAZ, que estudió la propiedad de soporte compacto, cf. [D], a M. HERRERO, que estudió la difusión rápida, cf. [H], y al autor. El lector puede consultar versiones parciales del estado de la cuestión sobre esta ecuación en [A], [K] y [V4].

El presente relato no contiene información sobre un aspecto crucial de la investigación desde su punto de vista aplicado, a saber, la implementación numérica, de la que existe hoy día amplia experiencia y progreso teórico, en el marco del estudio de los problemas llamados de difusión no lineal y cambio de fase. La presencia de una frontera libre proporciona la posibilidad de utilizar métodos del tipo *front tracking*. La dificultad numérica de la EMP no es considerada importante en comparación con otros problemas del área objeto de este estudio, pero la determinación de la frontera libre en contextos pluridimensionales, los problemas con tiempo de espera o con enfoque y los problemas asintóticos ofrecen interesantes tests para los códigos numéricos. Dejamos este tema para otros escritores más

expertos y terminamos estas notas con una invitación al lector curioso e interesado en este tema en forma de una serie de propuestas que mezclan los cálculos explícitos con las conclusiones basadas en la interpretación del modelo. De hecho estos ejercicios abren líneas de pesquisa que han sido desarrolladas por los investigadores en los últimos decenios.

Una nueva solución especial. (i) Se demuestra que para todo $T > 0$ la función

$$(2.5.4) \quad u(x, t) = \left(\frac{cx^2}{T-t} \right)^{\frac{1}{m-1}}$$

es una solución débil de la ecuación de los medios porosos en el intervalo temporal $0 \leq t < T$ si se escoge adecuadamente la constante $c = c(m, n)$.

(ii) Se demuestra que en $n = 1$ también la función definida por esta fórmula para $x \leq 0$ y como nula para $x > 0$ es una solución, con una frontera libre estacionaria $x = 0$ mientras la solución existe.

(iii) Obsérvese el comportamiento de tales soluciones cuando $t \nearrow T$. Se trata del fenómeno de *explosión* o *blow-up*.

Casos límite. Se puede estudiar el límite de la ecuación (2.0.1) cuando $m \rightarrow 1$ cuando $m \rightarrow \infty$ (a) formalmente en la ecuación, (b) a través de las ondas viajeras, (c) a través de las demás soluciones explícitas. De ahí se deducen conclusiones acerca de una teoría general para muy gran m o para $m \sim 1$.

Difusión rápida. Es posible considerar procesos de filtración regidos por la ecuación (2.0.1) con $m < 1$. He aquí algunas cuestiones básicas: estudiar para que valores de m se tiene aún una teoría similar, investigando la existencia de soluciones fundamentales del tipo Barenblatt. Explicar por que se habla de *ecuación de difusión rápida*. Hallar las ondas viajeras. Señalar con precisión en base a estas exploraciones los exponentes críticos m_c para los que la teoría cualitativa sufre una alteración esencial. [Respuesta: $m = 0$ y $m = (n - 2)/n$, situaciones distintas para $n = 1, 2$ o 3].

Ecuación de la presión. Sea

$$\pi = \frac{m}{m-1} u^{m-1}$$

la presión normalizada en el modelo de filtración de gases, sección 1.9. Se obtiene la llamada *ecuación de la presión*

$$\pi_t = (m-1)\pi\pi_{xx} + (\pi_x)^2.$$

Tomando el límite formal $m \rightarrow 1$ se llega a una ecuación tipo Burgers. Compruébese el límite sobre las soluciones explícitas. Para más detalles ver [AV], [LSV].

Referencias sobre la EMP y temas relacionados

- [A] D. G. ARONSON, *The porous medium equation*, in “Nonlinear Diffusion Problems”, Lecture Notes in Math. **1224**, A. Fasano y M. Primicerio eds., Springer Verlag, New York, 1986, pp. 12-46.
- [AP] D.G. ARONSON, L.A. PELETIER, *Large time behaviour of solutions of the porous medium equation in bounded domains*, J. Diff. Eqns. **39** (1981), pp. 378–412.
- [AV] D. G. ARONSON, J. L. VAZQUEZ, *The porous medium equation as a finite-speed approximation to a Hamilton-Jacobi equation*. Annales Inst. Henri Poincaré, Journal d’Analyse Non Linéaire **4** (1987), 203-230.
- [B] G. I. BARENBLATT, *On some unsteady motions of a liquid or a gas in a porous medium*, Prikl. Mat. Mekh. **16** (1952), pp. 67-78 (en ruso).
- [B2] G. I. BARENBLATT, “Dimensional Analysis”, Gordon and Breach. New York, 1987.
- [CT] J. A. CARRILLO, G. TOSCANI, *Asymptotic L^1 -decay of solutions of the porous medium equation to self-similarity*, a aparecerá.
- [D] J.I. DÍAZ, “Nonlinear Partial Differential Equations and Free Boundaries”, Pitman Res. Notes in Maths, **106**.
- [HP] M.A. HERRERO, M. PIERRE, *The Cauchy Problem for $u_t = \Delta u^m$ when $0 < m < 1$* , Trans. Amer. Math. Soc. **291** (1985), pp. 145-158.
- [K] A.S. KALASHNIKOV, Some problems of the qualitative theory of non-linear degenerate second-order parabolic equations, *Russian Math. Surveys* **42** (1987), pp. 169–222.
- [KV] S. KAMIN, J.L. VAZQUEZ, *Asymptotic behaviour of the solutions of the porous medium equation with changing sign*, SIAM Jour. Math. Anal. **22** (1991), pp. 34–45.
- [LSV] P. L. LIONS, P. E. SOUGANIDIS, J. L. VAZQUEZ, *The relation between the porous medium equation and the eikonal equations in several space dimensions*. Revista Matemática Iberoamericana **3** (1987), 275-310.
- [OKC] O. OLEĬNIK, S. A. KALASHNIKOV, Y. L. CZHOU, *The Cauchy problem and boundary-value problems for equations of the type of unsteady filtration*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **22** (1958), pp. 667-704 (en ruso).
- [QV] F. QUIRÓS, J. L. VAZQUEZ, *Asymptotic behaviour of the porous media equation in an exterior domain*, Ann. Scuola Normale Sup. Pisa, a aparecerá.
- [V3] J. L. VAZQUEZ, *Asymptotic behaviour and propagation properties of the one-dimensional flow of a gas in a porous medium*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), pp. 507-527.
- [V4] J. L. VAZQUEZ, *An introduction to the mathematical theory of the porous medium equation*, en “Shape Optimization and Free Boundaries”, M. C. Delfour ed., Math. and Phys. Sciences, Series C, vol. 380, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, Boston, Leiden; 1992. Pp. 347-389.

[V5] J. L. VAZQUEZ, I. *Asymptotic behaviour for the Porous Medium Equation in the whole space*, II. *Asymptotic behaviour for the PME in a bounded domain. The Dirichlet problem*. Notas de Curso de Doctorado, Univ. Autónoma de Madrid, 1997.

<http://www.adi.uam.es/~jvazquez>.

[ZK] YA. B. ZEL'DOVICH, A. S. KOMPANEETS, *On the theory of heat transfer with heat dependent thermal conductivity*, en "Collection of Papers Dedicated to the 70th Birthday of Acad. A. F. Ioffe", Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1950; pp. 61-71 (en ruso).